Musteraufgaben I/II

1. Beurteilen Sie für alle $t \in I\!R$ die Lösbarkeit des Gleichungssystems (GLS)

$$\begin{pmatrix} \sin t & 0 & 1+\cos t \\ 1 & \sin t & 1+\sin t \\ \cos t & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie in allen Fällen, in denen das GLS lösbar ist, die allgemeine Lösung.

2. Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$ mit Hilfe einer orthogonalen Matrix C, so daß

$C^T AC = D$ gilt. Berechnen Sie A^n für alle $n \in I\!N$.

3. Die Taylorpolynome um $x_0 = 0$ der Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $g(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$ stimmen bis zu einem gewissen Grad überein. T sei das Taylorpolynom höchsten Grades, das für beide Funktionen gleich ist. Bestimmen Sie T, und geben Sie möglichst gute Fehlerabschätzungen für $\max\limits_{|x|\le\pi/4} |\mathrm{e}^x - T(x)|$ und $\max\limits_{|x|\le\pi/4} |\mathrm{e}^{\sin x} - T(x)|$ an.

4. Bestimmen Sie die Taylorreihen um $x_0 = 0$ der Funktionen
a) $f(x) = \arcsin x$, b) $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2}$.
Für welche $x \in I\!R$ konvergieren diese Reihen, und wo stellen sie jeweils die Funktion f dar ? Geben Sie jeweils das Taylorpolynom an, das bei der Approximation von f für $|x| \le 1/2$ einen Fehler $< 5 \cdot 10^{-4}$ garantiert.

5. Führen Sie für die Funktion $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ eine Kurvendiskussion durch (einschließlich grobe Skizze). Geben Sie die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$ an, und berechnen Sie näherungsweise (bis auf einen Fehler $< 10^{-2}$) den Funktionswert an der kleinsten positiven Extremstelle.

6. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\sin x}\right)$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\arctan(x^2)}{x^2\ln(1+x^2)}$ *d)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2}(x-t)\mathrm{e}^{\sin t}\,dt.$

7. Gegeben sei das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\mathrm{e}^{2x} - 16\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^{2x}+4)(\mathrm{e}^x+2)^2}\,dx.$$

a) Zeigen Sie – ohne Benutzung einer Stammfunktion – die Konvergenz des Integrals.
b) Berechnen Sie mit Hilfe einer Stammfunktion den Wert des Integrals.

8. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Anfangswertaufgabe (AWA)

$$y' + \frac{2-\sin^2 x}{\sin x \cos x} y = 2 \sin x \cos x \quad , \quad y(\frac{\pi}{4}) = 0.$$

9. a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' + y = \sin^3 x + (1+x)e^{2x} \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der DGL $\quad y^{(9)} + y = x^2 e^x$.

10. Berechnen Sie die absoluten Extrema der Funktion $\quad f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy \;$ in $M = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; : \; x \geq 0 \; , \; y \geq 0 \; , \; x + y \leq 4\}$.

11. Gegeben sei die 2π-periodische Funktion f mit $\quad f(x) = |x| \cos x \;$ für $|x| \leq \pi$.
Skizzieren Sie diese Funktion, und berechnen Sie die zugehörige Fourierreihe. Wo konvergiert die Fourierreihe (punktweise bzw. gleichmäßig), und wo stellt sie die Funktion f dar ?

Berechnen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2+1}{(4k^2-1)^2}(-1)^{k+1}$.

12. a) Berechnen Sie die Laplace-Transformierten von

α) $\quad f(t) = t^3 e^{2t} \sin \omega t \quad , \; (\omega \in I\!R) \; , \qquad \beta) \quad f(t) = \dfrac{\sin t \cosh t}{t}$

b) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$y'' - 2y' + 2y = e^t \sin t \quad , \quad y(0) = 0 \; , \; y'(0) = 1$

mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Lösungen der Musteraufgaben

1. 1.Lösungsmöglichkeit: *Gauß-Algorithmus*

Erweiterte Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \sin t & 0 & 1+\cos t & \cos t \\ 1 & \sin t & 1+\sin t & 0 \\ \cos t & \sin t & \cos t & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sin t & 1+\sin t & 0 \\ \sin t & 0 & 1+\cos t & \cos t \\ \cos t & \sin t & \cos t & 0 \end{array}\right)$$

(1. und 2. Zeile vertauschen) (2.Zeile $-(\sin t)*$1.Zeile , 3.Zeile $-(\cos t)*$1.Zeile)

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sin t & 1+\sin t & 0 \\ 0 & -\sin^2 t & 1+\cos t-\sin t-\sin^2 t & \cos t \\ 0 & \sin t-\sin t\cos t & -\sin t\cos t & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (*) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sin t & 1+\sin t & 0 \\ 0 & -\sin^2 t & \cos t(1+\cos t)-\sin t & \cos t \\ 0 & \sin t(1-\cos t) & -\sin t\cos t & 0 \end{array}\right)$$

Ab jetzt sei $\underline{t \neq k\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \sin t \neq 0$

3.Zeile $-\dfrac{\sin t(1-\cos t)}{-\sin^2 t}*$2.Zeile , also 3.Zeile $+\dfrac{1-\cos t}{\sin t}*$2.Zeile ergibt:

$$\tilde{a}_{33} = -\sin t\cos t + \frac{\cos t(1-\cos^2 t)}{\sin t} - 1 + \cos t = -\sin t\cos t + \cos t\sin t - 1 + \cos t$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{a}_{33} = \cos t - 1 \quad , \quad \tilde{b}_3 = \frac{\cos t(1-\cos t)}{\sin t}$$

Also erhalten wir für $t \neq k\pi$

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sin t & 1+\sin t & 0 \\ 0 & -\sin^2 t & \cos t(1+\cos t)-\sin t & \cos t \\ 0 & 0 & \cos t - 1 & \dfrac{\cos t(1-\cos t)}{\sin t} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ eindeutig lösbar, falls $\sin^2 t(\cos t - 1) \neq 0$, also falls $t \neq k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
In diesem Fall gilt:

$$\Rightarrow \quad z = -\frac{\cos t}{\sin t} \quad , \quad y = \frac{-1}{\sin^2 t}\left(\cos t + \frac{\cos^2 t(1+\cos t)}{\sin t} - \cos t\right) = -\frac{\cos^2 t(1+\cos t)}{\sin t(1-\cos^2 t)}$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{\cos^2 t}{\sin t(1-\cos t)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\cos t(1+\sin t)}{\sin t} + \frac{\cos^2 t}{1-\cos t} = \frac{\cos t(1+\sin t) - \cos^2 t(1+\sin t) + \cos^2 t\sin t}{\sin t(1-\cos t)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\cos t(1+\sin t-\cos t)}{\sin t(1-\cos t)}$$

Für $\underline{t = k\pi}$ erhält man aus $(*)$:

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k+1 & (-1)^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Für $\underline{t = 2k\pi}$ erhält man hieraus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad z = 1/2 \;\;,\;\; y = \alpha \;\;,\;\; x = -1/2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\;,\; (\alpha \in I\!R)$$

Für $\underline{t = (2k+1)\pi}$ erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ nicht lösbar, da $rang A \neq rang(A|\vec{b})$.

2.Lösungsmöglichkeit: *Cramer-Regel*

Da $n \leq 3$, (also n nicht zu groß), kann man in den Fällen, in denen das GLS eindeutig lösbar ist, auch die Cramer-Regel benutzen.

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \sin t & 0 & 1+\cos t \\ 1 & \sin t & 1+\sin t \\ \cos t & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$
$$= \sin t(\sin t \cos t - \sin t(1+\sin t)) + (1+\cos t)(\sin t - \sin t \cos t)$$
$$= \sin t(\sin t \cos t - \sin t - \sin^2 t + (1+\cos t)(1-\cos t))$$
$$= \sin t(\sin t \cos t - \sin t) = \sin^2 t(\cos t - 1)$$

$\det A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin t = 0$ oder $\cos t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = k\pi \;,\; k \in Z\!\!\!Z$

Also gilt: Das GLS ist eindeutig lösbar für $t \neq k\pi \;,\; k \in Z\!\!\!Z$.
In diesem Fall gilt nach der Cramer-Regel:

$$x = \frac{1}{\sin^2 t(\cos t - 1)} \det \begin{pmatrix} \cos t & 0 & 1+\cos t \\ 0 & \sin t & 1+\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \frac{\cos t(\sin t \cos t - \sin t - \sin^2 t)}{\sin^2 t(\cos t - 1)}$$
$$= \frac{\cos t \sin t(\cos t - 1 - \sin t)}{\sin^2 t(\cos t - 1)} = \frac{\cos t(\cos t - 1 - \sin t)}{\sin t(\cos t - 1)}$$

$$y = \frac{1}{\sin^2 t(\cos t - 1)} \det \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & 1+\cos t \\ 1 & 0 & 1+\sin t \\ \cos t & 0 & \cos t \end{pmatrix} = \frac{-\cos t(\cos t - \cos t - \sin t \cos t)}{\sin^2 t(\cos t - 1)}$$
$$= \frac{\cos^2 t}{\sin t(\cos t - 1)}$$

$$z = \frac{1}{\sin^2 t(\cos t - 1)} \det \begin{pmatrix} \sin t & 0 & \cos t \\ 1 & \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t & 0 \end{pmatrix} = \frac{\cos t(\sin t - \sin t \cos t)}{\sin^2 t(\cos t - 1)}$$
$$= -\frac{\cos t}{\sin t}$$

Für $t = k\pi$ erhält man die erweiterte Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1+(-1)^k & (-1)^k \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ (-1)^k & 0 & (-1)^k & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+(-1)^k & (-1)^k \\ (-1)^k & 0 & (-1)^k & 0 \end{array}\right)$$

(1. und 2.Zeile vertauschen)

Für $t = 2k\pi$ erhält man hieraus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(3.Zeile $-$ 1.Zeile)

$$\Rightarrow \quad z = 1/2 \ , \quad y = \alpha \ , \quad x = -1/2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \ (\alpha \in I\!R)$$

Für $t = (2k+1)\pi$ erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(3.Zeile + 1.Zeile)

$\Rightarrow$ nicht lösbar, da $rang A \neq rang(A|\vec{b})$.

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ (reell) symmetrisch $\Rightarrow$ alle EW sind reell, EV zu verschiedenen EW stehen senkrecht aufeinander $\Rightarrow$ die Transformationsmatrix C kann orthogonal gewählt werden.

Berechnung der EW

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 2 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 2 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2-2\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

(3.Zeile +2 *2.Zeile) (2.Spalte -2 *3.Spalte)

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -5 & 2 \\ -1 & -\lambda-4 & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda(\lambda+4)-5) = (1-\lambda)(\lambda^2+4\lambda-5) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+5)$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1$ ist doppelter EW, $\quad \lambda_2 = -5$ ist einfacher EW

Berechnung der EV

EV zu $\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2\beta - \alpha \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ sind die EV zu $\lambda_1 = 1$

z.B. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist EV , $\left\langle \begin{pmatrix} 2\beta-\alpha \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ liefert einen EV zu $\lambda_1 = 1$, der senkrecht auf $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ steht.

Also $\alpha - 2\beta + \alpha = 2\alpha - 2\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta \quad \Rightarrow$ (z.B. für $\beta = 1$) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV zu $\lambda_1 = 1$ und steht senkrecht auf $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

EV zu $\lambda_2 = -5$: $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gauß-Algorithmus liefert:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 24 & 12 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$, $\alpha \neq 0$, sind die EV zu $\lambda_2 = -5$

$$\Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Hiermit gilt:

$$C^T A C = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Für A^n erhalten wir: $A^n = C D^n C^T$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & (-5)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ (-5)^n & (-5)^n & -2(-5)^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5+(-5)^n & -1+(-5)^n & 2-2(-5)^n \\ -1+(-5)^n & 5+(-5)^n & 2-2(-5)^n \\ 2-2(-5)^n & 2-2(-5)^n & 2+4(-5)^n \end{pmatrix}$$

3. $f(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \Rightarrow$

$$T_{f,n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

$g(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$, $g'(x) = (\cos x)\mathrm{e}^{\sin x}$, $g''(x) = (-\sin x + \cos^2 x)\mathrm{e}^{\sin x}$

$$g'''(x) = (-\cos x - 2\sin x\cos x - \sin x\cos x + \cos^3 x)\mathrm{e}^{\sin x}$$
$$= \cos x(\cos^2 x - 1 - 3\sin x)\mathrm{e}^{\sin x}$$
$$\Rightarrow \quad g(0) = 1 \ , \ g'(0) = 1 \ , \ g''(0) = 1 \ , \ g'''(0) = 0 \neq f'''(0) = 1$$
$$\Rightarrow \quad T(x) = T_{g,2,0}(x) = T_{f,2,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$
Restglieder: $R_f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^\xi}{6}x^3 \quad , \quad R_g(x) = \dfrac{\cos\eta(\cos^2\eta - 1 - 3\sin\eta)\mathrm{e}^{\sin\eta}}{6}x^3$

$$\max_{|x|\le\pi/4} |\mathrm{e}^x - T(x)| \le \frac{1}{6}\max_{|x|\le\pi/4}|\mathrm{e}^x|(\frac{\pi}{4})^3 = \frac{\mathrm{e}^{\pi/4}(\frac{\pi}{4})^3}{6} \le \frac{\mathrm{e}\cdot\pi^3}{384} < 0.22$$
$$\max_{|x|\le\pi/4} |\mathrm{e}^{\sin x} - T(x)| \le \frac{1}{6}\cdot 1\cdot \mathrm{e}^{1/\sqrt{2}}\cdot(\frac{\pi}{4})^3 \max_{|x|\le\pi/4}|\cos^2 x - 1 - 3\sin x|$$
$$\le \frac{\mathrm{e}^{1/\sqrt{2}}\pi^3}{384}(\frac{1}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}) < 0.58$$
denn: $h(x) = \cos^2 x - 1 - 3\sin x$

$h'(x) = -2\cos x\sin x - 3\cos x = -\cos x(2\sin x + 3) \quad \Rightarrow \quad h'(x) < 0 \ \ \forall |x| \le \pi/4$

$\Rightarrow \quad h$ ist streng monoton fallend in $[-\pi/4, \pi/4]$

$$|h(\pi/4)| = |\frac{1}{2} - 1 - \frac{3}{\sqrt{2}}| = \frac{1}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}} \quad , \quad |h(-\pi/4)| = |\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{\sqrt{2}}| = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} < |h(\pi/4)|$$

4. a) $f(x) = \arcsin x \quad \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-1)^n x^{2n} \quad \text{für} \quad |x| < 1$$
(vgl. Skript S.174)
$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-1)^n\int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad , \quad |x| < 1$$
Mit $a_n = \dbinom{-1/2}{n}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ gilt:
$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{(-1/2)(-1/2-1)\dots(-1/2-n)n!(2n+1)x^{2n+3}}{(-1/2)(-1/2-1)\dots(-1/2-n+1)(n+1)!(2n+3)x^{2n+1}}|$$
$$= |\frac{(-1/2-n)(2n+1)}{(n+1)(2n+3)}|x^2 = \frac{(2n+1)(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)}x^2 \le x^2$$
Für $|x| \le 1/2$ gilt also: $\quad |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| \le \dfrac{1}{4} = q$
$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{n=0}^{n_0}\binom{-1/2}{n}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R$$
mit $|R| \le |a_{n_0}|\dfrac{q}{1-q} \le \dfrac{1}{3}|\dbinom{-1/2}{n_0}|\dfrac{1}{2n_0+1}\cdot\dfrac{1}{2^{2n_0+1}}$ (vgl. Skript S.107)

Es gilt:
$$\binom{-1/2}{0} = 1 \ , \ \binom{-1/2}{1} = -\frac{1}{2} \ , \ \binom{-1/2}{2} = \frac{(-1/2)(-1/2-1)}{2!} = \frac{3}{8} \ ,$$
$$\binom{-1/2}{3} = \frac{(-1/2)(-1/2-1)(-1/2-2)}{3!} = -\frac{5}{16}$$

Für $n_0 = 3$ gilt: $|R| \le \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} \le 0.00012 < 5 \cdot 10^{-4}$

$\Rightarrow \quad f(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + R \quad$ mit $|R| < 5 \cdot 10^{-4}$ für $|x| \le 1/2$

b) $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n} \quad$ für $|x| < 1$

(vgl. Skript S.174)

$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} x^{2n} + R \quad$ (alternierende Reihe)

mit $|R| \le \frac{1}{2(n_0+1)} \cdot \frac{1}{2^{2(n_0+1)}} \quad$ für $|x| \le 1/2$

Für $n_0 = 3$ gilt: $|R| \le \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^8} \le 0.00049 < 5 \cdot 10^{-4} \quad$ für $|x| \le 1/2$

$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + R \quad$ mit $|R| \le 5 \cdot 10^{-4}$ für $|x| \le 1/2$

5. $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt \quad , \quad f(0) = 0$

Da $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad \Rightarrow \quad$ der Integrand ist stetig in $\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad$ die Funktion f ist definiert in ganz $\mathbb{R}$.

Es gilt: $f'(x) = \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \frac{x^7}{7!7} + \ldots$

Symmetrie

$f(-x) = \int_0^{-x} \frac{\sin t}{t}\, dt = -\int_0^x \frac{\sin(-s)}{-s}\, ds = -\int_0^x \frac{\sin s}{s}\, ds = -f(x)$

(Substitution $s = -t$, $ds = -dt$)

$\Rightarrow \quad f$ ist ungerade Funktion

Wir können uns also auf den Bereich $(0, \infty)$ beschränken:

Extrema, Monotonieverhalten

$f'(x) = \frac{\sin x}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \quad , \quad f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \quad , \ (x \neq 0), \quad , \quad f''(0) = 0$

$\Rightarrow \quad f''(k\pi) = \frac{(-1)^k}{k\pi} \quad \Rightarrow \quad f''(2k\pi) > 0 \ , \ f''((2k+1)\pi) < 0$

$\Rightarrow$ relative Maxima bei $x = (2k+1)\pi \quad , \quad k \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow$ relative Minima bei $x = 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{N}$

f monoton wachsend in $(-\pi, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, ...

f monoton fallend in $(\pi, 2\pi)$, $(3\pi, 4\pi)$, ...

Wendepunkte

$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\cos x = \sin x \;\; , \; (x \neq 0)$ oder $x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = x$ oder $x = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x_1 = 0 \; , \; x_2 \in (\pi, 3\pi/2) \; , \; \ldots$

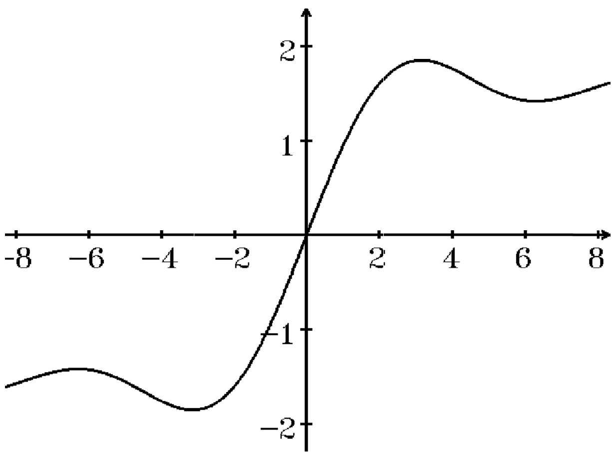
Die kleinste positive Extremstelle ist $x_0 = \pi$

$f(\pi) = \pi - \dfrac{\pi^3}{3!3} + \dfrac{\pi^5}{5!5} - \dfrac{\pi^7}{7!7} + R = 1.843 + R$ (alternierende Reihe)

mit $|R| \leq \dfrac{\pi^9}{9!9} \leq 0.0092 < 10^{-2}$

Andere Funktionswerte werden besser mit Hilfe der Simpson-Regel berechnet, z.B.: $f(2\pi) = 1.418\ldots$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} = 1.5708\ldots$ (später)



6. a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \ln(1+x)}{\sin x \ln(1+x)} \qquad „(\dfrac{0}{0})“$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \frac{1}{1+x}}{\cos x \ln(1+x) + \frac{\sin x}{1+x}} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\cos x - 1}{(1+x)\cos x \ln(1+x) + \sin x} \qquad „(\frac{0}{0})“$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - (1+x)\sin x}{\cos x \ln(1+x) - (1+x)\sin x \ln(1+x) + 2\cos x} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln(\sin x) - \ln x}{x^2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$

denn: $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln(\sin x) - \ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x\cos x - \sin x}{2x^2 \sin x}$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{4x\sin x + 2x^2\cos x} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\sin x}{4\sin x + 2x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-\cos x}{6\cos x - 2x\sin x} = -\frac{1}{6}$$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\arctan(x^2)}{x^2\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x^2)}{x^2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}\cdot\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}\cdot\lim_{u\to 0}\frac{\arctan u}{u}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}\cdot\lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{1}{1+u}}\cdot\lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{1+u^2}}{1}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2}(x-t)\mathrm{e}^{\sin t}\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}\quad\text{mit}$

$\displaystyle f(x)=\int_0^{x^2}(x-t)\mathrm{e}^{\sin t}\,dt\ \ ,\ f(0)=0\quad ,\quad g(x)=x^3\ \ ,\ g(0)=0$

$\displaystyle f'(x)=\int_0^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}(x-t)\mathrm{e}^{\sin t}\,dt+(x-t)\mathrm{e}^{\sin t}\Big]_{t=x^2}\cdot 2x$

$\displaystyle\quad=\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{\sin t}\,dt+2x^2(1-x)\mathrm{e}^{\sin(x^2)}\quad ,\quad f'(0)=0$

$g'(x)=3x^2\ \ ,\ \ g'(0)=0$

$f''(x)=\mathrm{e}^{\sin(x^2)}\cdot 2x+4x(1-x)\mathrm{e}^{\sin(x^2)}-2x^2\mathrm{e}^{\sin(x^2)}+2x^2(1-x)2x\cos(x^2)\mathrm{e}^{\sin(x^2)}$

$g''(x)=6x$

$\displaystyle\Rightarrow\quad\frac{f''(x)}{g''(x)}=\frac{2\mathrm{e}^{\sin(x^2)}+4(1-x)\mathrm{e}^{\sin(x^2)}}{6}+x[\ \dots\ ]\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\frac{2+4}{6}=1$

$\displaystyle\Rightarrow\quad\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=1$

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\mathrm{e}^{2x}-16\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^{2x}+4)(\mathrm{e}^x+2)^2}\,dx=\int_0^{\infty}\frac{4t-16}{(t^2+4)(t+2)^2}\,dt$

(Substitution $\ t=\mathrm{e}^x\ ,\ dt=\mathrm{e}^x dx$)

Konvergenzbeweis

$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{4t-16}{(t^2+4)(t+2)^2}\,dt=\int_0^{1}\frac{4t-16}{(t^2+4)(t+2)^2}\,dt+\int_1^{\infty}\frac{4t-16}{(t^2+4)(t+2)^2}\,dt$

Das erste Integral ist ein eigentliches Integral, da der Integrand in $[0,1]$ stetig; für das zweite Integral benutzen wir die Vergleichsfunktion $\ g(t)=\dfrac{1}{t^3}$, dann gilt:

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{4t^4-16t^3}{(t^2+4)(t+2)^2}=4\quad\text{und}\quad\int_1^{\infty}\frac{1}{t^3}\,dt\ \text{ ist konvergent}$

$\displaystyle\Rightarrow\quad\int_1^{\infty}\frac{4t-16}{(t^2+4)(t+2)^2}\,dt\quad\text{ist konvergent, also auch}\quad\int_0^{\infty}\frac{4t-16}{(t^2+4)(t+2)^2}\,dt.$

Berechnung des Integrals

Partialbruchzerlegung ergibt:

$\displaystyle\frac{4t-16}{(t^2+4)(t+2)^2}=\frac{a}{t+2}+\frac{b}{(t+2)^2}+\frac{ct+d}{t^2+4}$

$\Rightarrow\quad 4t-16=a(t+2)(t^2+4)+b(t^2+4)+(ct+d)(t^2+4t+4)$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$a+c=0\ ,\ 2a+b+4c+d=0\ ,\ 4a+4c+4d=4\ ,\ 8a+4b+4d=-16$
$\Rightarrow\ c=-a\ ,\ d=1\ ,\ b=-1+2a\ ,\ 16a=-16\ \Rightarrow\ a=-1\ ,\ c=1\ ,\ b=-3$

$$\int_0^\infty \frac{4t-16}{(t^2+4)(t+2)^2}\ dt = -\int_0^\infty \frac{1}{t+2}\ dt - 3\int_0^\infty \frac{1}{(t+2)^2}\ dt + \int_0^\infty \frac{t+1}{t^2+4}\ dt$$
$$= (-\ln(t+2) + \frac{3}{t+2} + \frac{1}{2}\ln(t^2+4) + \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2})\Big]_0^\infty$$
$$= (\ln\frac{\sqrt{t^2+4}}{t+2} + \frac{3}{t+2} + \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2})\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}$$

8. $y' + \dfrac{2-\sin^2 x}{\sin x\cos x}y = 2\sin x\cos x \quad , \quad y(\dfrac{\pi}{4}) = 0$

Lineare DGL 1.Ordnung, $a(x) = \dfrac{2-\sin^2 x}{\sin x\cos x}$, $f(x) = 2\sin x\cos x$,

a, f stetig in $(0,\pi/2)$ $\Rightarrow$ AWA eindeutig lösbar in $(0,\pi/2)$

homogen:

$y_1(x) = \mathrm{e}^{-\int a(x)\ dx}$ (vgl. Skript S.236)

$$\int a(x)\ dx = \int \frac{2-\sin^2 x}{\sin x\cos x}\ dx = 2\int \frac{1}{\sin x\cos x}\ dx - \int \frac{\sin x}{\cos x}\ dx$$
$$= 2\int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}\ dx + \ln(\cos x)\ \ ,\ \ (x\in(0,\pi/2)),$$
$$= 2\ln(\tan x) + \ln(\cos x) = \ln(\tan^2 x\cos x) = \ln(\frac{\sin^2 x}{\cos x})$$

$\Rightarrow\ \ y_1(x) = \mathrm{e}^{-\ln(\frac{\sin^2 x}{\cos x})} = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

$\Rightarrow\ \ y_h(x) = c\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$, $c\in I\!R$, ist allgemeine Lösung der homogenen DGL

partikulär:

$y_0(x) = c(x)y_1(x)$ ist partikuläre Lösung der DGL mit

$y_1(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ und $c(x) = \displaystyle\int \frac{f(x)}{y_1(x)}\ dx$ (vgl. Skript S.237)

$$c(x) = \int \frac{2\sin x\cos x}{\frac{\cos x}{\sin^2 x}}\ dx = \int 2\sin^3 x\ dx = \int (\frac{3}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin 3x)\ dx$$
$$= -\frac{3}{2}\cos x + \frac{1}{6}\cos 3x = -\frac{3}{2}\cos x + \frac{1}{6}(4\cos^3 x - 3\cos x) = -2\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x$$

$\Rightarrow\ \ y_0(x) = -2\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\cos^4 x}{\sin^2 x}$ ist partikuläre Lösung.

$\Rightarrow\ \ y(x) = c\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} - 2\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\cos^4 x}{\sin^2 x}$, $c\in I\!R$, ist allgemeine Lösung in $(0,\pi/2)$.

Anfangsbedingung:

$y(\dfrac{\pi}{4}) = c\sqrt{2} - 2 + \dfrac{1}{3} = 0 \ \ \Rightarrow\ \ c = \dfrac{5}{3\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{5}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2\cot^2 x + \frac{2}{3}\cot^2 x \cos^2 x \quad \text{ist die gesuchte Lösung.}$$

9. a) $y'' + y = \sin^3 x + (1+x)e^{2x} \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0.$

Lineare DGL 2.Ordnung, inhomogen, mit konstanten Koeffizienten,

rechte Seite: $f(x) = \sin^3 x + (1+x)e^{2x} = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x + (1+x)e^{2x}$ stetig in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ AWA ist eindeutig lösbar.

homogen: Charakteristische Gleichung:

$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i \quad \Rightarrow \quad e^{\pm ix} = \cos x \pm \sin x \quad \Rightarrow$

$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, $(c_i \in \mathbb{R})$, ist allgemeine Lösung der homogenen DGL.

partikulär: Superpositionsprinzip:

Komplexer Ansatz für $\frac{3}{4}\sin x = Im(\frac{3}{4}e^{ix})$:

$w_0(x) = axe^{ix}$ (einfache Resonanz)

$w_0'(x) = a(1+ix)e^{ix}$, $w_0''(x) = a(2i - x)e^{ix}$

Einsetzen und Division durch e^{ix} ergibt:

$a(2i - x + x) = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{8i} = -\frac{3}{8}i$

$y_{0,1}(x) = Im(w_0(x)) = -\frac{3}{8}Im(ix(\cos x + i\sin x)) = -\frac{3}{8}x\cos x$

Komplexer Ansatz für $-\frac{1}{4}\sin 3x = Im(-\frac{1}{4}e^{3ix})$:

$w_0(x) = ae^{3ix}$ (keine Resonanz)

$w_0'(x) = 3iae^{3ix}$, $w_0''(x) = -9ae^{3ix}$

Einsetzen und Division durch e^{3ix} ergibt:

$a(-9+1) = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{32}$

$y_{0,2}(x) = Im(w_0(x)) = \frac{1}{32}Im(\cos 3x + i\sin 3x) = \frac{1}{32}\sin 3x$

Ansatz für $(1+x)e^{2x}$:

$y_{0,3}(x) = (a + bx)e^{2x}$ (keine Resonanz)

$y_{0,3}'(x) = (b + 2a + 2bx)e^{2x}$, $y_{0,3}''(x) = (2b + 2b + 4a + 4bx)e^{2x} = (4b + 4a + 4bx)e^{2x}$

Einsetzen und Division durch e^{2x} ergibt:

$4b + 4a + 4bx + a + bx = 1 + x \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{5}$, $a = \frac{1}{5}(1 - \frac{4}{5}) = \frac{1}{25} \quad \Rightarrow$

$y_{0,3}(x) = \frac{1}{25}(1+5x)e^{2x}$

$y_0(x) = -\frac{3}{8}x\cos x + \frac{1}{32}\sin 3x + \frac{1}{25}(1+5x)e^{2x}$ ist partikuläre Lösung

$y(x) = c_1\cos x + c_2 \sin x - \frac{3}{8}x\cos x + \frac{1}{32}\sin 3x + \frac{1}{25}(1+5x)e^{2x}$, $(c_i \in \mathbb{R})$, ist allgemeine Lösung der gegebenen DGL.

Anfangsbedingung:

$y(0) = c_1 + \frac{1}{25} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{25}$

$y'(0) = c_2 - \frac{3}{8} + \frac{3}{32} + \frac{1}{25}(5+2) = c_2 - \frac{9}{32} + \frac{7}{25} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{9}{32} - \frac{7}{25} = \frac{1}{800}$

$y(x) = -\frac{1}{25}\cos x + \frac{1}{800}\sin x - \frac{3}{8}x\cos x + \frac{1}{32}\sin 3x + \frac{1}{25}(1+5x)e^{2x}$ ist die gesuchte Lösung in $\mathbb{R}$.

b) $y^{(9)} + y = x^2 e^x$

Ansatz für partikuläre Lösung:

$y_0(x) = v(x)e^x$ mit $v(x) = a + bx + cx^2$ (keine Resonanz)

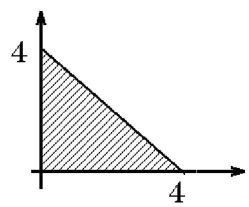
$$y_0^{(9)}(x) + y_0(x) = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} v^{(k)}(x)(e^x)^{(9-k)} + v(x)e^x$$
$$= (v(x) + 9v'(x) + \binom{9}{2} v''(x))e^x + v(x)e^x$$
$$= (a + bx + cx^2 + 9(b + 2cx) + 36(2c) + a + bx + cx^2)e^x$$
$$= ((2a + 9b + 72c) + (2b + 18c)x + 2cx^2)e^x = x^2 e^x$$

$\Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}\ ,\ b = -\frac{9}{2}\ ,\ a = \frac{9}{4}$

$\Rightarrow \quad y_0(x) = \frac{1}{4}(9 - 18x + 2x^2)e^x$ ist partikuläre Lösung.

10. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

$M = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ :\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ x + y \leq 4\}$



M ist kompakt (dh. abgeschlossen und beschränkt),
und f ist stetig auf M

$\Rightarrow$ f nimmt ihr absolutes Maximum und Minimum in M an.

Inneres von M: gesucht: relative Extrema

notwendige Bedingung:

$f_x = 3x^2 - 3y = 0 \ ,\ f_y = 3y^2 - 3x = 0 \ \Rightarrow\ x = y^2 \ \Rightarrow$

$y^4 = y \ \Rightarrow\ y = 0$ oder $y^3 = 1 \ \Rightarrow\ y = 0$ oder $y = 1 \ \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind mögliche Extremstellen, wobei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht im Innern von M, sondern auf dem Rand von M liegt (vgl. Rand von M, unten)

hinreichendes Kriterium:

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

$A(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ ist positiv definit, da $a_{11} = 6 > 0$, $\det A = 36 - 9 > 0$

$\Rightarrow$ f hat relatives Minimum in $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $f(1,1) = -1$

Ränder von M:

1.Rand: $x = 0 \ \Rightarrow\ f(0,y) = y^3$ (monoton wachsend) ,
also: Minimum für $y = 0$ mit $f(0,0) = 0$, Maximum für $y = 4$ mit

$f(0,4)=4^3=64$

2.Rand: $\quad y=0 \quad \Rightarrow \quad f(x,0)=x^3$ (monoton wachsend) ,
also: Minimum für $x=0$ mit $f(0,0)=0$, Maximum für $x=4$ mit $f(4,0)=4^3=64$

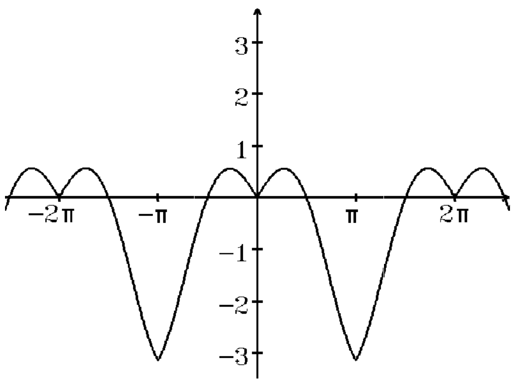
3.Rand: $\quad g(x,y)=x+y-4=0$ (Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung)
Hilfsfunktion: $\quad \varphi(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$
notwendige Bedingung:
$\varphi_x=3x^2-3y+\lambda=0$
$\varphi_y=3y^2-3x+\lambda=0$
$\varphi_\lambda=x+y-4=0$

$1.-2.$Gleichung $\Rightarrow \quad 3(x^2-y^2)-3(y-x)=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-y^2=y-x$
$\Rightarrow \quad (x-y)(x+y)=y-x \quad \Rightarrow \quad x=y$ oder $x+y=-1$
1.Fall: $x=y \quad \Rightarrow$ (Nebenbedingung) $x=y=2$
2.Fall: $x+y=-1 \quad \Rightarrow$ Nebenbedingung ist nicht erfüllt
$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ ist einzige mögliche Extremstelle mit $f(2,2)=4$

Also mögliche Stellen für absolute Extrema:
$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ mit $f(1,1)=-1$, $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ mit $f(0,0)=0$, $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ mit $f(2,2)=4$
$\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ mit $f(4,0)=64$, $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ mit $f(0,4)=64$

$\Rightarrow \quad f$ hat absolutes Minimum in $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ mit $f(1,1)=-1$,
und absolutes Maximum in $\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ mit $f(4,0)=f(0,4)=64$

11. $f(x)=|x|\cos x \quad , \quad |x|\le\pi$



f ist gerade Funktion $\Rightarrow \quad b_k=0 \quad \forall k\in I\!N$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos x\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x(\cos(k+1)x+\cos(k-1)x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} x(\frac{\sin(k+1)x}{k+1} + \frac{\sin(k-1)x}{k-1})\Big]_0^\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\frac{\sin(k+1)x}{k+1} + \frac{\sin(k-1)x}{k-1})\ dx$$

(falls $k \neq 1$)

$$= \frac{1}{\pi}(\frac{\cos(k+1)x}{(k+1)^2} + \frac{\cos(k-1)x}{(k-1)^2})\Big]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}(\frac{(-1)^{k+1}-1}{(k+1)^2} + \frac{(-1)^{k+1}-1}{(k-1)^2})$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{,falls } k \text{ ungerade, } k \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi}(\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k-1)^2}) & \text{,falls } k \text{ gerade} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{,falls } k \text{ ungerade, } k \neq 1 \\ -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{k^2+1}{(k^2-1)^2} & \text{,falls } k \text{ gerade} \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x(\cos 2x + 1)\ dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x \sin 2x}{2}\Big]_0^\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin 2x}{2}\ dx + \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos 2x}{4}\Big]_0^\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad s(x) = -\frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}\cos x - \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^\infty \frac{4l^2+1}{(4l^2-1)^2}\cos 2lx$$

ist die gesuchte Fourierreihe.
Da f *stetig* und *stückweise glatt* in $I\!R$ $\Rightarrow$ $f(x) = s(x)$ $\forall x \in I\!R$ (mit gleichmäßiger Konvergenz in $I\!R$)

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad f(\frac{\pi}{2}) = 0 = -\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^\infty \frac{4l^2+1}{(4l^2-1)^2}(-1)^l$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{l=1}^\infty \frac{4l^2+1}{(4l^2-1)^2}(-1)^{l+1} = \frac{1}{2}$$

12. a) α) $\quad f(t) = t^3 e^{2t} \sin \omega t$
f ist Originalfunktion, da f stetig in $[0,\infty)$ und höchstens exponentiell wachsend.

$$L(t^3)(x) = \frac{3!}{x^4} \quad \Rightarrow \quad L(t^3 e^{(2+i\omega)t})(x) = \frac{3!}{(x-2-i\omega)^4} = \frac{6(x-2+i\omega)^4}{((x-2)^2+\omega^2)^4}$$

$$= \frac{6((x-2)^4 + 4i\omega(x-2)^3 + 6i^2\omega^2(x-2)^2 + 4i^3\omega^3(x-2) + i^4\omega^4)}{((x-2)^2+\omega^2)^4}$$

$$\Rightarrow \quad L(t^3 e^{2t}\sin \omega t)(x) = Im(L(t^3 e^{(2+i\omega)t})(x)) = \frac{24\omega(x-2)^3 - 24\omega^3(x-2)}{((x-2)^2+\omega^2)^4}$$

β) $\quad f(t) = \dfrac{\sin t \cosh t}{t}$

$\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} \cdot \lim\limits_{t\to 0}\cosh t = 1 \quad \Rightarrow$
f ist stetig in $[0,\infty)$ und höchstens exponentiell wachsend
$\Rightarrow \quad f$ ist Originalfunktion.
$L(tf(t))(x) = L(\sin t \cosh t)(x) = \frac{1}{2}(L(e^t \sin t)(x) + L(e^{-t}\sin t)(x))$

$= \frac{1}{2}(\frac{1}{(x-1)^2+1} + \frac{1}{(x+1)^2+1})$

Da $L(tf(t)) = -L'(f(t)) \quad \Rightarrow$

$L'(f(t))(x) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{(x-1)^2+1} + \frac{1}{(x+1)^2+1}) \quad \Rightarrow$

$L(f(t))(x) = -\frac{1}{2}(\int \frac{1}{(x-1)^2+1}\ dx + \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\ dx)$

$= -\frac{1}{2}(\arctan(x-1) + \arctan(x+1)) + c$

Da $\lim\limits_{x\to\infty} L(f(t))(x) = -\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) + c = -\frac{\pi}{2} + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow$

$L(f(t))(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\arctan(x-1) + \arctan(x+1))$

b) $\ y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^t \sin t \ \ , \ \ y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 1$

Anwendung der Laplace-Transformation auf diese DGL ergibt:

$(x^2 L(y) - xy(0) - y'(0)) - 2(xL(y) - y(0)) + 2L(y) = \frac{1}{(x-1)^2+1}$

Mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ folgt hieraus:

$(x^2 - 2x + 2)L(y) = 1 + \frac{1}{(x-1)^2+1} \quad \Rightarrow$

$L(y) = \frac{1}{(x-1)^2+1} + \frac{1}{((x-1)^2+1)^2}$

$y(t) = L^{-1}(\frac{1}{(x-1)^2+1}) + L^{-1}(\frac{1}{((x-1)^2+1)^2})$

$\Rightarrow \quad y(t) = \mathrm{e}^t \sin t + (\mathrm{e}^t \sin t) * (\mathrm{e}^t \sin t)$

Es gilt:

$(\mathrm{e}^t \sin t) * (\mathrm{e}^t \sin t) = \int_0^t \mathrm{e}^{t-u} \sin(t-u) \mathrm{e}^u \sin u\ du$

$= \mathrm{e}^t \int_0^t \sin(t-u) \sin u\ du = \frac{\mathrm{e}^t}{2} \int_0^t (\cos(t-2u) - \cos t)\ du$

$= \frac{\mathrm{e}^t}{2}(\frac{\sin(t-2u)}{-2}\Big]_{u=0}^{t} - t\cos t) = \frac{\mathrm{e}^t}{2}(\frac{\sin t}{2} - \frac{\sin(-t)}{2} - t\cos t)$

$= \frac{\mathrm{e}^t}{2}(\sin t - t\cos t)$

$\Rightarrow \quad y(t) = \mathrm{e}^t \sin t + \frac{\mathrm{e}^t}{2}(\sin t - t\cos t) = \frac{1}{2}(3\sin t - t\cos t)\mathrm{e}^t$ ist die gesuchte Lösung.

Zusatzaufgaben I/II

1. Beurteilen Sie für alle $t \in I\!R$ die Lösbarkeit des Gleichungssystems (GLS)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2t \\ 2 & 2 & t & 0 \\ -1 & t & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie in allen Fällen, in denen das GLS lösbar ist, die allgemeine Lösung.

2. Gegen sei die Matrix $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ t & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie für alle $t \in I\!R$, für die die Matrix regulär ist, die inverse Matrix A^{-1}.

b) Bestimmen Sie für alle $t \in I\!R$, für die das Gleichungssystem (GLS) $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $\vec{b} = (1,2,2)^T$ lösbar ist, alle Lösungen dieses GLS.

3. Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der beiden Matrizen

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Prüfen Sie nach, ob die Matrizen A diagonalisierbar sind, und berechnen Sie ggf. die Matrizen C und D, so daß $C^{-1}AC = D$ gilt.

4. Berechnen Sie alle Eigenwerte, Eigenvektoren und alle Potenzen A^n , $(n \in I\!N)$, der Matrix $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Existiert die inverse Matrix A^{-1} ?

5. a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_{3,0}(x)$, (um $x_0 = 0$, vom Grad ≤ 3) , der Funktion $f(x) = \ln\sqrt{\cosh x}$.
Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für $\max\limits_{|x|\leq 1/2} |f(x) - T_{3,0}(x)|$ an.

b) Berechnen Sie – *ohne* Benutzung einer Formelsammlung – das Integral
$$\int_0^\infty \frac{1}{\cosh x}\, dx \ .$$

6. Gegeben sei die Funktion $f : (-1, \infty) \to I\!R$ mit $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_{3,0}(x)$, (um $x_0 = 0$, vom Grad ≤ 3) .

a) mit Hilfe von Ableitungen,

b) mit Hilfe bekannter Potenzreihen.

c) Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für $\max\limits_{|x| \leq 1/4} |f(x) - T_{3,0}(x)|$ an.

7. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{(1 - \cos x)\sin x}{x^3}$, falls $x \neq 0$, und $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

a) Zeigen Sie, daß das Intergral $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\, dx$ konvergiert.

b) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$.

c) Berechnen Sie mit Hilfe der Taylorreihe von f um $x_0 = 0$ näherungsweise (bis auf einen Fehler $< 5 \cdot 10^{-4}$) das Integral $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

8. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cosh x)}{\ln(\cosh 5x)}$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{e^x - 1}\right)^{1/x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \ln(1 + x^2)}{(\sinh^2 x)(e^x - 1)^2}$ *d)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x \frac{t^2(x-t)^2}{e^t - 1}\, dt$.

9. Gegeben seien die beiden uneigentlichen Integrale

$\alpha)$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\, dx$, $\beta)$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^4}\, dx$.

a) Zeigen Sie – ohne Benutzung von Stammfunktionen – die Konvergenz der Integrale.

b) Berechnen Sie die Werte der Integrale.

10. Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$y'' - 2y' + y = 2\sinh x$, $y(0) = y'(0) = 0$,

a) mit Hilfe von Ansätzen,

b) mit Hilfe der Laplace-Transformation.

11. Bestimmen Sie alle Lösungen der DGL

$y''' - 5y'' + 3y' + 9y = e^{-x} + \sin^2 x$,

die für $x \to \infty$ beschränkt bleiben, und für die $y(0) = 0$ gilt.

12. Berechnen Sie die absoluten Extrema der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + yz + x$ in

$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;:\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 3 \right\}$.

Begründen Sie die Existenz der absoluten Extrema.

13. Berechnen Sie die absoluten Extrema der Funktion $f(x,y,z) = xy + z$ unter den Nebenbedingungen $x + y + z = 1$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Begründen Sie die Existenz der absoluten Extrema.

14. Die Funktion $g(x) = \sin^4 x$ für $0 \le x \le \pi$ werde so zu einer 2π-periodischen Funktion f fortgesetzt, daß die zugehörige Fourierreihe
a) nur aus cos- Gliedern,
b) nur aus sin- Gliedern besteht.

Berechnen Sie in beiden Fällen die Fourierreihe von f, und skizzieren Sie jeweils den Graphen der Funktion f.
Wo wird jeweils die Funktion f durch ihre Fourierreihe dargestellt ?
Berechnen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)((2k+1)^2-4)((2k+1)^2-16)}$.

15. Bestimmen Sie die Fourierreihe der 2π- periodischen Funktion f mit
$f(x) = (x + \sin x)^2$, falls $|x| \le \pi$.
Wo stellt die Fourierreihe die Funktion f dar ?
Skizzieren Sie die Funktion f.
Berechnen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2(k^2-1)}$.

16. a) Berechnen Sie die Laplace-Transformierten der beiden folgenden Funktionen:
α) $f(t) = t^2 \sinh t$, β) $f(t) = \dfrac{\sinh t}{t}$.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem
$y'' - y = \sinh t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,
mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Ergebnisse der Zusatzaufgaben I/II

1. Eindeutig lösbar für $t \neq \pm 2$,

$x = 1 \;,\; y = \dfrac{1-t}{2-t} \;,\; z = \dfrac{1}{2-t} \;,\; u = 0$

für $t = 2$: $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; (\alpha \in I\!R),$

für $t = -2$: $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;,\; (\alpha \in I\!R)$

2. A ist regulär für $t \neq 2, -1$

$$A^{-1} = \frac{1}{2(2-t)(1+t)} \begin{pmatrix} 2t & 2 & -2t \\ -4 & 2-2t & 4 \\ 4-t^2 & t-2 & t-2 \end{pmatrix}$$

Lösung des GLS für $t \neq 2, -1$: $\quad \vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \dfrac{1}{t+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t/2-1 \end{pmatrix}$

für $t = 2$: $\quad x = 1 - \alpha \;,\; y = \alpha \;,\; z = 0 \;,\; (\alpha \in I\!R)$

für $t = -1$: nicht lösbar.

3. a) $\lambda_1 = 1$ doppelter EW mit EV: $\begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \;,\; (\alpha, \beta) \neq (0,0)$

$\lambda_2 = 3$ einfacher EW mit EV: $\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;,\; \alpha \neq 0$

A ist diagonalisierbar mit $C^{-1}AC = D$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \;,\; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \;,\; C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\lambda_1 = 2 \quad$ 3-facher EW mit EV: $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; \alpha \neq 0$

A nicht diagonalisierbar, weil $\dim E_{\lambda=2} = 1 < 3 =$Vielfachheit$(\lambda = 2)$.

4. $\lambda_1 = 0$ einfacher EW mit EV: $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; \alpha \neq 0$

$\lambda_2 = 2$ einfacher EW mit EV: $\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \ \alpha \neq 0$

$\lambda_3 = 4$ doppelter EW mit EV: $\begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad , \ (\alpha, \beta) \neq (0,0)$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 2^n + 4^n & 0 & 2^n - 4^n \\ 4^n & 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 2^n - 4^n & 0 & 2^n + 4^n \end{pmatrix}$$

5. a) $T_{3,0}(x) = \frac{1}{4} x^2$

$\max\limits_{|x| \leq 1/2} |f(x) - T_{3,0}(x)| \leq \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \max\limits_{|x| \leq 1/2} |\frac{2\sinh^2 x - 1}{\cosh^4 x}| \leq 0.002605$

da $\max\limits_{|x| \leq 1/2} |\frac{2\sinh^2 x - 1}{\cosh^4 x}| \leq 1$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\cosh x} \, dx = \frac{\pi}{2}$

6. a) $T_{3,0}(x) = x - \frac{3}{2} x^2 + \frac{11}{6} x^3$

b) $\ln(1+x) \cdot \frac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1})(-1)^n x^{n+1} = x - \frac{3}{2} x^2 + \frac{11}{6} x^3 - \ldots \quad , \ |x| < 1$

c) $\max\limits_{|x| \leq 1/4} |f(x) - T_{3,0}(x)| \leq \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{4^4} \max\limits_{|x| \leq 1/4} |f^{(4)}(x)| < 0.04$

oder < 0.0082 mit alternierender Reihe.

7. a) $\displaystyle\int_0^\infty f(x) \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx + \int_1^\infty f(x) \, dx$

erstes Integral ist eigentliches Integral, da f stetig in $[0,1]$ $\quad$ (da $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2} = f(0)$)

zweites Integral konvergent, da $|f(x)| \leq \frac{2}{x^3}$

b) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2^{2n+2} - 1) \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+3)!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

c) $\displaystyle\int_0^1 f(x) \, dx = 0.4608333 + R \quad , \quad |R| < 0.00011$

8. a) $\frac{1}{25}$, b) $e^{-1/2}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{1}{12}$

9. a) α) Vergleichsfunktion $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 1$

β) Vergleichsfunktion $g(x) = \frac{1}{x^4}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = \frac{\pi}{2}$

b) α) $\frac{\pi}{2}$, β) $\frac{\pi}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\ln 2$

10. $y(x) = (\frac{1}{4} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2})e^x - \frac{1}{4}e^{-x}$

11. $y(x) = \frac{1}{1690}(29e^{-x} + 2\sin 2x - 29\cos 2x) + \frac{1}{18}(1 - e^{-x}) + \frac{1}{16}xe^{-x}$

12. Relatives Minimum in $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $f(-1/2, 0, 0) = -1/4$ (gleichzeitig absolutes Minimum)

Absolutes Maximum in $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ mit $f(1, \pm 1, \pm 1) = 5$

13. Absolutes Maximum in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $f(0, 0, 1) = 1$

Absolutes Minimum in $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $f(0, 1, 0) = f(1, 0, 0) = 0$

14. a) $f(x) = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2x + \cos 4x) = s(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $s(x) = \frac{96}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sin(2l+1)x}{(2l+1)((2l+1)^2 - 4)((2l+1)^2 - 16)} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

da f stetig und stückweise glatt in $\mathbb{R}$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)((2l+1)^2 - 4)((2l+1)^2 - 16)} = \frac{\pi}{96}$$

15. $T(x) = (\frac{\pi^2}{3} + \frac{5}{2}) - 5\cos x - \frac{5}{6}\cos 2x + 4\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2(k^2-1)}\cos kx = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

da f stetig und stückweise glatt in $\mathbb{R}$

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2(k^2-1)} = 0.0108663\ldots$$

16. a) $L(t^2 \sinh t)(x) = \dfrac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$, $L(\dfrac{\sinh t}{t})(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$, $x > 1$

b) $y(t) = \dfrac{1}{2}(t\cosh t + \sinh t)$

Musteraufgaben III/IV

1. Prüfen Sie nach, ob das Vektorfeld $\vec{V} : I\!R^3 \to I\!R^3$ mit $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2x\mathrm{e}^{-y} \\ \cos z + x^2\mathrm{e}^{-y} \\ -y\sin z \end{pmatrix}$ ein Potential in $I\!R^3$ besitzt. Berechnen Sie das Kurvenintegral von $\vec{V}$ entlang der Geraden von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *direkt* und mit Hilfe des *Potentials*.

2. Gegeben sei die Fläche $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; : \; \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \le 1 \; , \; z = 1 \right\}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\displaystyle\int_K (3x-4y)dx + (4x+2y+z^2)dy + (2xz^2 - 4y^2)dz$ entlang der Randkurve von F (mit positiver Orientierung) direkt und mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

3. Sei $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; : \; x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0 \; , \; x+y+z \le 1 \right\}$.

Berechnen Sie direkt und mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß den Fluß $\displaystyle\int_{\partial M} < \vec{V}, \vec{n} > d\sigma$ durch die Oberfläche von M in Richtung der äußeren Normalen für das Vektorfeld $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x - y^2 \\ z^2 + y \\ x+y+z \end{pmatrix}$.

4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL
$xy'' + (2-x)y' - y = 2x \; , \; (x > 0),$
a) mit Hilfe eines verallgemeinerten Potenzreihenansatzes,
b) mit Hilfe eines Ansatzes $y(x) = u(x)v(x)$.

5. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL
$x^3y''' + x^2y'' - 6xy' + 6y = x + \ln x \; , \; (x > 0).$

6. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL
$(x+1)y'' - (3x+4)y' + 3y = (x+1)^2\mathrm{e}^{3x} \; , \; (x > -1).$

Hinweis: Eine Lösung der homogenen DGL findet man mit Hilfe des Ansatzes: $y_1(x) = \mathrm{e}^{ax}$.

7. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden DGL-Systems

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}(x) \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \; , \; \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3x}.$$

8. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangs-Randwert-Problems

$$\begin{bmatrix} u_{tt} = u_{xx} + u \quad , \quad (0 < x < \pi \; , \; t > 0) \\ u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos(\frac{x}{2}) \; , \; u_t(x,0) = \cos(\frac{3x}{2}) \end{bmatrix}$$

a) mit Hilfe der Fouriermethode,

b) mit Hilfe der Laplace-Transformation.

9. Sei $G = \{z \in \mathbb{C} \; : \; 0 < Re\ z < \frac{\pi}{2} \; , \; Im\ z > 0\}$ und $f : G \to \mathbb{C}$
mit $f(z) = \left(\frac{\mathrm{e}^{2iz} - i}{\mathrm{e}^{2iz} + i}\right)^2$.
Bestimmen Sie das Bild $f(G)$ (mit Skizze), und untersuchen Sie, ob f in G konform ist. Geben Sie ein weiteres Gebiet $\tilde{G}$ an, das auch durch die Funktion f konform auf $f(G)$ abgebildet wird.

10. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $v(x,y) = (x \cos y + y \sin y)\mathrm{e}^{\lambda x} + 2xy$ der Imaginärteil einer in $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion $f = u + iv$. Bestimmen Sie diese λ und die zugehörigen Realteile u. Geben Sie die Funktion f als Funktion von z an.

11. Berechnen Sie - falls konvergent - mit Hilfe des Residuensatzes die Integrale ($a \in \mathbb{R}$):

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(4+x^2)^3}\, dx$, b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4x+5)^2}\, dx.$

12. Bestimmen Sie die Lösung der AWA (Anfangswert-Aufgabe)

$y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^t \sin t \quad , \quad y(0) = 1 \; , \; y'(0) = 0,$

mit Hilfe der Laplace-Transformation. Benutzen Sie - falls möglich - bei der Rücktransformation den Residuensatz.

Lösungen der Musteraufgaben

1.

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -2x\mathrm{e}^{-y} & \cos z + x^2\mathrm{e}^{-y} & -y\sin z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin z + \sin z \\ 0-0 \\ 2x\mathrm{e}^{-y} - 2x\mathrm{e}^{-y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \operatorname{rot}\vec{V}(\vec{x}) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in I\!R^3.$

Da $I\!R^3$ ein *einfach zusammenhängendes Gebiet* und $\operatorname{rot}\vec{V} = \vec{0}$ in $I\!R^3 \quad \Rightarrow \quad \vec{V}$ besitzt in $I\!R^3$ ein Potential.

Berechnung des Potentials

$u_x = V_1 = -2x\mathrm{e}^{-y} \quad \Rightarrow \quad u(x,y,z) = -\int 2x\mathrm{e}^{-y}\, dx + h_1(y,z) = -x^2\mathrm{e}^{-y} + h_1(y,z),$

$u_y = V_2 = \cos z + x^2\mathrm{e}^{-y} \quad \Rightarrow \quad u(x,y,z) = \int (\cos z + x^2\mathrm{e}^{-y})\, dy + h_2(x,z)$
$= y\cos z - x^2\mathrm{e}^{-y} + h_2(x,z),$

$u_z = V_3 = -y\sin z \quad \Rightarrow \quad u(x,y,z) = -\int y\sin z\, dz + h_3(x,y) = y\cos z + h_3(x,y)$

$\Rightarrow \quad u(x,y,z) = y\cos z - x^2\mathrm{e}^{-y} + c\ ,\ c \in I\!R,$ ist allgemeines Potential von $\vec{V}$ in $I\!R^3$.

Berechnung des Kurvenintegrals

a) *direkt*:

Parameterdarstellung der Kurve K:

$$\vec{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} \quad ,\ t \in [0,1]$$

$\Rightarrow \quad dx = 2dt\ ,\ dy = -dt\ ,\ dz = dt\ ,$

$$\int_K (V_1\, dx + V_2\, dy + V_3\, dz) = \int_0^1 (-8t\mathrm{e}^{t-1} - \cos t - 4t^2\mathrm{e}^{t-1} - (1-t)\sin t)\, dt$$

$$= -\frac{8}{\mathrm{e}}\int_0^1 t\mathrm{e}^t\, dt - \frac{4}{\mathrm{e}}\int_0^1 t^2\mathrm{e}^t\, dt - \int_0^1 \sin t\, dt + \int_0^1 (t\sin t - \cos t)\, dt$$

$$= -\frac{8}{\mathrm{e}}(t-1)\mathrm{e}^t\Big]_0^1 - \frac{4}{\mathrm{e}}(t^2-2t+2)\mathrm{e}^t\Big]_0^1 + \cos t\Big]_0^1 - t\cos t\Big]_0^1$$

$$= -\frac{8}{\mathrm{e}} - \frac{4}{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{e} + \frac{8}{\mathrm{e}} + \cos 1 - 1 - \cos 1 = -5.$$

b) *mit Potential*:

$$\int_K (V_1\, dx + V_2\, dy + V_3\, dz) = u(2,0,1) - u(0,1,0) = -4 - 1 = -5.$$

2. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ :\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} \le 1\ ,\ z = 1 \right\}$

K sei die Randkurve von F mit positiver Orientierung.

Paramterdarstellung von K (Ellipse):
$x(t) = 4\cos t\ ,\ y(t) = 3\sin t\ ,\ z(t) = 1\ ,\ t \in [0, 2\pi]$
$\Rightarrow\quad dx = -4\sin t\ dt\ ,\ dy = 3\cos t\ dt\ ,\ dz = 0\ .$

Berechnung des Kurvenintegrals

a) *direkt*

$$\int_K (3x-4y)dx + (4x+2y+z^2)dy + (2xz^2-4y^2)dz$$
$$= \int_0^{2\pi} \Big((12\cos t - 12\sin t)(-4\sin t) + (16\cos t + 6\sin t + 1)(3\cos t)\Big)\ dt$$
$$\int_0^{2\pi} (-48\sin t\cos t + 48\sin^2 t + 48\cos^2 t + 18\sin t\cos t + 3\cos t)\ dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (48 - 30\sin t\cos t + 3\cos t)\ dt = 48\cdot 2\pi = 96\pi\ ,$$

da $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin t\cos t\ dt = 0$ und $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos t\ dt = 0.$

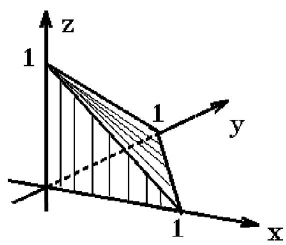
b) *mit Integralsatz von Stokes*:

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (3x-4y) & (4x+2y+z^2) & (2xz^2-4y^2) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -8y-2z \\ -2z^2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow\ < \operatorname{rot}\vec{V}, \vec{n} >= 8\ ,$

$$\int_K (V_1\, dx + V_2\, dy + V_3\, dz) = \int_F < \operatorname{rot}\vec{V}, \vec{n} >\ d\sigma$$
$$= 8\int_F d\sigma = 8\cdot(\text{Flächeninhalt von } F) = 8(4\cdot 3\cdot\pi) = 96\pi.$$

3.



$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ :\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\ ,\ x+y+z \leq 1 \right\}$$

Die Oberfläche von M besteht aus 4 Teilflächen :

$\partial M = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$ mit

$$F_1\ :\ z = 0\ ,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ :\ x \geq 0, y \geq 0\ ,\ x+y \leq 1 \right\}\ ,\ \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\ ,$$
$$d\sigma = d(x,y)\ ,$$
$$F_2\ :\ y = 0\ ,\ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}\ :\ x \geq 0, z \geq 0\ ,\ x+z \leq 1 \right\}\ ,\ \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,$$
$$d\sigma = d(x,z)\ ,$$

$F_3 \ : \ x=0 \ , \ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in D_3 = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \ : \ y \geq 0, z \geq 0 \ , \ y+z \leq 1 \right\} \ , \ \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$

$\qquad d\sigma = d(y,z) \ ,$

$F_4 \ : \ x+y+z=1$, also Paramterdarstellung:

$\vec{\varphi}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix} \ , \ \vec{\varphi}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \ \vec{\varphi}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \ \vec{\varphi}_x \times \vec{\varphi}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ : \ x \geq 0, y \geq 0 \ , \ x+y \leq 1 \right\} \ .$

a) *Direkte Berechnung*:

$$\int_{F_1} < \vec{V}, \vec{n} > d\sigma = \int_{D_1} (-V_3)_{|z=0} d(x,y) = \int_0^1 \int_0^{1-x} (-x-y) dy dx$$
$$= \int_0^1 \Big(-x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2 \Big) dx = \int_0^1 \Big(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \Big) dx = -\frac{1}{3} \ ,$$
$$\int_{F_2} < \vec{V}, \vec{n} > d\sigma = \int_{D_2} (-V_2)_{|y=0} d(x,z) = \int_0^1 \int_0^{1-x} (-z^2) dz dx$$
$$= \int_0^1 \Big(-\frac{1}{3}(1-x)^3 \Big) dx = \frac{1}{12}(1-x)^4 \Big]_0^1 = -\frac{1}{12} \ ,$$
$$\int_{F_3} < \vec{V}, \vec{n} > d\sigma = \int_{D_3} (-V_1)_{|x=0} d(y,z) = \int_0^1 \int_0^{1-y} (y^2) dz dy$$
$$= \int_0^1 y^2(1-y) dy = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \ ,$$
$$\int_{F_4} < \vec{V}, \vec{n} > d\sigma = \int_{D_1} (V_1 + V_2 + V_3)_{|z=1-x-y} d(x,y)$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \Big((2x - y^2) + ((1-x-y)^2 + y) + (x+y+1-x-y) \Big) dy dx$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \Big(2x - y^2 + 1 - 2x - 2y + x^2 + y^2 + 2xy + y + 1 \Big) dy dx$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \Big(2 - y + 2xy + x^2 \Big) dy dx = \int_0^1 \Big[2y - \frac{1}{2}y^2 + xy^2 + x^2 y \Big]_0^{1-x} dx$$
$$= \int_0^1 \Big(2(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2 + x(1-x)^2 + x^2(1-x) \Big) dx = \int_0^1 \Big(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x^2 \Big) dx = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \ .$$

Zusammen erhalten wie dann

$$\int_{\partial M} < \vec{V}, \vec{n} > d\sigma = -\frac{1}{3} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + 1 = \frac{2}{3} \ .$$

b) *mit Integralsatz von Gauß*:

$$\operatorname{div} \vec{V}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(2x - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(z^2 + y) + \frac{\partial}{\partial z}(x+y+z) = 2+1+1 = 4 \ ,$$
$$\int_{\partial M} < \vec{V}, \vec{n} > d\sigma = \int_M \operatorname{div} \vec{V}(x,y,z) \ d(x,y,z) = 4 \int_M d(x,y,z) = 4 \cdot \mu(M)$$

mit $\mu(M)$ =Volumen von M,

$$\mu(M) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dy dx$$

$$= \int_0^1 \Big((1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2 \Big) dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2 dx = -\frac{1}{6}(1-x)^3 \Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial M} < \vec{V}, \vec{n} > d\sigma = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \ .$$

4. $xy'' + (2-x)y' - y = 2x \quad , \quad (x > 0)$, (linear, inhomogen, 2. Ordnung).

Noramalform: $y'' + \dfrac{2-x}{x} y' - \dfrac{1}{x} y = 2 \quad \Rightarrow \quad p(x) = \dfrac{2-x}{x} \ , \ q(x) = \dfrac{-1}{x} \ , \ r(x) = 2.$

Die Koeffizientenfunktionen p, q und die Funktion der rechten Seite r sind *stetig* in $(0, \infty) \quad \Rightarrow$ die DGL ist *lösbar* in $(0, \infty)$.

a) *Verallgemeinerter Potenzreihenansatz*

Die DGL hat eine Singularität in $x_0 = 0$, also ist ein normaler Potenzreihenansatz um $x_0 = 0$ i.A. nicht möglich.

Ansatz für verallgemeinerten Potenzreihenansatz:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\varrho} \quad , \quad a_0 \neq 0,$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\varrho) a_n x^{n+\varrho-1} \ , \ y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\varrho)(n+\varrho-1) a_n x^{n+\varrho-2}.$$

Einsetzen in die gegebene *homogene* DGL (nicht in die Normalform) ergibt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\varrho)(n+\varrho-1) a_n x^{n+\varrho-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+\varrho) a_n x^{n+\varrho-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+\varrho) a_n x^{n+\varrho}$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\varrho} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+\varrho)(n+\varrho-1+2) a_n x^{n+\varrho-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+\varrho+1) a_n x^{n+\varrho} = 0$$

$(n \to n+1)$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=-1}^{\infty} (n+\varrho+1)(n+\varrho+2) a_{n+1} x^{n+\varrho} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+\varrho+1) a_n x^{n+\varrho} = 0 \ ,$$

$n = -1$: $\quad \varrho(\varrho+1) a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho = 0$ oder $\varrho = -1$ (da $a_0 \neq 0$),

$n \geq 0$: $\quad (n+\varrho+1)(n+\varrho+2) a_{n+1} = (n+\varrho+1) a_n$.

1. Fall: $\quad \varrho = 0$

$n \geq 0$: $\quad (n+1)(n+2) a_{n+1} = (n+1) a_n \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+2}$.

Wir setzen $a_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dfrac{1}{2} \ , \ a_2 = \dfrac{1}{2 \cdot 3} \ , \ a_3 = \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \dfrac{1}{4!}$.

Vermutung: $\quad a_n = \dfrac{1}{(n+1)!}$ (Beweis mit vollständiger Induktion)

$$\Rightarrow \quad y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \quad \Rightarrow \quad xy_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x - 1$$

$$\Rightarrow \quad y_1(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \ .$$

2. Fall: $\varrho = -1$

$n \geq 0$: $\quad n(n+1)a_{n+1} = na_n$

$n = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot a_1 = 0 \cdot a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1$ beliebig. Wir setzen $a_1 = 0$.

$n \geq 1$: $\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$.

Da $a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = 0 \quad \forall n \geq 1$

$$\Rightarrow \quad y_2(x) = a_0 x^{0-1} = \frac{a_0}{x} = \frac{1}{x} \quad \text{mit } a_0 = 1.$$

$y_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$, $y_2(x) = \dfrac{1}{x}$ sind linear unabhängig in $(0, \infty)$,

da $\lim\limits_{x \to 0+} y_1(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0+} y_2(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{x} = \infty$

$\Rightarrow \quad y_h(x) = c_1 \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} + c_2 \dfrac{1}{x}$, $c_i \in I\!R$, ist allgemeine Lösung der homogenen DGL in $(0, \infty)$.

partikuläre Lösung:

Ansatz: $y_0(x) = a + bx$ (hier zufällig möglich; sonst müßte man "Variation der Konstanten" durchführen)

$\Rightarrow \quad y_0'(x) = b$, $y_0''(x) = 0 \quad \Rightarrow$ (einsetzen) $\quad (2-x)b - (a+bx) = 2x$

$\Rightarrow \quad 2b = a$, $-2b = 2 \quad \Rightarrow \quad b = -1$, $a = -2$

$\Rightarrow \quad y_0(x) = -(2+x)$ ist partikuläre Lösung.

$\Rightarrow \quad y(x) = c_1 \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} + c_2 \dfrac{1}{x} - (2+x)$, $c_i \in I\!R$, ist allgemeine Lösung in $(0, \infty)$.

b) *Ansatz: y(x)=u(x)v(x)* (vgl. S.506)

$$4q - p^2 - 2p' = \frac{-4}{x} - \Big(\frac{4}{x^2} - \frac{4}{x} + 1\Big) + \frac{4}{x^2} = -1 = \text{konst.}$$

$$u(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int \frac{2-x}{x}\,dx} = \mathrm{e}^{-\ln x + x/2} = \frac{\mathrm{e}^{x/2}}{x} \ .$$

DGL für v : $\quad v'' - \dfrac{1}{4}v = \dfrac{2}{u(x)} = 2x\mathrm{e}^{-x/2}$.

homogen: $\quad \lambda^2 - \dfrac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad v_h(x) = c_1\mathrm{e}^{x/2} + c_2\mathrm{e}^{-x/2}$, $c_i \in I\!R$.

partikuläre Lösung:

Ansatz: $v_0(x) = x(a+bx)\mathrm{e}^{-x/2} = (ax + bx^2)\mathrm{e}^{-x/2}$ (einfache Resonanz),

$$v_0'(x) = (a + 2bx - \frac{a}{2}x - \frac{b}{2}x^2)\mathrm{e}^{-x/2},$$

$$v_0''(x) = (2b - \frac{a}{2} - bx - \frac{a}{2} - bx + \frac{a}{4}x + \frac{b}{4}x^2)\mathrm{e}^{-x/2}.$$

Einsetzen, Division durch $e^{-x/2}$, Koeffizientenvergleich ergibt:

$x^2: \quad \frac{b}{4} - \frac{b}{4} = 0$

$x^1: \quad -2b + \frac{a}{4} - \frac{a}{4} = 2 \quad \Rightarrow \quad b = -1$

$x^0: \quad 2b - a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2b = -2$

$\Rightarrow \quad v_0(x) = (-2x - x^2)e^{-x/2} = -x(2+x)e^{-x/2}$

$\Rightarrow \quad v(x) = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{-x/2} - x(2+x)e^{-x/2}$

$\Rightarrow \quad y(x) = u(x)v(x) = \frac{e^{x/2}}{x}\left(c_1 e^{x/2} + c_2 e^{-x/2} - x(2+x)e^{-x/2}\right)$

$\Rightarrow \quad y(x) = c_1 \frac{e^x}{x} + c_2 \frac{1}{x} - (2+x) = d_1 \frac{e^x - 1}{x} + d_2 \frac{1}{x} - (2+x) \quad , \quad d_i \in I\!R,$
ist allgemeine Lösung in $(0, \infty)$.

5. $x^3 y''' + x^2 y'' - 6xy' + 6y = x + \ln x \quad , \quad (x > 0), \quad$ (Eulersche DGL).
homogen:
Ansatz: $y(x) = x^\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda(\lambda-1) - 6\lambda + 6 = 0$
$\Rightarrow \quad (\lambda-1)(\lambda(\lambda-2) + \lambda - 6) = (\lambda-1)(\lambda^2 - \lambda - 6) = (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2)$
$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = 3 \ , \ \lambda_3 = -2.$
$y_h(x) = c_1 x + c_2 x^3 + \frac{c_3}{x^2} \quad , \quad c_i \in I\!R,$ ist allgemeine Lösung der homogenen DGL.

partikuläre Lösung: rechte Seite: $f_1(x) = x$

$$x \underset{\text{Substitution}}{\longrightarrow} e^t \underset{\text{Ansatz, einfache Resonanz}}{\longrightarrow} ate^t \underset{\text{Substitution rückgängig}}{\longrightarrow} a(\ln x)x$$

$\Rightarrow$ Ansatz $\quad y_{0,1}(x) = ax\ln x \quad \Rightarrow \quad y'_{0,1}(x) = a(\ln x + 1) \ , \ y''_{0,1}(x) = \frac{a}{x} \ , \ y'''_{0,1}(x) = -\frac{a}{x^2}$
einsetzen $\Rightarrow \quad -ax + ax - 6ax\ln x - 6ax + 6ax\ln x = x \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{6}$.
Rechte Seite: $\quad f_2(x) = \ln x$

$$\ln x \underset{\text{Substitution}}{\longrightarrow} t \underset{\text{Ansatz, keine Resonanz}}{\longrightarrow} a + bt \underset{\text{Subst. rückgängig}}{\longrightarrow} a + b\ln x$$

$\Rightarrow$ Ansatz $\quad y_{0,2}(x) = a + b\ln x \quad \Rightarrow \quad y'_{0,2}(x) = \frac{b}{x} \ , \ y''_{0,2}(x) = -\frac{b}{x^2} \ , \ y'''_{0,2}(x) = \frac{2b}{x^3}$
einsetzen $\Rightarrow \quad 2b - b - 6b + 6a + 6b\ln x = \ln x \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{6} \ , \ 6a = 5b \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5}{36}$.

$y(x) = c_1 x + c_2 x^3 + \frac{c_3}{x^2} - \frac{1}{6}x\ln x + \frac{5}{36} + \frac{1}{6}\ln x \quad , \quad c_i \in I\!R,$ ist allgemeine Lösung der DGL in $(0, \infty)$.

6. $(x+1)y'' - (3x+4)y' + 3y = (x+1)^2 e^{3x} \quad , \quad (x > -1)$,
(linear, inhomogen, 2. Ordnung).

Noramalform: $y'' - \dfrac{3x+4}{x+1}y' + \dfrac{3}{x+1}y = (x+1)e^{3x}$

$\Rightarrow \quad p(x) = -\dfrac{3x+4}{x+1}\ ,\ q(x) = \dfrac{3}{x+1}\ ,\ r(x) = (x+1)e^{3x}$.

Die Koeffizientenfunktionen p, q und die Funktion der rechten Seite r sind *stetig* in $(-1,\infty)$ $\quad\Rightarrow$ die DGL ist *lösbar* in $(-1,\infty)$.

Ansatz: $y_1(x) = e^{ax} \quad \Rightarrow \quad y_1'(x) = ae^{ax}\ ,\ y_1''(x) = a^2 e^{ax}$.

Einsetzen in die homogene DGL und Division durch e^{ax} ergibt:

$(x+1)a^2 - (3x+4)a + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (a^2-3a)x + (a^2-4a+3) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 3.$

$\Rightarrow \quad y_1(x) = e^{3x}$ ist Lösung der homogenen DGL, $\quad y_1(x) \neq 0$ für $x \in (-1,\infty)$.

Reduktion der Ordnung: (vgl. S.500)

Der Ansatz: $y(x) = v(x)y_1(x)$ führt auf die DGL für v' : (vgl. S.501)

$$v'' + \Big(2\,\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x)\Big)v' = \frac{r(x)}{y_1(x)}\ .$$

Mit obigen Funktionen p, r, y_1 erhalten wir also

$$v'' + \Big(2\cdot\frac{3e^{3x}}{e^{3x}} - \frac{3x+4}{x+1}\Big)v' = \frac{(x+1)e^{3x}}{e^{3x}} \quad \Rightarrow \quad v'' + \Big(6 - \frac{3x+4}{x+1}\Big)v' = x+1\ .$$

Mit $w = v'$ erhalten wir also die lineare DGL 1. Ordung

$$w' + \frac{3x+2}{x+1}w = x+1\ .$$

homogen: (Trennung der Variablen)

$$\int \frac{1}{w}\,dw = -\int \frac{3x+2}{x+1}\,dx + d = -\int\Big(3 - \frac{1}{x+1}\Big)\,dx + d = -3x + \ln|x+1| + d$$

$\Rightarrow \quad \ln|w| = -3x + \ln|x+1| + d \quad \Rightarrow \quad w_h(x) = c(x+1)e^{-3x} \quad , \quad c \in \mathbb{R}$, ist Lösung der homogenen DGL in $(-1,\infty)$.

partikuläre Lösung: (Variation der Konstanten , vgl. S.487)

Der Ansatz: $w_0(x) = c(x)w_1(x)$ mit $w_1(x) = (x+1)e^{-3x}$ führt auf

$$c(x) = \int \frac{x+1}{w_1(x)}\,dx = \int \frac{x+1}{(x+1)e^{-3x}}\,dx = \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}$$

$\Rightarrow \quad w_0(x) = \dfrac{1}{3}(x+1)$ ist partikuläre Lösung

$\Rightarrow \quad w(x) = c(x+1)e^{-3x} + \dfrac{1}{3}(x+1)$ ist allgemeine Lösung der $w-$DGL.

Mit $v' = w$ erhalten wir für v :

$$v(x) = c\int (x+1)e^{-3x}dx + \frac{1}{3}\int (x+1)\,dx + c_2 = c\Big(-\frac{x}{3} - \frac{4}{9}\Big)e^{-3x} + \frac{1}{3}\Big(\frac{x^2}{2} + x\Big) + c_2$$

$$v(x) = \frac{-c}{9}(3x+4)e^{-3x} + c_2 + \frac{1}{6}(x^2+2x) = c_1(3x+4)e^{-3x} + c_2 + \frac{1}{6}(x^2+2x) \quad , \quad c_i \in \mathbb{R},$$

$\Rightarrow \quad y(x) = v(x)y_1(x) = v(x)e^{3x} = c_1(3x+4) + c_2 e^{3x} + \dfrac{1}{6}(x^2+2x)e^{3x} \quad , \quad c_i \in \mathbb{R}$,

ist allgemeine Lösung der gegebenen DGL in $(-1,\infty)$.

7. $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3x}$.

homogen:

Berechnung der Eigenwerte:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)^2 + (3-\lambda)$$

$$= (3-\lambda)\Big((1-\lambda)(3-\lambda) + 1\Big) = (3-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 2$ (doppelter EW) , $\lambda_2 = 3$ (einfacher EW).

Berechnung der EV (Hauptvektoren)

zu $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind die EV zu $\lambda_1 = 2$ für $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Da die Dimension des Eigenraumes = 1, müssen wir noch einen Hauptvektor (der Ordnung 2) bestimmen

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist Hauptvektor (der Ordnung 2).}$$

EV zu $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} , \ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \text{ sind die EV zu } \lambda_2 = 3.$$

Damit lautet die Lösung des homogenen DGL-Systems:

$$\vec{y}_h(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} + c_2 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \mathrm{e}^{2x} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} \quad , \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

partikuläre Lösung:

Ansatz: $\vec{y}_0(x) = (\vec{a} + \vec{b}x)\mathrm{e}^{3x}$ (einfache Resonanz),

$\vec{y}\,'(x) = (\vec{b} + 3\vec{a} + 3\vec{b}x)\mathrm{e}^{3x}$.

Einsetzen und Division durch e^{3x} ergibt:

$$\vec{b} + 3\vec{a} + 3\vec{b}x = A(\vec{a} + \vec{b}x) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Koeffizientenvergleich:

x^1-Term: $(A - 3E)\vec{b} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{b}$ =EV zu $\lambda_2 = 3$ (oder $= \vec{0}$) $\Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

x^0–Term: $(A-3E)\vec{a} = \vec{b} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha-1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha-1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha-1 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha-1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha-1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-6 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ nur lösbar für $\alpha = 6$ mit der Lösung $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ \beta \\ 5 \end{pmatrix}$, $\beta \in I\!R$.

Wählen wir $\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \vec{y}_0(x) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} x \right\} e^{3x}$ ist partikuläre Lösung.

$\Rightarrow \quad \vec{y}(x) = \vec{y}_h(x) + \vec{y}_0(x)$ ist allgemeine Lösung des gegebenen DGL-Systems.

8.

$$\left[\begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} + u \quad , \quad (0 < x < \pi \ , \ t > 0) \\ u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos(\frac{x}{2}) \ , \ u_t(x,0) = \cos(\frac{3x}{2}) \end{array}\right]$$

a) *Fouriermethode*

Der Ansatz $u(x,t) = f(x)g(t)$ führt auf: $f(x)g''(t) = f''(x)g(t) + f(x)g(t)$.

Division durch $f(x)g(t)$ ergibt: $\dfrac{g''(t)}{g(t)} - 1 = \dfrac{f''(x)}{f(x)} = \lambda \in I\!R$.

Die Randbedingungen ergeben:

$u_x(0,t) = f'(0)g(t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0$,

$u(\pi,t) = f(\pi)g(t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad \Rightarrow \quad f(\pi) = 0$.

Damit erhalten wir

$$\boxed{\text{a)} \quad f''(x) - \lambda f(x) = 0 \quad , \quad f'(0) = f(\pi) = 0 \quad \text{(Eigenwertaufgabe)}}$$

$$\boxed{\text{b)} \quad g''(t) - (1+\lambda)g(t) = 0 \quad \text{(DGL für } g(t))}$$

Zu a) Ansatz $f(x) = e^{\mu x} \quad \Rightarrow \quad \mu^2 = \lambda$.

$\lambda = 0$: $\Rightarrow \quad \mu = 0$ (doppelte Nullstelle) $\Rightarrow \quad f(x) = a + bx$, $f'(x) = b$.

$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$, $f(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0$.

$\lambda > 0$: $\Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} \quad \Rightarrow$
$f(x) = a\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} + b\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$, $f'(x) = \sqrt{\lambda}(a\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} - b\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x})$,
$f'(0) = \sqrt{\lambda}(a-b) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2a\cosh(\sqrt{\lambda}x)$,
$f(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b = 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0.$
$\lambda < 0$: $\Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm i\sqrt{-\lambda} \quad \Rightarrow$
$f(x) = a\cos(\sqrt{-\lambda}x) + b\sin(\sqrt{-\lambda}x)$, $f'(x) = \sqrt{-\lambda}(-a\sin(\sqrt{-\lambda}x) + b\cos(\sqrt{-\lambda}x)$,
$f'(0) = \sqrt{-\lambda}b = 0 \Rightarrow b = 0$, $f(\pi) = a\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$
$\Rightarrow \quad \sqrt{-\lambda}\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in I\!N_0$

$\Rightarrow \quad \lambda_n = -(n+\frac{1}{2})^2$, $n \in I\!N_0$, sind die EW von a).
$f_n(x) = c_n \cos(n+\frac{1}{2})x$, $n \in I\!N_0$, sind die zugehörigen Eigenfunktionen.

Zu b) $g_n''(t) - (1-(n+\frac{1}{2})^2)g_n(t) = 0$
Ansatz $g(t) = \mathrm{e}^{\mu x} \quad \Rightarrow \quad \mu^2 = 1-(n+\frac{1}{2})^2$.
$n = 0$: $\Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad g_0(t) = a_0\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{3}}{2}t} + b_0\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}$,
$n \geq 1$: $\Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm i\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - 1} \quad \Rightarrow$
$g_n(t) = a_n\cos(\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2-1}\;t) + b_n\sin(\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2-1}\;t)$.

$u(x,t) = (a_0\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{3}}{2}t} + b_0\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t})\cos\frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\cos(n+\frac{1}{2})x$ ist die allgemeine Lösung.

Anfangsbedingungen:
$u(x,0) = (a_0+b_0)\cos\frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n+\frac{1}{2})x = \cos\frac{x}{2}$
$\Rightarrow \quad a_0 + b_0 = 1$, $a_n = 0 \;\; \forall n \geq 1$,
$u_t(x,0) = \frac{\sqrt{3}}{2}(a_0-b_0)\cos\frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2-1}\;b_n\cos(n+\frac{1}{2})x = \cos\frac{3}{2}x$
$\Rightarrow \quad a_0 - b_0 = 0$, $b_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $b_n = 0$ sonst.
Zusammen folgt: $a_0 = b_0 = \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$, alle anderen a_n und b_n gleich 0.
Damit erhalten wir als Lösung der ARW-Aufgabe:
$u(x,t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{3}}{2}t} + \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t})\cos\frac{x}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin(\frac{\sqrt{5}}{2}t)\cos\frac{3}{2}x$
$\Rightarrow \quad u(x,t) = \cosh(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)\cos\dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\sin(\dfrac{\sqrt{5}}{2}t)\cos\dfrac{3}{2}x$ ist die gesuchte Lösung.

b) *mit Laplace-Transformation*
Mit $U(x,p) = L(u(x,t))(p) = \int_0^{\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-pt}\,dt$ erhalten wir nach Anwendung der Laplace-Transformation auf die partielle DGL:
$L(u_{tt}) = L(u_{xx}) + L(u) \quad \Rightarrow \quad p^2U - pu(x,0) - u_t(x,0) = U_{xx} + U$
$\Rightarrow \quad U_{xx} - (p^2-1)U = -p\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3}{2}x$.

homogen: $\quad U_h(x,p) = c_1 \mathrm{e}^{\sqrt{p^2-1}\,x} + c_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{p^2-1}\,x}$ für $p > 1$.

partikuläre Lösung:

Ansatz: $\quad U_0(x,p) = a \cos\frac{x}{2} + b\cos\frac{3}{2}x \quad \Rightarrow \quad (U_0)_{xx}(x,p) = -\frac{a}{4}\cos\frac{x}{2} - \frac{9}{4} b \cos\frac{3}{2}x$.

Einsetzen und Koeffizientenvergleich ergibt:

$\cos\frac{x}{2}$–Term: $\quad -\frac{a}{4} - (p^2-1)a = -p \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{4p}{4p^2-3}$,

$\cos\frac{3}{2}x$–Term: $\quad -\frac{9}{4}b - (p^2-1)b = -1 \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{4}{4p^2+5}$.

Also erhalten wir insgesamt:

$$U(x,p) = c_1 \mathrm{e}^{\sqrt{p^2-1}\,x} + c_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{p^2-1}\,x} + \frac{4p}{4p^2-3}\cos\frac{x}{2} + \frac{4}{4p^2+5}\cos\frac{3}{2}x \ .$$

Randbedingungen einsetzen:

$U_x(0,p) = \sqrt{p^2-1}\,(c_1 - c_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2$

$U(\pi,p) = 2c_1 \cosh(\sqrt{p^2-1}\,\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$

$$\Rightarrow \quad U(x,p) = \frac{4p}{4p^2-3}\cos\frac{x}{2} + \frac{4}{4p^2+5}\cos\frac{3}{2}x$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = L^{-1}(U(x,p))(t) = L^{-1}\Big(\frac{p}{p^2-3/4}\Big)\cos\frac{x}{2} + L^{-1}\Big(\frac{1}{p^2+5/4}\Big)\cos\frac{3}{2}x$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \cosh(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\cos\frac{x}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin(\frac{\sqrt{5}}{2}t)\cos\frac{3}{2}x \quad \text{ist die gesuchte Lösung.}$$

9. $\quad G = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < Re\ z < \frac{\pi}{2}\ ,\ Im\ z > 0\} \quad , \quad f(z) = \Big(\dfrac{\mathrm{e}^{2iz} - i}{\mathrm{e}^{2iz} + i}\Big)^2$.

Wir zerlegen f in die folgenden "Standardabbildungen"

$f_1(z) = 2iz \ , \quad f_2(z) = \mathrm{e}^z \ , \quad f_3(z) = \dfrac{z-i}{z+i} \ , \quad f_4(z) = z^2$.

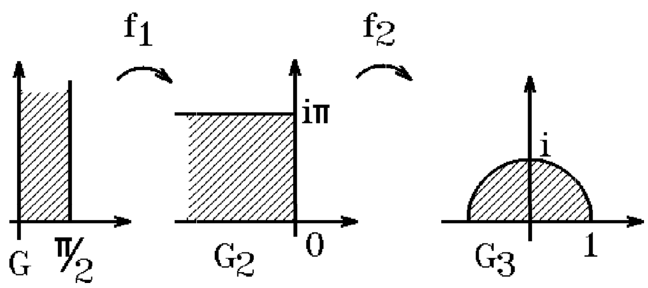
Es gilt dann $\quad f(z) = f_4(f_3(f_2(f_1(z))))$.

$G = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < Re\ z < \pi/2\ ,\ Im\ z > 0\}$

$\Rightarrow \quad G_2 = f_1(G) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ Re\ z < 0\ ,\ 0 < Im\ z < \pi\}$

(Drehstreckung: Drehung um den Winkel $\pi/2$, Streckung mit dem Faktor 2)

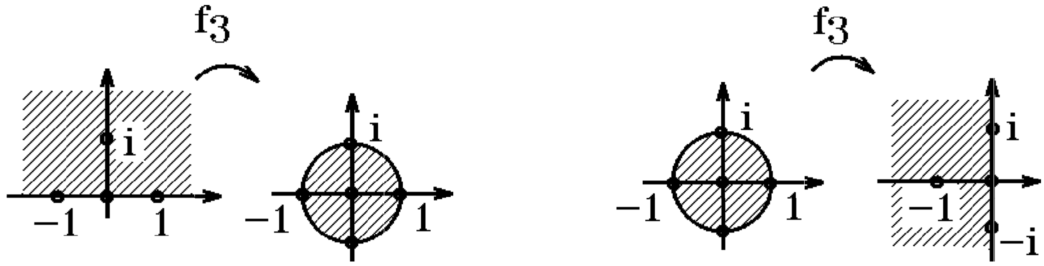
$\Rightarrow \quad G_3 = f_2(G_2) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\ ,\ 0 < arg\ z < \pi\}$ $\quad$ (e^z– Funktion)



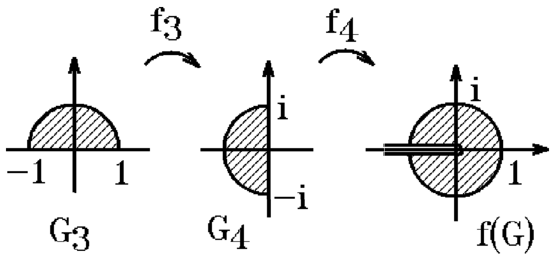
Nebenrechnung: $\quad f_3(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ $\quad$ (gebrochen lineare Abbildung)

z	∞	0	$-i$	i	1	-1
$f_3(z)$	1	-1	∞	0	$-i$	i

Es gilt die *Kreisverwandtschaft*



Also gilt



$G_4 = f_3(G_3) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1 \ , \ Re \ z < 0\}$
$f(G) = f_4(G_4) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\} \backslash \{z = x \ : \ -1 \leq x \leq 0\}.$

f_1 ist konform in G, da Drehstreckung,
f_2 ist konform in G_2, da Streifenbreite $< 2\pi$,
f_3 ist konform in G_3, da $(-i) \notin G_3$,
f_4 ist konform in G_4, da $z = 0 \notin G_4$ und Winkelbereich $< \pi$

$\Rightarrow$ f ist konform in G , also:
f bildet G konform auf $f(G) = \{w \in \mathbb{C} \ : \ |w| < 1\} \backslash \{w = x \ : \ -1 \leq x \leq 0\}$ ab.

$\tilde{G} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \pi < Re \ z < 3\pi/2 \ , \ Im \ z > 0\} \quad \Rightarrow \quad f(\tilde{G}) = f(G)$, f ist auch in $\tilde{G}$ konform.

10. $v(x,y) = (x \cos y + y \sin y)e^{\lambda x} + 2xy \ , \ v \in C^2(\mathbb{R}^2)$,

notwendige Bedingung: $\Delta v = 0$ in $\mathbb{R}^2$.

$v_x(x,y) = (\cos y + \lambda x \cos y + \lambda y \sin y)e^{\lambda x} + 2y$
$v_{xx}(x,y) = (2\lambda \cos y + \lambda^2 x \cos y + \lambda^2 y \sin y)e^{\lambda x}$
$v_y(x,y) = (-x \sin y + \sin y + y \cos y)e^{\lambda x} + 2x$
$v_{yy}(x,y) = (-x \cos y + 2 \cos y - y \sin y)e^{\lambda x}$

$\Delta v = v_{xx}+v_{yy} = \Big(2(\lambda+1)\cos y+(\lambda^2-1)x\cos y+(\lambda^2-1)y\sin y\Big)\mathrm{e}^{\lambda x} = 0 \quad \forall \binom{x}{y} \in I\!R^2$

$\Rightarrow \quad \lambda = -1$

$\Rightarrow \quad v(x,y) = (x\cos y + y\sin y)\mathrm{e}^{-x} + 2xy$.

Bestimmung des zugehörigen Realteils:

Es gilt: $\quad u_x = v_y \ , \ u_y = -v_x \quad$ (Cauchy-Riemannsche DGL)

$\Rightarrow \quad u(x,y) = \int v_y \ dx + h(y) \quad \Rightarrow$

$$u(x,y) = \int \Big((-x\sin y + \sin y + y\cos y)\mathrm{e}^{-x} + 2x\Big)\ dx + h(y)$$
$$= ((1+x)\sin y - \sin y - y\cos y)\mathrm{e}^{-x} + x^2 + h(y) = (x\sin y - y\cos y)\mathrm{e}^{-x} + x^2 + h(y)\ ,$$

$u_y(x,y) = (x\cos y - \cos y + y\sin y)\mathrm{e}^{-x} + h'(y) = -v_x \quad \Rightarrow \quad h'(y) = -2y$

$\Rightarrow \quad h(y) = -y^2 + c$

$\Rightarrow \quad u(x,y) = (x\sin y - y\cos y)\mathrm{e}^{-x} + (x^2-y^2) + c \ \ , \ c \in I\!R$.

$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \Rightarrow$

$$f(z) = (x\sin y - y\cos y)\mathrm{e}^{-x} + (x^2-y^2) + c + i\Big((x\cos y + y\sin y)\mathrm{e}^{-x} + 2xy\Big)$$
$$= \Big((x^2-y^2) + 2ixy\Big) + (ix - y)(\cos y - i\sin y)\mathrm{e}^{-x} + c$$
$$= z^2 + iz\mathrm{e}^{-iy}\mathrm{e}^{-x} + c = z^2 + iz\mathrm{e}^{-(x+iy)} + c = z^2 + iz\mathrm{e}^{-z} + c$$

$\Rightarrow \quad f(z) = z^2 + iz\mathrm{e}^{-z} + c \quad , \quad c \in I\!R.$

11. a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(4+x^2)^3}\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos ax}{(4+x^2)^3}\ dx$, da gerader Integrand.

$f(z) = \dfrac{1}{(4+z^2)^3}$ ist holomorph in $\mathbb{C}\backslash\{\pm 2i\}$, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0.$

Also konvergiert nach Satz 16.71, S.699, das Integral, und es gilt für $a > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(4+x^2)^3}\ dx = \frac{1}{2}Re\Big\{2\pi i \mathrm{Res}\Big(\frac{\mathrm{e}^{iaz}}{(4+z^2)^3}, 2i\Big)\Big\} = Re\Big\{\frac{\pi i}{2!}\Big(\mathrm{e}^{iaz}(z+2i)^{-3}\Big)''_{|z=2i}\Big\}$$
$$= Re\Big\{\frac{\pi i}{2}\Big((ia(z+2i)^{-3} - 3(z+2i)^{-4})\mathrm{e}^{iaz}\Big)'_{|z=2i}\Big\}$$
$$= Re\Big\{\frac{\pi i}{2}\Big((-3ia(z+2i)^{-4} + 12(z+2i)^{-5} + (ia)^2(z+2i)^{-3} - 3ia(z+2i)^{-4})\mathrm{e}^{iaz}\Big)_{|z=2i}\Big\}$$
$$= Re\Big\{\frac{\pi i}{2}(-6ia(4i)^{-4} + 12(4i)^{-5} - a^2(4i)^{-3})\mathrm{e}^{-2a}\Big\}$$
$$= Re\Big\{\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{4^5}(24a + 12 + 16a^2)\mathrm{e}^{-2a}\Big\}$$
$$= \frac{\pi}{512}(4a^2 + 6a + 3)\mathrm{e}^{-2a}\ , \ \text{falls}\ \ a > 0.$$

$a < 0$: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(4+x^2)^3}\ dx = \int_0^\infty \frac{\cos(-a)x}{(4+x^2)^3}\ dx = \frac{\pi}{512}(4a^2 - 6a + 3)\mathrm{e}^{2a}$, falls $a < 0$.

Wegen gleichmäßiger Konvergenz des Integrals (da für die Funktion f gilt: Nennergrad $\geq 2+$ Zählergrad) gilt für $a = 0$: $I = \dfrac{3\pi}{512}$.

Damit erhalten wir insgesamt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(4+x^2)^3}\,dx = \frac{\pi}{512}\begin{cases}(4a^2-6a+3)\mathrm{e}^{2a} & \text{,falls } a<0\\ 3 & \text{,falls } a=0\\ (4a^2+6a+3)\mathrm{e}^{-2a} & \text{,falls } a>0.\end{cases}$$

Bemerkung: Da für die Fourier-Transformation einer *geraden* Funktion f gilt: (vgl. 15.5, S.593) $\quad F(f)(s) = 2\int_0^\infty f(t)\cos st\,dt$,

folgt aus obigem Ergebnis für die Fourier-Transformierte von $f(t) = \dfrac{1}{(4+t^2)^3}$:

$$F\Big(\frac{1}{(4+t^2)^3}\Big)(s) = \frac{\pi}{256}\begin{cases}(4s^2-6s+3)\mathrm{e}^{2s} & \text{,falls } s<0\\ 3 & \text{,falls } s=0\\ (4s^2+6s+3)\mathrm{e}^{-2s} & \text{,falls } s>0.\end{cases}$$

b) $\quad I = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4x+5)^2}\,dx$

Für $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ mit $p(z)=1$, $q(z) = (z^2+1)(z^2+4z+5)^2$ gilt: $\operatorname{grad} q \ge 2 + \operatorname{grad} p$.

Singularitäten von f in der oberen Halbebene:

$z_1 = i$ (einfacher Pol) , $z_2 = -2+i$ (zweifacher Pol), $q(x)\neq 0 \quad \forall x\in I\!R$.

Also gilt nach Satz 16.70, S.696:

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi i\Big(\operatorname{Res}\big(\frac{p}{q}, i\big) + \operatorname{Res}\big(\frac{p}{q}, -2+i\big)\Big)\\
&= 2\pi i\Big(\frac{1}{(z+i)(z^2+4z+5)^2}_{|z=i} + \Big(\frac{1}{(z^2+1)(z+2+i)^2}\Big)'_{|z=-2+i}\Big)\\
&= 2\pi i\Big(\frac{1}{(2i)(4i+4)^2} - \frac{2z(z+2+i)+2(z^2+1)}{(z^2+1)^2(z+2+i)^3}_{|z=-2+i}\Big)\\
&= 2\pi i\Big(\frac{1}{32i(1+i)^2} - \frac{2(-2+i)(2i)+2(4-4i)}{(4-4i)^2(2i)^3}\Big)\\
&= 2\pi i\Big(-\frac{1}{64} - \frac{-8i-4+8-8i}{16\cdot 8\cdot(-2i)(-i)}\Big)\\
&= 2\pi i\Big(-\frac{1}{64} + \frac{4}{16\cdot 16} - \frac{16i}{16\cdot 16}\Big) = \frac{\pi}{8}\ .
\end{aligned}$$

12. $\quad y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^t \sin t$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Anwendung der Laplace-Transformation auf die DGL ergibt:

$L(y'') - 2L(y') + 2L(y) = L(\mathrm{e}^t\sin t) \quad \Rightarrow$

$$(x^2L(y) - xy(0) - y'(0)) - 2(xL(y) - y(0)) + 2L(y) = \frac{1}{(x-1)^2+1}\ .$$

Mit $y(0)=1$, $y'(0)=0$, folgt hieraus:

$$(x^2-2x+2)L(y) = x-2+\frac{1}{x^2-2x+2} \quad\Rightarrow\quad L(y) = \frac{x-2}{x^2-2x+2} + \frac{1}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$\Rightarrow\quad y(t) = L^{-1}\Big(\frac{x-2}{x^2-2x+2}\Big) + L^{-1}\Big(\frac{1}{(x^2-2x+2)^2}\Big)\ .$$

Es gilt:

$$L^{-1}(\frac{x-2}{x^2-2x+2}) = L^{-1}(\frac{(x-1)-1}{(x-1)^2+1}) = \mathrm{e}^t\Big(L^{-1}(\frac{x}{x^2+1}) - L^{-1}(\frac{1}{x^2+1})\Big)$$

$$\Rightarrow \quad L^{-1}(\frac{x-2}{x^2-2x+2}) = \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t) \ .$$

Für $F(z) = \dfrac{1}{(z^2-2z+2)^2}$ gilt:

F ist holomorph in $\mathbb{C}\backslash\{1\pm i\}$ (zweifache Pole) , $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0.$

Also gilt nach Satz 16.76,S.710:

$$L^{-1}(\frac{1}{(x^2-2x+2)^2}) = \mathrm{Res}\Big(\frac{\mathrm{e}^{zt}}{(z^2-2z+2)^2}, 1+i\Big) + \mathrm{Res}\Big(\frac{\mathrm{e}^{zt}}{(z^2-2z+2)^2}, 1-i\Big)$$

$$= \Big(\frac{\mathrm{e}^{zt}}{(z-(1-i))^2}\Big)'_{|z=1+i} + \Big(\frac{\mathrm{e}^{zt}}{(z-(1+i))^2}\Big)'_{|z=1-i}$$

$$= \frac{(t(z-1+i)^2 - 2(z-1+i))\mathrm{e}^{zt}}{(z-1+i)^4}\Big]_{z=1+i} + \frac{(t(z-1-i)^2 - 2(z-1-i))\mathrm{e}^{zt}}{(z-1-i)^4}\Big]_{z=1-i}$$

$$= \frac{(t(2i)^2 - 4i)\mathrm{e}^{(1+i)t}}{(2i)^4} + \frac{(t(2i)^2 + 4i)\mathrm{e}^{(1-i)t}}{(2i)^4} = -\frac{1}{4}t\mathrm{e}^t(\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}) - \frac{1}{4}i\mathrm{e}^t(\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it})$$

$$\Rightarrow \quad L^{-1}(\frac{1}{(x^2-2x+2)^2}) = -\frac{1}{2}t\mathrm{e}^t\cos t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^t\sin t \ .$$

Zusammen erhalten wir dann:

$$y(t) = \mathrm{e}^t\Big(\cos t - \sin t - \frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}\sin t\Big)$$

$\Rightarrow \quad y(t) = \dfrac{1}{2}(2\cos t - \sin t - t\cos t)\mathrm{e}^t$ ist die gesuchte Lösung.

Zusatzaufgaben III/IV

1. Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{V} : I\!R^2 \to I\!R^2$ mit $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 - \mathrm{e}^{-x} \\ 2xy - \sin y \end{pmatrix}$.
Zeigen Sie, daß $\vec{V}$ in $I\!R^2$ ein Potentialfeld ist, und bestimmen Sie alle Potentiale von $\vec{V}$ in $I\!R^2$. Berechnen Sie das Kurvenintegral von $\vec{V}$ längs der Kurve
$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ : \ x = 1 + \cos t \ , \ y = \sin t \ , \ t \in [0, \pi] \right\}$
a) direkt , b) mit Hilfe des Potentials , c) mit Hilfe des Integralsatzes von Green.

2. Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{V} : I\!R^3 \to I\!R^3$ mit

$$\vec{V}(x,y,z) = \left(\frac{-yz}{x^2+y^2} \ , \ \frac{xz}{x^2+y^2} \ , \ \arctan\frac{y}{x} \right)^T \quad , \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in I\!R^3 \ : \ x > 0 \right\}.$$

a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} \vec{V}$. Wo besitzt $\vec{V}$ Potentiale ? Berechnen Sie - falls möglich - ein Potential von $\vec{V}$ in G.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $\vec{V}$ längs der Kurve
$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ : \ x = 2\cos t \ , \ y = 2 \sin t \ , \ z = t \ , \ t \in [0, \frac{\pi}{4}] \right\}$
direkt und mit Hilfe des *Potentials*.
Hinweis: Es gilt: $\arctan\frac{1}{x} = \pm\frac{\pi}{2} - \arctan x \quad \forall x \neq 0$, (+ für $x > 0$, − für $x < 0$).

3. Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{V} : I\!R^3 \to I\!R^3$ mit $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x - y \\ x - z \\ y - z \end{pmatrix}$ und die Fläche $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ : \ x^2 + y^2 \leq 4 \ , \ z = 4 - (x^2 + y^2) \right\}$.
Berechnen Sie den Fluß von $\vec{V}$ durch die Fläche F in Richtung der Normalen $\vec{n}$, die eine positive $z-$Koordinate hat
a) direkt , b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes (falls möglich) ,
c) mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

4. Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{V} : I\!R^3 \to I\!R^3$ mit $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+z \\ y-2xy \\ x-z \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, daß $\vec{V}$ solenoidal in $I\!R^3$ ist, und geben Sie ein Vektorpotential an.
b) Berechnen Sie den Fluß von $\vec{V}$ durch die Fläche
$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;:\; x^2+y^2 = 4 \;,\; 0 \le z \le 1 \right\}$ in Richtung der vom Ursprung wegzeigenden Normalen $\vec{n}$ *direkt* und mit Hilfe des *Integralsatzes von Gauß.*

5. Bestimmen Sie - falls möglich - alle Lösungen der DGL $xy'' + 2y' - xy = \mathrm{e}^{-x}$ in $(0,\infty)$, die für $x \to \infty$ beschränkt bleiben.

6. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL $y'' + 2xy' + 2y = 0$ mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes. Geben Sie für die Fundamentallösungen jeweils den Konvergenzradius an. *Eine* Fundamentallösung kann in geschlossener Form angegeben werden. Bestimmen Sie diese Form.

7. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL $(1+x^2)y'' + 3xy' + y = 0.$
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst *eine* Lösung (mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$) mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes. Diese Lösung kann in geschlossener Form angegeben werden. Es gilt: $\dfrac{(-1)^k}{2^k} \cdot \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{k!} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ k \end{pmatrix}$ für $k \ge 1$.

8. Bestimmen Sie - falls möglich - alle Lösungen der DGL
$x^2y'' + 2x^2y' + (x^2-2)y = x^2\mathrm{e}^{-x}$ in $(0,\infty)$, die für $x \to \infty$ beschränkt bleiben.

9. Bestimmen Sie die Lösung der folgenden ARWA (Anfangs-Randwert-Aufgabe)
$u_{tt} = u_{xx} - 2u_t \quad , \quad (0 < x < \pi \;,\; t > 0),$
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \;,$
$u(x,0) = u_t(x,0) = \sin x.$

10. Bestimmen Sie die Lösung der folgenden ARWA (Anfangs-Randwert-Aufgabe)
$u_t = u_{xx} + 4u_x \quad , \quad (0 < x < 1 \;,\; t > 0),$
$u(0,t) = u(1,t) = 0 \;,$
$u(x,0) = \mathrm{e}^{-2x}\sin(\pi x).$

11. Sei $G = \{z \in \mathbb{C} \;:\; 0 < Re\; z < \frac{\pi}{2} \;,\; Im\; z > 0\}$ und $f : G \to \mathbb{C}$ mit
$f(z) = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{-iz}-1}{\mathrm{e}^{-iz}+1}\right)^4.$
Bestimmen Sie das Bild $f(G)$ (mit Skizze), und untersuchen Sie, ob f in G konform ist.

12. Sei $G = \{z \in \mathbb{C} \; : \; |z| < 1 \; , \; 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$ und $f : G \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \left(\frac{iz^2+1}{z^2+i}\right)^4$.
Bestimmen Sie das Bild $f(G)$ (mit Skizze), und untersuchen Sie, ob f in G konform ist.

13. Für welche Funktionen $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ ist $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
$v(x,y) = y\cos x \cosh y - x \sin x \sinh y + (\sin x)\varphi(y)$
der Imaginärteil einer in $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion $f = u + iv$?
Bestimmen Sie diese φ und die zugehörigen Realteile u. Geben Sie f als Funktion von z an.

14. Berechnen Sie - falls möglich - mit Hilfe des Residuensatzes für alle $a > 0$ den Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax + x \sin ax}{(x^2+4)(x^2+1)^2}\, dx$.

15. Berechnen Sie - falls möglich - mit Hilfe des Residuensatzes für alle $a \in \mathbb{R}$ den Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+4)^2}\, dx$.

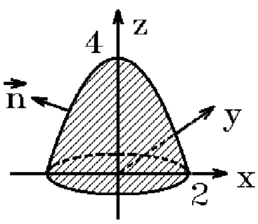
16. Bestimmen Sie die Lösung der AWA (Anfangswert-Aufgabe)
$y'' - 2y' + 5y = 2e^t \cos^2 t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, mit Hilfe der Laplace-Transformation.
Benutzen Sie - falls möglich - bei der Rücktransformation den Residuensatz.

Ergebnisse der Zusatzaufgaben III/IV

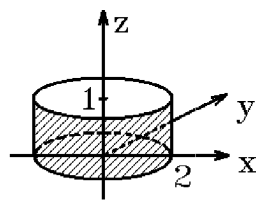
1. Potentiale: $u(x,y) = xy^2 + \mathrm{e}^{-x} + \cos y + c\ ,\ c \in I\!R,$
Kurvenintegral: $1 - \mathrm{e}^{-2}.$

2. Potentiale existieren in allen einfach zusammenhängenden Gebieten $\subset I\!R^3 \setminus \{(y,z) - \text{Ebene}\}$.
Potential in G: $u(x,y,z) = z \arctan \dfrac{y}{x}\ ,$
Kurvenintegral: $\dfrac{\pi^2}{16}.$

3. Fluß: 0



4. Vektorpotential z.B.:
$W_1 = yz - 2xyz - xy\ ,\ W_2 = -x^2 z - z^2/2\ ,\ W_3 = 0\ ,$
Fluß: $4\pi.$



5. $y(x) = \left(\dfrac{c}{x} - \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}\ ,\ c \in I\!R.$

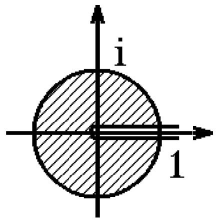
6. $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-x^2} + c_2 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n! 4^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\ ,\ c_i \in I\!R\ ,\ R = \infty$ (Konvergenzradius).

7. $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Big(c_1 + c_2 \ln(x + \sqrt{1+x^2})\Big)\ ,\ c_i \in I\!R.$

8. $y(x) = c_1 x^2 \mathrm{e}^{-x} + \dfrac{c_2}{x}\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{3}x^2 \mathrm{e}^{-x} \ln x\ ,\ c_i \in I\!R.$

9. $u(x,t) = (1 + 2t)\mathrm{e}^{-t} \sin x\ .$

10. $u(x,t) = \mathrm{e}^{-2x} \sin(\pi x)\, \mathrm{e}^{-(\pi^2+4)t}.$



11. $f(G) = \{w \in \mathbb{C} \ : \ |w| < 1\} \backslash \{w \in \mathbb{R} \ : \ 0 \le w \le 1\}$,
f konform in G.

12. Gleiches Ergebnis wie in Aufgabe 11.

13. $\varphi(y) = c_1 \mathrm{e}^{y} + c_2 \mathrm{e}^{-y} \quad , \quad c_i \in \mathbb{R}$,
$f(z) = z \cos z - c_1 \mathrm{e}^{-iz} + c_2 \mathrm{e}^{iz} + c_3 \quad , \quad c_i \in \mathbb{R}$.

14. $I(a) = \pi\Big(\dfrac{6a-1}{36}\mathrm{e}^{-a} + \dfrac{1}{12}\mathrm{e}^{-2a}\Big) \quad , \quad a > 0.$

15. $I(a) = \dfrac{\pi}{32}\begin{cases} -1 + (1-a)\mathrm{e}^{2a} & \text{,falls } a < 0 \\ \ \ 0 & \text{,falls } a = 0 \\ 1 - (1+a)\mathrm{e}^{-2a} & \text{,falls } a > 0. \end{cases}$

16. $y(t) = \dfrac{1}{4}(1 + 2\sin 2t - \cos 2t + t \sin 2t)\mathrm{e}^{t}.$