Bezeichnungen

A, B seien Aussagen :
$A \Rightarrow B$ "aus A folgt B",
$A \Leftrightarrow B$ "A ist äquivalent zu B" , dh. $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$,
$A := B$ "A wird durch B definiert",
$\neg A$ "Negation von A".

Beispiel 0.1 : A : "$x < 1$" , B : "$x < 2$" , dann gilt $A \Rightarrow B$.
Beispiel 0.2 : A : "$x > 0$" , B : "$(-x) < 0$" , dann gilt $A \Leftrightarrow B$.

M, N seien Mengen, $\emptyset$ bezeichne die leere Menge,
$x \in M$ "x ist Element von M", "x aus M",
$x \notin M$ "x nicht aus M",
$M \cup N := \{x : x \in M \ \ oder(\vee) \ \ x \in N\}$ (Vereinigung),
$M \cap N := \{x : x \in M \ \ und(\wedge) \ \ x \in N\}$ (Durchschnitt),
$M \backslash N := \{x \in M : x \notin N\}$ (Differenz).

$M_1, M_2, \cdots, M_n$ seien Mengen :

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n \ ,$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i := M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_n \ .$$

$\forall \ x \in M$ "für alle $x \in M$",
$\exists \ x \in M$ "es existiert ein $x \in M$",
$\dot{\exists} \ x \in M$ "es existiert genau ein $x \in M$".

$M \subset N$ "M ist Teilmenge von N" $\Leftrightarrow \forall \ x \in M$ gilt $x \in N$,
$M = N$ $\Leftrightarrow M \subset N$ und $N \subset M$,
$M \subset\neq N$ "M echte Teilmenge von N"
$\Leftrightarrow$ $\{\forall \ x \in M$ gilt $x \in N$, $\exists \ x \in N$ mit $x \notin M\}$.
Sei $M \subset N$, dann heißt $M^C := N \backslash M$ das Kompliment von M bzg. N.

$\emptyset$ heißt leere Menge.

Beispiel 0.3 : $M := \{1, 3\}$, $N := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dann gilt :
$M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M \cap N = \{1, 3\}$,
$M \subset\neq N$, $M^C = \{2, 4, 5\}$.

Beispiel 0.4 : $M := \{1, 2\}$, $N := \{5, 6\}$, dann gilt :
$M \cap N = \emptyset$, $M \cup N = \{1, 2, 5, 6\}$, $M \not\subset N$, $N \not\subset M$, $\nexists \ x \in M$ mit $x \in N$.

I Reelle Zahlen, Polynome, Komplexe Zahlen

1 Reelle Zahlen

Bezeichnungen

$I\!N := \{1, 2, 3, \ldots\}$ heißt Menge der *natürlichen Zahlen*,
$I\!N_0 := \{0, 1, 2, \ldots\} = I\!N \cup \{0\}$.

Es gilt: $n, m \in I\!N \Rightarrow n + m \in I\!N$, $n < m \Rightarrow n - m \notin I\!N$, aber $n - m \in Z\!\!\!Z$.

$Z\!\!\!Z := \{p : p \in I\!N_0 \text{ oder } (-p) \in I\!N_0\}$ heißt Menge der *ganzen Zahlen*.

Es gilt: $p, q \in Z\!\!\!Z \Rightarrow p+q \in Z\!\!\!Z$, $p-q \in Z\!\!\!Z$, $pq \in Z\!\!\!Z$, aber im allg. $\frac{p}{q} \notin Z\!\!\!Z$ $(q \neq 0)$.
Aber es gilt: $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in Z\!\!\!Z,\ q \in Z\!\!\!Z \backslash \{0\}\}$ heißt Menge der *rationalen Zahlen*.

Es gilt: $r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow r_1 + r_2 \in \mathbb{Q}$, $r_1 - r_2 \in \mathbb{Q}$, $r_1 r_2 \in \mathbb{Q}$, $\frac{r_1}{r_2} \in \mathbb{Q}$ $(r_2 \neq 0)$,
aber im allg. $\sqrt{r_1} \notin \mathbb{Q}$.

Beispiel 1.1 : Behauptung: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Indirekter Beweis: Annahme $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit p und q haben keinen gemeinsamen Teiler > 1 (*)
$\Rightarrow 2q^2 = p^2$ $\Rightarrow p^2$ durch 2 teilbar $\Rightarrow p$ durch 2 teilbar $\Rightarrow p = 2r$ mit $r \in Z\!\!\!Z$ $\Rightarrow$ $2q^2 = 4r^2$ $\Rightarrow q^2 = 2r^2$ $\Rightarrow q^2$ durch 2 teilbar $\Rightarrow q$ durch 2 teilbar $\Rightarrow p$ und q haben 2 als gemeinsamen Teiler $\Rightarrow$ Widerspruch zu (*) $\Rightarrow$ Annahme falsch $\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

$\sqrt{2}$ ist also eine *irrationale Zahl*.

Wir müssen noch eine Aussage beweisen, die wir im vorigen Beweis benutzt haben:

Behauptung 1.2: Für $p \in Z\!\!\!Z$ gilt: $\{p$ durch 2 teilbar $\Leftrightarrow p^2$ durch 2 teilbar $\}$.

Beweis:
a) "$\Rightarrow$" Da p durch 2 teilbar $\Rightarrow p = 2r$ mit $r \in Z\!\!\!Z$ $\Rightarrow p^2 = 4r^2$ $\Rightarrow p^2$ durch 2 teilbar.
b) "$\Leftarrow$" Vor.: p^2 durch 2 teilbar Beh.: p durch 2 teilbar.
(Indirekter Beweis) Annahme: p nicht durch 2 teilbar $\Rightarrow p = 2r + 1$ mit $r \in Z\!\!\!Z$ $\Rightarrow$ $p^2 = (4r^2 + 4r) + 1$ $\Rightarrow p^2$ nicht durch 2 teilbar $\Rightarrow$ Wid. zur Vor. $\Rightarrow p$ durch 2 teilbar.

$\mathbb{R} := \mathbb{Q} \cup \{irrationale Zahlen\}$ heißt Menge der *reellen Zahlen.*

Axiome in $\mathbb{R}$ (1.3)

1) $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}$ *(Addition)*
   a) $a + b = b + a$ (Kommutativität)
   b) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Assoziativität)
   c) $\forall\ a, b \in \mathbb{R}\ \dot{\exists}\ x \in \mathbb{R}$ mit $a + x = b$ $(x := b - a)$

bzg. $+$ ist $\mathbb{R}$ eine *abelsche Gruppe.*

2) $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \Rightarrow ab \in \mathbb{R}$ *(Multiplikation)*
   a) $ab = ba$ (Komm.)
   b) $(ab)c = a(bc)$ (Assoz.)
   c) $\forall\ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, b \in \mathbb{R}\ \dot{\exists}\ x \in \mathbb{R}$ mit $ax = b$ $(x := \dfrac{b}{a})$

bzg. $\bullet$ ist $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ eine *abelsche Gruppe.*

3) $a(b + c) = ab + ac$ (Distributivgesetz).

$\mathbb{R}$ ist mit diesen Eigenschaften 1), 2), 3) ein *Körper.*

In $\mathbb{R}$ existiert eine *Ordnungsrelation* **(1.4)**
dh. $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a < b$ oder $a > b$ oder $a = b$ mit den Eigenschaften
   a) $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$
   b) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ $(\forall\ c \in \mathbb{R})$
   c) $a < b$ und $c > 0 \Rightarrow ac < bc$.

$\mathbb{R}$ ist ein *angeordneter Körper.*

Archimedisches Axiom (1.5)

$\forall\ a \in \mathbb{R}\ \exists\ n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$.

Vollständigkeitsaxiom (1.6)

$A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}$ mit $\forall\ a \in A, b \in B$ gilt $a \leq b$
$\Rightarrow\ \exists\ c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq b$ für alle $a \in A, b \in B$.

Anwendungen dieser Definitionen und Axiome

Bezeichnung 1.7 :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad , \qquad (a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}).$$

Es gilt: $$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1} \ .$$

Bezeichnung 1.8 : *n-Fakultät*

$$0! := 1\ , \qquad n! := \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)n\ , \quad (n \in I\!N).$$

Bezeichnung 1.9 : *Binomialkoeffizient "n über k"*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \qquad (n, k \in I\!N_0, k \leq n),$$
$$\binom{n}{k} := 0 \quad \text{für } k > n \quad , \quad (n \in I\!N_0, k \in I\!N).$$

Es gilt (1.10):

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)\cdots 1}{k(k-1)\cdots \quad \cdot \quad 1 \quad \cdot \quad (n-k)\cdots 1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \ .$$

Beispiel: $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$.

Es gilt (1.11): $\binom{n}{k} \in I\!N_0$, denn:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad \text{und}$$

$$\binom{n}{k} = [\cdots \underbrace{[\underbrace{[\underbrace{[\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}]}_{\in I\!N} \frac{(n-2)}{3}]}_{\in I\!N} \frac{(n-3)}{4}]}_{\in I\!N \quad usw} \frac{\cdots (n-k+1)}{\cdots k}] \ .$$

Das ist auch die zweckmäßigste Form, um $\binom{n}{k}$ zu berechnen.

Beispiel : $\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 3 \cdot 44 \approx 14 Mill.$

Das entspricht der Anzahl der Möglichkeiten, beim Lotto von 49 Zahlen 6 Zahlen anzukreuzen.

Allgemein gilt:

$\binom{n}{k}$ *ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Elementen k auszuwählen*

Es gilt (1.12): $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ und $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

Denn: $$\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}=\frac{n!(n+1-k+k)}{k!(n+1-k)!}=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\ .$$

Mit Hilfe dieser Eigenschaften wird das *Pascalsche Dreieck* aufgebaut :

Pascalsches Dreieck

$n \in I\!N_0$	$\binom{n}{k}$
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1

In Anlehnung an die Eigenschaft (1.10) definieren wir auch für reelle α und $k \in I\!N$:

Definition 1.13 : *Verallgemeinerter Binomialkoeffizient*

$$\binom{\alpha}{0}:=1\ ,\quad \binom{\alpha}{k}:=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\quad ,\qquad (\alpha\in I\!R,\ k\in I\!N).$$

Es gilt ebenfalls **(1.14)** $\boxed{\binom{\alpha}{k}+\binom{\alpha}{k-1}=\binom{\alpha+1}{k}}$

Beispiel :

$$\begin{aligned}\binom{1/2}{k}&=\frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)\cdots(1/2-k+1)}{k!}\\ &=\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1(1-2)(1-4)\cdots(1-2k+2)}{k!}\\ &=\frac{(-1)^{k-1}}{2^k}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-3)}{k!}=\frac{(-1)^{k-1}}{2^k}\cdot\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots(2k-2)(2k-1)2k}{2\cdot4\cdots2k\cdot k!(2k-1)}\\ &=\frac{(-1)^{k-1}}{2^k}\cdot\frac{(2k)!}{2^kk!k!(2k-1)}=\frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{4^k(k!)^2(2k-1)}\quad (k\geq1).\end{aligned}$$

$$\binom{1/2}{0}=1\quad ,\quad \binom{1/2}{1}=\frac{1}{2}\quad ,\quad \binom{1/2}{2}=-\frac{1}{8}\quad ,\quad \binom{1/2}{3}=\frac{1}{16}\ .$$

Vollständige Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage, die von $n \in I\!N_0$ abhängt.
Gilt nun für ein $n_0 \in I\!N_0$
a) $A(n_0)$ ist richtig *(Induktionsanfang)*,
b) aus $A(n)$ folgt auch $A(n+1)$, $(n \geq n_0)$, *(Induktionsschluß von n auf $n+1$)*
$\Rightarrow$ $A(n)$ ist richtig für alle $n \in I\!N_0$ mit $n \geq n_0$.

Beispiel 1.15 : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \quad \forall n \in I\!N.$

Beweis: $n = 1$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$,

$$n \to n+1: \quad \sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} .$$

Beispiel 1.16 : *Binomischer Lehrsatz*

Seien $a, b \in I\!R, n \in I\!N$, dann gilt

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= a^n + n a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + b^n .\end{aligned}$$

Beweis: $n = 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = (a+b)^1$,

$$n \to n+1: \quad \text{Vor.:} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\text{Beh.:} \quad (a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k .$$

Beweis: $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = a(a+b)^n + b(a+b)^n$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \quad , \quad \text{wegen Eig. (1.12).} \end{aligned}$$

Beispiele hierzu:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ,$$

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k\ gerade}\binom{n}{k} - \sum_{k\ ungerade}\binom{n}{k}$$
$$= \sum_{l=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2l} - \sum_{l=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n}{2l+1} = 0$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{l=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2l} = \sum_{l=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n}{2l+1} = 2^{n-1} \quad , \quad ([x] \text{ ist die größte ganze Zahl } \leq x).$$

Beispiel 1.17 : *Bernoullische Ungleichung*

Für alle $x \in I\!R$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in I\!N$ gilt

$(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Beweis: $n = 1$: $(1+x) \geq 1 + x$,

$n \to n+1$: $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$, da $1 + x \geq 0$,

$= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$, da $nx^2 \geq 0$.

Weitere Rechenregeln für Ungleichungen (1.18)

Seien $a, b, c, d \in I\!R$, dann gilt:

a) $a < b$ und $c < d \;\Rightarrow\; a + c < b + d$
b) $a < b$ und $c < 0 \;\Rightarrow\; ac > bc$
c) $0 < a < b \;\Rightarrow\; 0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$
d) $a > 0, b > 0 \;\Rightarrow\; [a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2]$.

Beweis zu a): $a + c < b + c < b + d$
zu b): $(-c) > 0 \;\Rightarrow\; a(-c) < b(-c) \;\Rightarrow\; bc - ac < 0 \;\Rightarrow\; bc < ac$
zu c): $0 < a < b \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} > 0, \frac{1}{b} > 0 \;\Rightarrow\; 1 < \frac{b}{a}$ *und* $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
zu d): $0 < a < b \;\Rightarrow\; a^2 < ab, ab < b^2 \;\Rightarrow a^2 < b^2$
$a > 0, b > 0, a^2 < b^2 \;\Rightarrow\; a < b$, denn sonst wäre $a \geq b \;\Rightarrow\; a^2 \geq b^2$ (Wid.).

Absoluter Betrag

Definition 1.19 : Für $a \in I\!R$ sei $|a| := \begin{cases} a & \text{, falls } a \geq 0 \\ -a & \text{, falls } a < 0 \end{cases}$
der (absolute) *Betrag* von a.

Es gelten folgende Eigenschaften

Satz 1.20 : Seien $a, b \in I\!R$, dann gilt

a) $|a| \geq 0$, $|a| = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0$
b) $|a| = \max\{a, -a\}$
c) $|ab| = |a||b|$

d) $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$, $(b \neq 0)$
e) $|a+b| \leq |a| + |b|$ *(Dreiecksungleichung)*
f) $||a| - |b|| \leq |a+b|$.

Beweis: zu c) $|ab| = \begin{cases} ab & , \text{falls } ab \geq 0 \\ -ab & , \text{falls } ab < 0 \end{cases}$

$\alpha)$ $ab \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \{[a \geq 0 \text{ und } b \geq 0] \text{ oder } [a \leq 0 \text{ und } b \leq 0]\}$
$\Rightarrow \quad \{[a = |a| \text{ und } b = |b|] \text{ oder } [a = -|a| \text{ und } b = -|b|]\} \quad \Rightarrow \quad |ab| = |a||b|$

$\beta)$ $ab < 0 \quad \Rightarrow \quad \{[a > 0 \text{ und } b < 0] \text{ oder } [a < 0 \text{ und } b > 0]\}$
$\Rightarrow \quad \{[a = |a| \text{ und } b = -|b|] \text{ oder } [a = -|a| \text{ und } b = |b|]\} \quad \Rightarrow \quad |ab| = |a||b|$

zu d) $|\frac{a}{b}| = |a \cdot \frac{1}{b}| = |a||\frac{1}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$, denn $|\frac{1}{b}| = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{b} & , \text{falls } b \geq 0 \\ -\frac{1}{b} & , \text{falls } b < 0 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{|b|}$

zu e) Für $a + b \geq 0$ gilt $|a+b| = a + b \leq |a| + |b|$ (nach b))
Für $a + b < 0$ gilt $|a+b| = -(a+b) = -a - b \leq |a| + |b|$ (nach b))

zu f) $|a| = |a + b - b| \leq |a+b| + |b|$
$|b| = |b + a - a| \leq |a+b| + |a|$
$\Rightarrow \quad \{|a| - |b| \leq |a+b| \text{ und } |b| - |a| \leq |a+b|\}$
$\Rightarrow \quad \{|a| - |b| \leq |a+b| \text{ und } -(|a| - |b|) \leq |a+b|\} \quad \Rightarrow \quad ||a| - |b|| \leq |a+b|$.

Anwendungen und Beispiele

Beispiel 1.21 : *Ungleichung zwischen arithmetischem- und geometrischem Mittel*

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $b > 0$, dann gilt

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \ , \quad (\tfrac{a+b}{2} \text{ heißt arithmetisches-, } \sqrt{ab} \text{ heißt geometrisches Mittel}).$$

Beweis: Da $a > 0, b > 0$, gilt
$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \Leftrightarrow \quad (\frac{a+b}{2})^2 \geq ab \quad \Leftrightarrow \quad (a+b)^2 \geq 4ab$
$\Leftrightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-b)^2 \geq 0.$

Beispiel 1.22 : *Schwarzsche Ungleichung*

Seien $n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$, dann gilt

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \ .$$

Beweis: Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i + \mu b_i)^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\lambda\mu \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \mu^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \ .$$

Mit $A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \quad B = \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \quad C = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ gilt also
$\lambda^2 A + \mu^2 B + 2\lambda\mu C \geq 0 \quad (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}).$

Zu zeigen ist: $|C| \leq \sqrt{AB}$.

Setze $\lambda = \sqrt{B}$, $\mu = \begin{cases} -\sqrt{A} & \text{, falls } C \geq 0 \\ \sqrt{A} & \text{, falls } C < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \mu C = -\sqrt{A}|C|$ also $\quad 2AB - 2\sqrt{AB}|C| \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{AB} \geq |C|$.

Beispiel 1.23 : *Verallgemeinerte Dreiecksungleichung*

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gilt

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \; .$$

Beweis: $n = 1$: $|a_1| \leq |a_1|$,

$$n \to n+1: \quad |\sum_{i=1}^{n+1} a_i| = |\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}| \leq |\sum_{i=1}^{n} a_i| + |a_{n+1}|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| + |a_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |a_i| \; .$$

Beispiel 1.24 : *Ungleichung zwischen arithm.- und geometrischem Mittel*

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{R}$ mit $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \; .$$

Beweis: Sei $\lambda = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ und $b_i = \frac{a_i}{\lambda}$,

dann ist zu zeigen: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i \geq \lambda$,

wobei $b_1 b_2 \cdots b_n = \frac{a_1}{\lambda} \cdot \frac{a_2}{\lambda} \cdots \frac{a_n}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^n} \cdot a_1 a_2 \cdots a_n = 1$,

also ist zu zeigen $\quad \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i \geq 1$ für $b_1 b_2 \cdots b_n = 1$, $\quad b_i > 0$.

Beweis durch vollständige Induktion:

$n = 1$: $b_1 = 1$, $\frac{1}{1} \sum_{i=1}^{1} b_i = 1$,

$n \to n+1$: Sei $b_1 b_2 \cdots b_n b_{n+1} = 1$

$\Rightarrow$ entweder alle $b_i = 1$, also $\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} b_i = 1$ oder ein $b_j > 1$ und ein $b_k < 1$.

Sei o.B.d.A. $b_1 > 1$ und $b_2 < 1$ (sonst umnumerieren)

$\Rightarrow \quad (b_1 - 1)(1 - b_2) > 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 + b_2 > 1 + b_1 b_2$

$$\Rightarrow \quad b_1 + b_2 + \cdots + b_{n+1} > 1 + \underbrace{b_1 b_2 + b_3 + \cdots b_{n+1}}_{n \text{ Summanden mit Produkt } 1} \; .$$

Nach Indukt.-Vor. gilt also $b_1 + b_2 + \cdots + b_{n+1} > 1 + n$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} b_i > 1.$

Dualzahlen

Für einige Anwendungen (z.B. Computer) ist es sinnvoll, mit anderen Zahlensystemen als mit dem Dezimalsystem zu arbeiten. Beispielhaft wollen wir hier auf das *Dualsystem* eingehen:

Ziffern: $0, 1$,
Basis: 2 .

Beispiel: $1011_{(2)} \hat{=} 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 8+2+1 = 11_{(10)}$.

Erzeugung von Dualzahlen aus Dezimalzahlen

Beispiel:

$5 : 2 = 2$ *Rest* 1

$2 : 2 = 1$ *Rest* 0

$1 : 2 = 0$ *Rest* 1

Schreibt man die Reste von unten nach oben auf, so erhält man
$101_{(2)} \hat{=} 5_{(10)}$.

Beispiel:

$22 : 2 = 11$ *Rest* 0

$11 : 2 = 5$ *Rest* 1

$5 : 2 = 2$ *Rest* 1

$2 : 2 = 1$ *Rest* 0

$1 : 2 = 0$ *Rest* 1

also $10110_{(2)} \hat{=} 22_{(10)}$

denn: $$\underbrace{(\underbrace{(\underbrace{(\underbrace{(0\cdot 2+1)}_{1}\cdot 2+0)}_{2}\cdot 2+1)}_{5}\cdot 2+1)}_{11}\cdot 2+0=22\ .$$

Rechnen mit Dualzahlen

" + " : $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$, $1+1=10$
" $\bullet$ " : $0\cdot 0=0$, $0\cdot 1=0$, $1\cdot 0=0$, $1\cdot 1=1$.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Beispiele:

Addition	Subtraktion	Multiplikation	Division

$$
\begin{array}{r}
101\\
+\ \ 10110\\ \hline
11011
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
10110\\
-\ \ 101\\ \hline
10001
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\underline{10110\cdot 101}\\
10110\\
\underline{\ 101100\ \ }\\
1101110
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
10110 : 101 = 100.0\overline{1100}\\
\underline{101}\\
\ \ \ 01000\\
\ \ \ \underline{\ \ \ 101}\\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ 110\\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{101}\\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 10
\end{array}
$$

(dezimal $5 + 22 = 27$, $22 - 5 = 17$, $22 \cdot 5 = 110$, $22 : 5 = 4.4$).

Die Subtraktion kann folgendermaßen auf die Addition zurückgeführt werden:

a, b seien zwei n-stellige Dualzahlen mit $a > b$.
$\tilde{b}$ sei das Komplement von b, dh: $\tilde{b}$ entstehe aus b durch Vertauschen von 0 und 1, dann gilt:

$b + \tilde{b} = 11...1$.

Addiert man zu $b + \tilde{b}$ die Zahl 1, so erhält man $b + \tilde{b}\ + 1 = 100...0$ ((n+1)-stellige Dualzahl).

Beispiel: $b = 001101_{(2)}$

$$
\begin{array}{rl}
001101 & (b)\\
110010 & (\tilde{b})\\
000001 & (1)\\ \hline
1000000 & (b + \tilde{b}\ + 1)\ .
\end{array}
$$

Also folgt: $b = 100...0 - \tilde{b} - 1 \Rightarrow \quad a - b = a + \tilde{b} + 1 - 100...0.$

(Die Subtraktion der Zahl 100...0 bedeutet die Streichung der ersten 1).

Beispiel: $a = 10110_{(2)}, \quad b = 00101_{(2)}, \quad a - b = 10001_{(2)}$

$$
\begin{array}{rl}
10110 & (a)\\
11010 & (\tilde{b})\\
00001 & (1)\\ \hline
110001 & (a + \tilde{b} + 1) \qquad \Rightarrow \qquad a - b = 10001_{(2)}\ .
\end{array}
$$

Darstellung rationaler Zahlen im Dualsystem

Beispiele:

$3.25 = 3 + \frac{25}{100} = 3 + \frac{1}{4}$
$3_{(10)} \hat{=} 11_{(2)}$ und $\frac{1}{4}_{(10)} = 2^{-2} \hat{=} 0.01_{(2)} \quad \Rightarrow \quad 3.25_{(10)} \hat{=} 11.01_{(2)}$

$\frac{1}{3}_{(10)} \hat{=} 1_{(2)} : 11_{(2)} = 0.\overline{01}_{(2)}$.

Rationale Zahlen $\hat{=}$ periodische Dualzahlen, dh. die Darstellung in Computern ist nicht exakt.

Algorithmus zur Darstellung rationaler Zahlen im Dualsystem

Sei $\frac{p}{q}$ eine rationale Zahl zwischen 0 und 1 , $a_1, a_2, \ldots$ seien die Ziffern (nach dem Komma) im Dualsystem. Dann gilt

$$\frac{p}{q} = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots .$$

Multiplikation mit $2q$ ergibt

$$2p = a_1 q + q(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \cdots) = a_1 q + r_1 \quad (0 \leq r_1 < q) \text{ mit}$$

$$\frac{r_1}{q} = \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \cdots .$$

Analog erhält man

$2r_1 = a_2 q + r_2$, $2r_2 = a_3 q + r_3$, usw.

Allg.: $2r_n = a_{n+1} q + r_{n+1}$, $r_0 = p$ $(n \in \mathbb{N}_0 \ , \ 0 \leq r_i < q)$.

Mit Hilfe dieser Vorschrift lassen sich die Ziffern a_i berechnen.

Beispiel

a) $\frac{7}{8}_{(10)} = 0.\cdots_{(2)}$
$2 \cdot 7 = 14 = 1 \cdot 8 + 6$, $2 \cdot 6 = 12 = 1 \cdot 8 + 4$, $2 \cdot 4 = 8 = 1 \cdot 8 + 0$
$\Rightarrow \quad \frac{7}{8}_{(10)} \hat{=} 0.111_{(2)}$.

b) $\frac{1}{3}_{(10)} = 0.\cdots_{(2)}$
$2 \cdot 1 = 2 = 0 \cdot 3 + 2$, $2 \cdot 2 = 4 = 1 \cdot 3 + 1$, $2 \cdot 1 = 2 = 0 \cdot 3 + 2$
$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}_{(10)} \hat{=} 0.\overline{01}_{(2)}$.

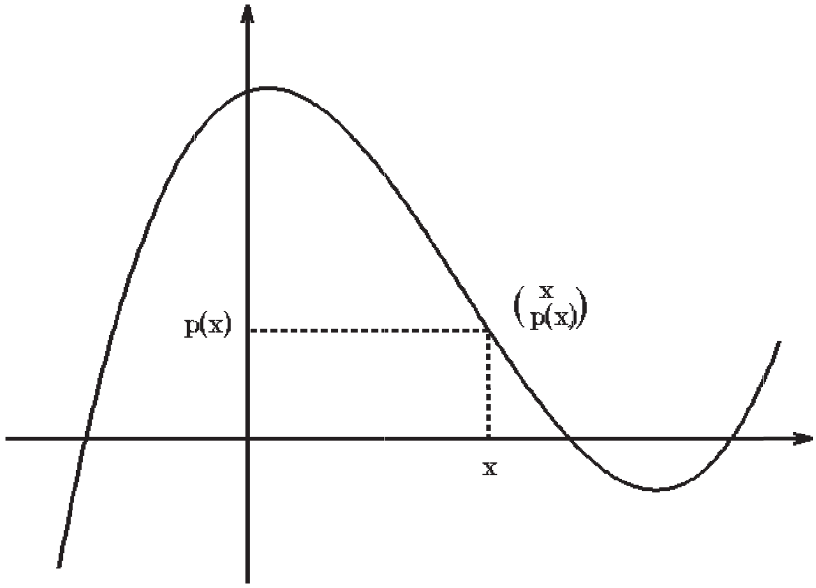
2 Nullstellen von Polynomen

Definition 1.25 : Seien $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $x \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, dann heißt

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad \textit{Polynom vom Grad } n.$$

p ist eine Funktion, die jedem $x \in \mathbb{R}$ den Funktionswert $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ zuordnet.

Der Graph $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ p(x) \end{pmatrix} \ : \ x \in I\!R \right\}$ dieser Funktion läßt sich in der Ebene darstellen:



Darstellung des Graphen

In der Anwendung wird häufig nach Nullstellen von Polynomen gesucht:
Gesucht $\{x \in I\!R \ : \ p(x) = 0\}$ *Nullstellenmenge.*

Beispiel $p(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \quad \Rightarrow \quad p$ hat die Nullstellen $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Satz 1.26 : p sei ein Polynom vom Grad n. Dann gilt :

a) Zu jedem $a \in I\!R$ gibt es ein Polynom q vom Grad $< n$ mit
$p(x) = (x-a)q(x) + p(a)$.

b) Ist $a \in I\!R$ Nullstelle von p (dh. $p(a) = 0$) , dann gilt
$p(x) = (x-a)q(x)$.

c) p hat höchstens n verschiedene reelle Nullstellen.

d) Hat p genau n reelle Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so gilt
$p(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ und
$x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$
$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$.

Bemerkung 1.27 : Hat p genau n reelle Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $x_i \in Z\!\!\!Z$, und ist $\dfrac{a_0}{a_n} \in Z\!\!\!Z$, so sind alle Nullstellen *Teiler* von $\dfrac{a_0}{a_n}$.

Beweis:

zu a) Sei $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

$\Rightarrow \quad (x-a)q(x) = b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (b_0 - ab_1)x - ab_0$.

Da $p(x) - p(a) = (x-a)q(x)$ sein soll, muß gelten (Koeffizientenvergleich , dh: 2 Polynome stimmen nur dann überein, wenn alle Koeff. gleich sind):
$a_n = b_{n-1}$, $a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1}$, ... , $a_1 = b_0 - ab_1$, $a_0 - p(a) = -ab_0$
$\Leftrightarrow \quad b_{n-1} = a_n$, $b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$, $\cdots$, $b_0 = a_1 + ab_1$, $p(a) = a_0 + ab_0$.

Nach diesem Schema (*Horner Schema*) können die b_i nacheinander ausgerechnet werden. Aus der letzten Spalte ergibt sich dann der Wert $p(a)$:

Horner Schema

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
a	b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	b_0	$p(a)$

zu b) $p(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad p(x) = (x-a)q(x)$,
zu c)d) Jede reelle Nullstelle kann abgespaltet werden. Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verschiedene Nullstellen

$\Rightarrow \quad p(x) = (x - x_1)q(x)$ und $p(x_2) = (x_2 - x_1)q(x_2)$,

da $(x_2 - x_1) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad q(x_2) = 0$

$\Rightarrow \quad q(x) = (x - x_2)r(x)$ mit Grad $r \leq n-2$

$\Rightarrow \quad p(x) = (x - x_1)(x - x_2)r(x)$ usw.

$$\Rightarrow \quad p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$
$$= a_n x^n + \underbrace{(-a_n)(x_1 + x_2 + \cdots x_n)}_{a_{n-1}} x^{n-1} + \cdots + \underbrace{(-1)^n a_n x_1 x_2 \cdots x_n}_{a_0} .$$

Bemerkung 1.28 : Das Horner Schema kann benutzt werden
a) zum Abspalten eines Faktors $(x-a)$,
b) zum Ausrechnen von $p(a)$,
c) zur Transformation $z = x - a$.

Beispiele

1) $p(x) = x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 19x - 14$
$a = 2$

	1	-2	-6	19	-14	
2	1	0	-6	7	0	$= p(2)$

Also ist 2 eine Nullstelle von p
$\Rightarrow \quad p(x) = (x-2)(x^3 - 6x + 7)$.

2) $p(x) = x^3 - 1$
$a = 1$

	1	0	0	-1	
1	1	1	1	0	$= p(1)$

$\Rightarrow \quad p(x) = (x-1)(x^2 + x + 1)$.

3) $p(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

	1	−1	−7	1	6	
1	1	0	−7	−6	0	
−1	1	−1	−6	0		
−2	1	−3	0			

$$\Rightarrow \quad p(x) = (x-1)(x^3 - 7x - 6) = (x-1)(x+1)(x^2 - x - 6)$$
$$= (x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$$

$\Rightarrow$ Nullstellen: $\{1, -1, -2, 3\}$.

4) Transformation

$p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = c_3(x-4)^3 + c_2(x-4)^2 + c_1(x-4) + c_0$.
Gesucht c_i .

	1	−6	11	−6
4	1	−2	3	$6 = c_0$
4	1	2	$11 = c_1$	
4	1	$6 = c_2$		
4	$1 = c_3$			

$\Rightarrow \quad p(x) = (x-4)^3 + 6(x-4)^2 + 11(x-4) + 6$,

denn $p(x) = (x-4)q_1(x) + c_0$, $q_1(x) = (x-4)q_2(x) + c_1$,
$q_2(x) = (x-4)q_3(x) + c_2$, $q_3(x) = c_3$
$\Rightarrow \quad q_2(x) = (x-4)c_3 + c_2$, $q_1(x) = (x-4)^2 c_3 + (x-4)c_2 + c_1$
$\Rightarrow \quad p(x) = (x-4)^3 c_3 + (x-4)^2 c_2 + (x-4)c_1 + c_0$.

Bemerkung 1.29 : Es gilt $c_0 = p(a)$, $c_1 = p'(a)$, $\cdots$

$$\boxed{\text{allg.} \quad c_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}}$$

Beweis: später.

Beispiel 1.30 :

$p(x) = x^{n+1} - x^{n_0} \quad (n_0 \in \mathbb{N}_0)$, $a = 1$

	1	0	0	$\cdots$	0	−1	0	$\cdots$	0	
1	1	1	1	$\cdots$	1	0	0	$\cdots$	$0 = p(1)$	

$\Rightarrow \quad x^{n+1} - x^{n_0} = (x-1)(x^n + x^{n-1} + \cdots + x^{n_0})$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \sum_{i=n_0}^{n} x^i = \frac{x^{n_0} - x^{n+1}}{1-x} \quad , \quad (x \neq 1)}$$

3 Komplexe Zahlen

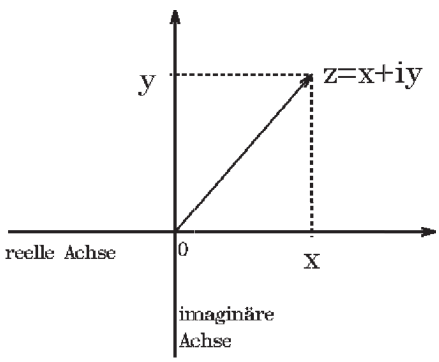
Wir wissen, daß $p(x) = x^2 + 1$ keine reellen Nullstellen hat. Soll dieses Polynom Nullstellen haben, so müssen wir den Bereich der reellen Zahlen erweitern.
$z_1 = i$ und $z_2 = -i$ seien die komplexen Nullstellen von $z^2 + 1 = 0$, also $i^2 = -1$ und $(-i)^2 = -1 \;\Rightarrow\; (z-i)(z+i) = z^2 - i^2 = z^2 + 1 = 0$ für $z_1 = i$ und $z_2 = -i$.

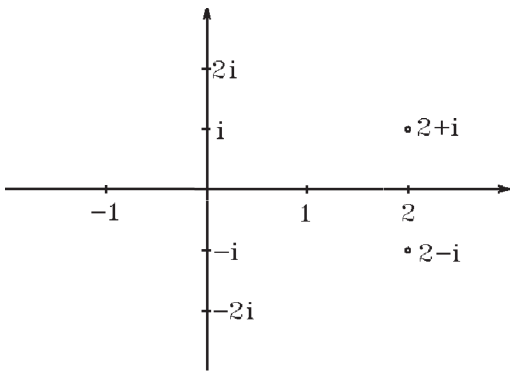
Definition 1.31 : Für $x, y \in \mathbb{R}$ heißt $z = x + iy$ *komplexe Zahl* mit
$Re\ z = x$ *(Realteil von z)* und $Im\ z = y$ *(Imaginärteil von z).*

$\mathbb{C} = \{x + iy \ : \ x \in \mathbb{R} \ , \ y \in \mathbb{R}\}$ heißt Menge der *komplexen Zahlen.*

2 komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ heißen *gleich*,
dh. $z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad [x_1 = x_2 \ und \ y_1 = y_2]$.

Darstellung in der *Gaußschen Zahlenebene*





$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ Im\ z = 0\}$ *reelle Achse,*
$\{ z \in \mathbb{C} \ : \ Re\ z = 0\} = \{iy \ : \ y \in \mathbb{R}\}$ *imaginäre Achse.*

In $\mathbb{C}$ wird die folgende *Addition* und *Multiplikation* erklärt :

Definition 1.32 : Für $z_1 = x_1 + iy_1 \in \mathbb{C}$ und $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ sei
$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ (*Addition*),
$z_1 z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ (*Multiplikation*).

$\mathbb{C}$ ist mit dieser Addition und Multiplikation ein *Körper* , dh. bzg " + " und " $\bullet$ " gelten die Axiome 1),2),3), die auch in $\mathbb{R}$ gelten.

$z = 1$ ist das *Einselement*, denn $1 \cdot z = z \ \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Definition 1.33 : Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$, dann heißt
$\overline{z} := x - iy$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl*,
$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$ der *Betrag* von z .

$|z|$ entspricht der Länge des zugehörigen Vektors.

Da $\quad z\overline{z} = |z|^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, also ist

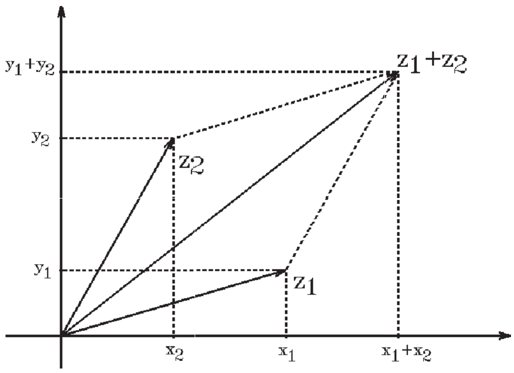
$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ das *inverse Element* von z für $z \neq 0$.

Beispiele

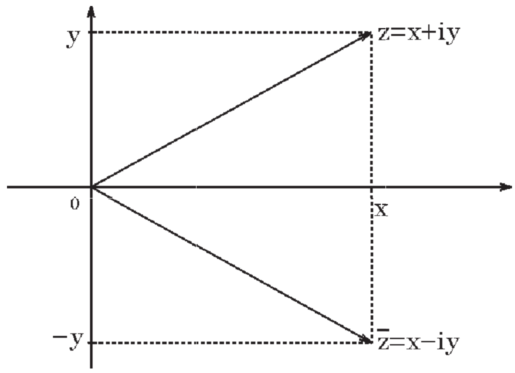
$(1+2i)+(2-3i) = 3-i$, $(1+2i)(2-3i) = 2+4i-3i-6i^2 = 8+i$,

$\frac{1+2i}{2-3i} = \frac{(1+2i)(2+3i)}{13} = -\frac{4}{13} + i\frac{7}{13}$.

Darstellung der Addition



Darstellung von $\overline{z}$



Die Addition entspricht der Vektoraddition.

Es gelten die folgenden Eigenschaften

Satz 1.34 : Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad , \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad , \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad , \quad (z_2 \neq 0)$$

$$\overline{\overline{z}} = z \quad , \quad Re\ z = \tfrac{1}{2}(z+\overline{z}) \quad , \quad Im\ z = \tfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$$

$$z\overline{z} = |z|^2 \quad , \quad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$|\overline{z}| = |z| \quad , \quad |z| \geq 0 \quad , \quad |z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \quad , \quad |\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad , \quad (z_2 \neq 0)$$

$$|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad (\textit{Dreiecksungleichung}).$$

Beweis: (durch einfaches Nachrechnen),

z.B.: $\quad z + \overline{z} = (x+iy)+(x-iy) = 2x = 2\ Re\ z$,

$\qquad z - \overline{z} = (x+iy)-(x-iy) = 2iy = 2i\ Im\ z$.

Polarkoordinatendarstellung

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt die folgende Darstellung

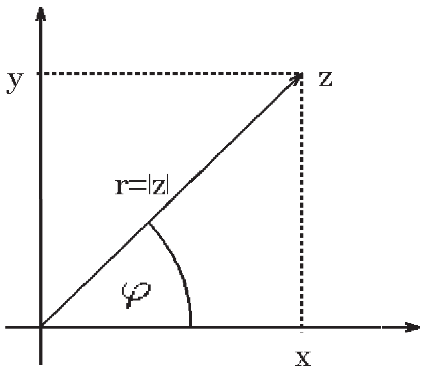
$$\boxed{z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

mit $r = |z|$, $\varphi = arg\ z$ (*Argument von* z mit $0 \le \varphi < 2\pi$).

Bezeichnung 1.35 : $\boxed{e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi}$

also $\boxed{z = re^{i\varphi}}$ mit $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\dfrac{y}{x} = \tan\varphi$ $(x \neq 0)$.



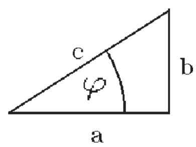
Es ist $\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} + k\pi & , \text{falls } x \neq 0 \\ \pi/2 & , \text{falls } x = 0 \ , \ y > 0 \\ 3\pi/2 & , \text{falls } x = 0 \ , \ y < 0 \\ 0 & , \text{falls } z = 0 \end{cases}$

mit $k = 0$, falls $x > 0$,
und $k = 1$, falls $x < 0$.

(φ in Bogenmaß angeben, also $2\pi \hat{=} 360°$, $\dfrac{2\pi\varphi}{360} = \dfrac{\pi\varphi}{180} \hat{=} \varphi°$).

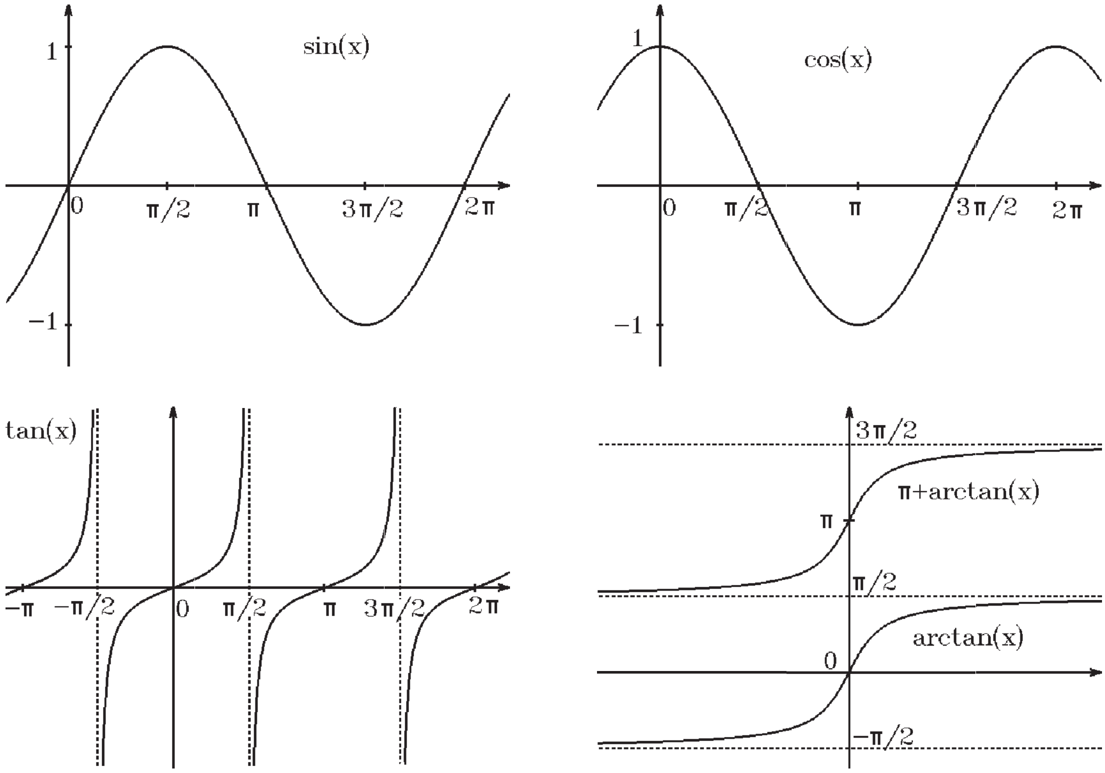
Beispiele
$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, $(-1 - i) = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}$.

Wir benötigen einige Eigenschaften der sin-, cos-,tan- und cot- Funktionen, die wir erst später beweisen werden:



$\dfrac{a}{c} = \cos\varphi$, $\dfrac{b}{c} = \sin\varphi$, $\dfrac{b}{a} = \tan\varphi$, $\varphi° \hat{=} \dfrac{\varphi\pi}{180}$ Bogenmaß

$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$, $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$



Graphen der trigonometrischen Funktionen

Bogenmaß	sin	cos	tan	cot
0	0	1	0	-
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	-	0

$\sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos(\varphi)$.

Es gelten die Additionstheoreme

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_2)\cos(\varphi_1) \ ,$$
$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) \ .$$

Es gilt **(1.36)** $\quad \mathrm{e}^{i\varphi_1}\mathrm{e}^{i\varphi_2} = \mathrm{e}^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

Denn:

$$\begin{aligned}
e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} &= (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\\
&= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)\\
&= \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\\
&= e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.
\end{aligned}$$

Satz 1.37 : Für $z = re^{i\varphi}$, $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2} \in \mathbb{C}$ gilt

$$\overline{z} = re^{-i\varphi}$$

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \quad , \quad (z_2 \neq 0)$$

$$z^n = r^ne^{in\varphi} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n}e^{-in\varphi} \quad , \quad (z \neq 0).$$

Beweis: $\overline{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = re^{-i\varphi}$

$$z_1z_2 = r_1e^{i\varphi_1}r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

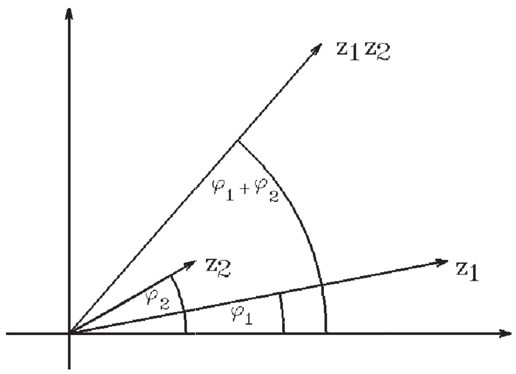
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{r^2}\cdot re^{-i\varphi} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\cdot\frac{1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$z^n = r^ne^{in\varphi}$ (Beweis mit vollst. Induktion)

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n}e^{-in\varphi}.$$

Darstellung der Multiplikation



Wurzeln komplexer Zahlen

Sei $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.
Frage: Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $z^n = a$?

Ist $a = re^{i\varphi}$ und $z = pe^{i\psi}$ $\Rightarrow$ $z^n = p^ne^{in\psi} = re^{i\varphi}$
$\Rightarrow$ $p^n = r$ *und* $n\psi = \varphi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\Rightarrow$ $p = \sqrt[n]{r}$ *und* $\psi = \frac{\varphi+2k\pi}{n}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Also gilt

$$\boxed{\textbf{(1.38)} \qquad z_k = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{i\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}} \qquad \text{mit} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1}$$

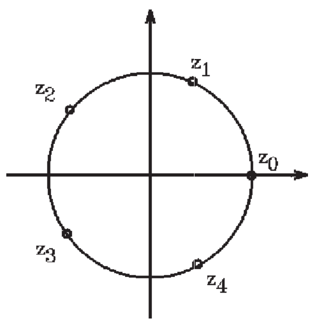
sind die n Lösungen (Wurzeln) der Gleichung $z^n = a = r\mathrm{e}^{i\varphi}$.

Alle anderen $k \in \mathbb{Z}$ führen zu den gleichen Werten, denn $z_n = z_0, z_{n+1} = z_1$, usw. (weil cos und sin $2\pi-$periodisch).

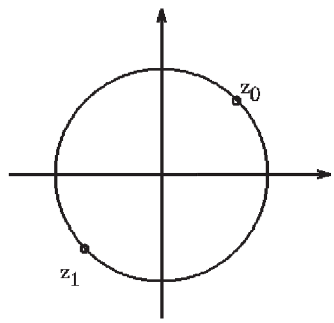
Diese n Wurzeln von a bilden die Ecken eines regelmäßigen $n-$ Ecks auf dem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{r}$.

Beispiel 1 : $a = 1 = 1\mathrm{e}^{i0}$, $n = 5$.
$z^5 = 1 \quad \Rightarrow \quad z_k = \sqrt[5]{1}\mathrm{e}^{i\frac{0+2k\pi}{5}} = \cos(\frac{2k\pi}{5}) + i\sin(\frac{2k\pi}{5}) \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$,
also $z_0 = 1$, $z_1 = \cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5)$, $z_2 = \cos(4\pi/5) + i\sin(4\pi/5)$,
$z_3 = \cos(6\pi/5) + i\sin(6\pi/5)$, $z_4 = \cos(8\pi/5) + i\sin(8\pi/5)$.

Beispiel 2 : $a = i = 1\mathrm{e}^{i\pi/2}$, $n = 2$.
$z^2 = i \quad \Rightarrow \quad z_k = \sqrt[2]{1}\mathrm{e}^{i\frac{\pi/2+2k\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi/2+2k\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi/2+2k\pi}{2})$
$= \cos(\pi/4 + k\pi) + i\sin(\pi/4 + k\pi) \quad (k = 0, 1)$,
also $z_0 = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$,
$z_1 = \cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$.



Beispiel 1



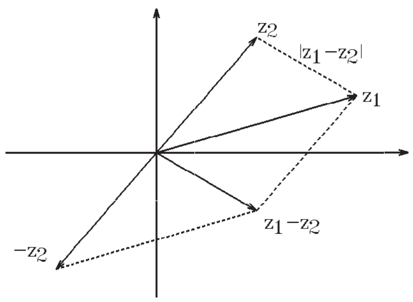
Beispiel 2

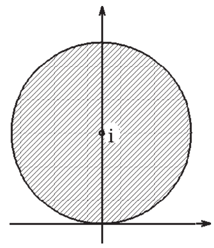
Beispiel 3 : iz bedeutet eine Drehung um 90° , denn mit
$z = r\mathrm{e}^{i\varphi}$ und $i = 1\mathrm{e}^{i\pi/2} \quad \Rightarrow \quad iz = r\mathrm{e}^{i(\varphi+\pi/2)}$.

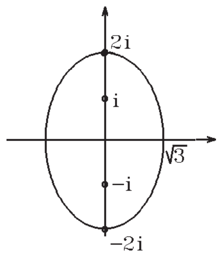
Beispiel 4 : $|z_1 - z_2|$ bedeutet der Abstand vom Punkt z_1 zum Punkt z_2 .

Beispiel 5 : $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - i| \leq 1\}$ ist die Kreisfläche um i mit Radius 1.

Beispiel 6 : $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-i| + |z+i| = 4\}$ ist die Ellipse mit den Brennpunkten i und $-i$ und den Halbachsen $\sqrt{3}$ und 2.



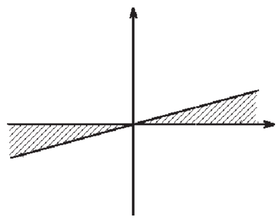




Beispiel 4 *Beispiel 5* *Beispiel 6*

Denn: $|(x+iy)-i| + |(x+iy)+i| = 4 \quad \Rightarrow \quad |x+i(y-1)|^2 = (4-|x+i(y+1)|)^2$
$\Rightarrow \quad x^2+(y-1)^2 = 16 - 8|x+i(y+1)| + x^2 + (y+1)^2$
$\Rightarrow \quad 8|x+i(y+1)| = 16+4y \quad \Rightarrow \quad 4(x^2+(y+1)^2) = 16+8y+y^2$
$\Rightarrow \quad 4x^2+4y^2+8y+4 = 16+8y+y^2 \quad \Rightarrow \quad 4x^2+3y^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4} = 1.$

Beispiel 7 : $\{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < \ arg \ z^2 < \pi/4\}$
$= \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < arg \ z < \pi/8$
$\quad oder \ \ \pi < arg \ z < 9\pi/8\}.$



Polynome

Seien $a_i \in \mathbb{R} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$.
Sei $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, also grad $p = n$.
Dann gilt der *Fundamentalsatz der Algebra* (Beweis später):

Satz 1.39 : p hat genau n Nullstellen $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ mit
$p(x) = a_n(x-z_1)(x-z_2)\cdots(x-z_n)$.

Satz 1.40 : Ist $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ Nullstelle von p, so ist auch $\overline{z}$ Nullstelle von p und es gilt
$p(x) = (x^2 - (2 \ Re \ z)x + |z|^2)q(x) \quad , \quad grad \ q \leq n-2.$

Beweis: $p(z) = a_n z^n + \cdots a_1 z + a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{p(z)} = a_n \overline{z}^n + \cdots + a_1\overline{z} + a_0 = p(\overline{z}) = 0.$
Da z und $\overline{z}$ Nullstellen, kann der Faktor $(x-z)(x-\overline{z}) = x^2 - (z+\overline{z})x + z\overline{z} = x^2 - (2 \ Re \ z)x + |z|^2$ abgespaltet werden.

Also kann p in $\mathbb{R}$ in lineare und quadratische Faktoren zerlegt werden
$p(x) = a_n(x-x_1)\cdots(x-x_r)(x^2+a_1x+b_1)\cdots(x^2+a_sx+b_s)$
mit den reellen Nullstellen $x_1, \dots x_r$ und den nichtreellen Nullstellen $z_1, \overline{z_1}, \cdots, z_s, \overline{z_s}$.

In $\mathbb{C}$ kann p in lineare Faktoren zerlegt werden
$p(x) = a_n(x-z_1)(x-z_2)\cdots(x-z_n)$.

Definition 1.41 : z heißt *Nullstelle der Ordnung* r
$\Leftrightarrow \quad p(x) = (x-z)^r q(x)$ mit $q(z) \neq 0$.

Satz 1.42 : z ist Nullstelle der Ordnung r
$\Leftrightarrow p(z) = p'(z) = \cdots = p^{(r-1)}(z) = 0 \,,\; p^{(r)}(z) \neq 0.$

Beweis : $p(x) = (x-z)^r q(x) = (x-z)^r (d_0 + d_1(x-z) + \cdots + d_{n-r}(x-z)^{n-r})$
$= d_0(x-z)^r + d_1(x-z)^{r+1} + \cdots + d_{n-r}(x-z)^n$
$\Leftrightarrow \quad c_0 = c_1 = \cdots = c_{r-1} = 0 \,,\; c_r = d_0 \neq 0$ (Koeffizienten c_i bei der Transformation $u = (x-z)$)
$\Leftrightarrow \quad p(z) = p'(z) = \cdots = p^{(r-1)}(z) = 0 \,,\; p^{(r)}(z) \neq 0.$ (vgl. (1.29)).

Beispiele

1. $p(x) = (x-1)^2(x+2)^3(x-3)$ hat die Nullstellen $x_1 = 1$ (zweifach), $x_2 = -2$ (dreifach), $x_3 = 3$ (einfach).

2. $p(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 1$ hat die Nullstelle $z_1 = 1$. Abspalten von $(x-1)$ ergibt:

	1	0	1	−1	0	−1
1	1	1	2	1	1	0

Das Restpolynom $q(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ hat die Nullstellen $z_{2,3} = \pm i$. Abspalten von $(x+i)(x-i) = x^2 + 1$ ergibt (Polynomdivision):

$$
\begin{array}{l}
x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \;:\; x^2 + 1 \;= x^2 + x + 1 \\
\underline{x^4 + x^2} \\
\qquad x^3 + x^2 \\
\qquad \underline{x^3 + x} \\
\qquad\qquad x^2 + 1
\end{array}
$$

$x^2 + x + 1$ hat die Nullstellen $z_{4,5} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Damit hat $p(x)$ die (einfachen) Nullstellen $z_1 = 1 \,,\; z_{2,3} = \pm i \,,\; z_{4,5} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Partialbruchzerlegung

Eine wichtige Anwendung für die Zerlegung eines Polynoms ist die Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion.

Sei $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ mit $p \,,\; q$ sind Polynome mit $grad\, p < grad\, q$ (ist $grad\, p \geq grad\, q$, so muß vorher eine Polynomdivision durchgeführt werden).

Das Nennerpolynom $q(x)$ habe die folgende Zerlegung in $I\!R$:

$q(x) = (x-x_1)^{r_1} \cdots (x-x_k)^{r_k}(x^2 + a_1 x + b_1)^{s_1} \cdots (x^2 + a_l x + b_l)^{s_l}$ mit den reellen Nullstellen $x_1, x_2, \cdots, x_k$ und den nichtreellen Nullstellen $z_1, \overline{z_1}, z_2, \overline{z_2}, \cdots, z_l, \overline{z_l}$.
Dann gilt:

Satz 1.43 : Es existieren eindeutig Zahlen $A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j} \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_{1,1}}{x-x_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,r_1}}{(x-x_1)^{r_1}} + \frac{A_{2,1}}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_{2,r_2}}{(x-x_2)^{r_2}} +$$
$$+ \ldots + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2+a_1x+b_1} + \cdots + \frac{B_{1,s_1}x + C_{1,s_1}}{(x^2+a_1x+b_1)^{s_1}} + \cdots + \frac{B_{l,s_l}x + C_{l,s_l}}{(x^2+a_lx+b_l)^{s_l}} .$$

Beweis : Faßt man die Brüche auf der rechten Seite wieder zusammen, erhält man den gleichen Nenner wie auf der linken Seite ($q(x)$). Also müssen die Zähler auf beiden Seiten auch gleich sein. Durch Koeffizientenvergleich erhält man ein lineares Gleichungssystem (GLS) für die Unbekannten $A_{i,j},\ B_{i,j},\ C_{i,j}$. Dieses Gleichungssystem ist eindeutig lösbar. Zur Berechnung dieser Zahlen $A_{i,j},\ B_{i,j},\ C_{i,j}$ müssen also folgende Schritte durchgeführt werden:

Berechnung von $A_{i,j},\ B_{i,j},\ C_{i,j}$:

1. rechte Seite zusammenfassen (auf Hauptnenner bringen),
2. Zähler nach x-Potenzen sortieren,
3. Koeffizientenvergleich des Zählerpolynoms mit $p(x)$ durchführen,
4. lineares Gleichungssystem lösen.

Beispiele

1. $$\frac{2x+1}{x^2+x-2} = \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$
$$= \frac{a(x+2)+b(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{(a+b)x+(2a-b)}{(x-1)(x+2)}$$

$\Rightarrow \quad a+b=2,\ 2a-b=1 \quad \Rightarrow \quad b=2-a,\ 2a-(2-a)=1 \quad \Rightarrow \quad a=1,\ b=1.$

2. $$\frac{1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$
$\Rightarrow \quad 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) = (A+B)x^2 + (C-B)x + (A-C)$
$\Rightarrow \quad A+B=0,\ C-B=0,\ A-C=1$
$\Rightarrow \quad B=-A,\ C=B=-A,\ A=1+C=1-A$
$\Rightarrow \quad A=1/2,\ B=-1/2,\ C=-1/2.$

3. $$\frac{2x-1}{(x^2+1)^2(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^2} .$$

4. $\dfrac{x^3-2}{x-1} = x^2+x+1-\dfrac{1}{x-1}$ (vorher Polynomdivision, da *grad* $p \geq$ *grad* q).

Bemerkung 1.44 : Bei einfachen Nullstellen kann man auch folgende Methode benutzen:

1. $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2}$, Multiplikation mit $(x-1)$ ergibt

$\dfrac{2x+1}{x+2} = A + B\dfrac{x-1}{x+2}$, $x = 1$ einsetzen ergibt

$\dfrac{3}{3} = A \quad \Rightarrow \quad A = 1.$ Analog erhält man durch Multiplikation mit $(x+2)$

$\dfrac{2x+1}{x-1} = A\dfrac{x+2}{x-1} + B$, $x = -2$ einsetzen ergibt

$\dfrac{-3}{-3} = B \quad \Rightarrow \quad B = 1.$

2. $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

$\Rightarrow \quad A = \left.\dfrac{1}{x^2+1}\right]_{x=1} = \dfrac{1}{2}, \quad \left.Bx+C\right]_{x=i} = \left.\dfrac{1}{x-1}\right]_{x=i}$

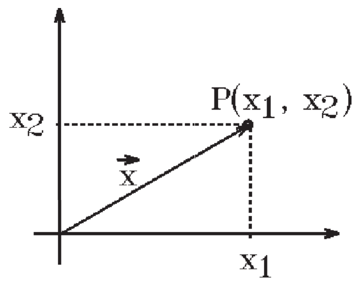
$\Rightarrow \quad Bi + C = \dfrac{1}{i-1} = \dfrac{-1-i}{2} \quad \Rightarrow \quad C = -\dfrac{1}{2},\ B = -\dfrac{1}{2}$.

II Vektoren, Matrizen, Determinanten

1 Vektoren

Motivation

P sei ein Punkt der Ebene. Legen wir in der Ebene ein Koordinatensystem zugrunde, so ist P eindeutig durch seine Koordinaten x_1 und x_2 charakterisiert: $P(x_1, x_2)$.

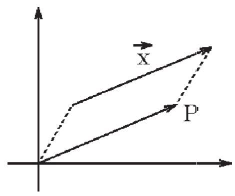


Zu jedem Punkt P in der Ebene gehört ebenso eindeutig ein *Vektor* (Ortsvektor von P): Die Verbindung zwischen Nullpunkt und P mit Pfeil in Richtung P. Für Vektoren schreiben wir $\vec{x}$, also $P \hat{=} \vec{x}$ (Ortsvektor von P). Ein Vektor ist gekennzeichnet durch seine *Richtung* und durch seine *Länge*. Umgekehrt gehört zu jedem Vektor $\vec{x}$ eindeutig ein Punkt P, wenn man den Vektor so parallelverschiebt, daß der Anfang im Nullpunkt liegt.

$$P \hat{=} \vec{x}$$

$$P(x_1, x_2) \hat{=} \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

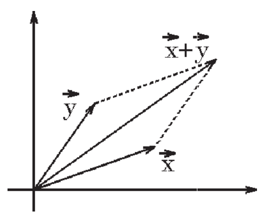
Länge von $\vec{x}$: $\quad |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.



Addition von Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

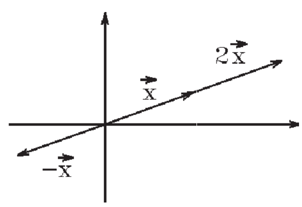
$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} .$$



Skalarmultiplikation von Vektoren

$$\lambda \in I\!R , \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

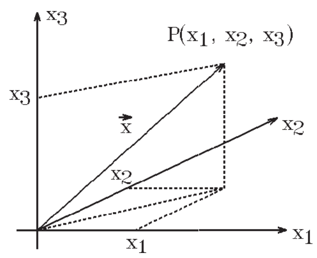
$$\lambda\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} .$$



Skalarmultiplikation bedeutet Streckung (Verlängerung oder Verkürzung oder Umkehrung der Richtung (falls $\lambda < 0$)) der Vektoren.

Analog zur Ebene gibt es zu jedem Punkt P im Raum einen Vektor

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit den 3 Koordinaten $x_1,\ x_2,\ x_3$



$$P(x_1, x_2, x_3) \hat{=} \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

Da in der Anwendung auch Vektoren mit mehr als 3 Koordinaten vorkommen, zB. die drei Ortskoordinaten x_1, x_2, x_3 und die Zeitkoordinate t, führen wir nun allgemein Vektoren mit n Koordinaten ein ($n = 1 \ \Rightarrow$ *reelle Achse* $\mathbb{R}$, $n = 2 \ \Rightarrow$ *Ebene* $\mathbb{R}^2$, $n = 3 \ \Rightarrow$ *Raum* $\mathbb{R}^3$).

Definition 2.1 : Wir bezeichnen mit

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ : \ x_i \in \mathbb{R} \ , \ (i = 1, 2, \ldots, n) \right\}$$

die Menge aller *Vektoren* im *n-dimensionalen Euklidischen Vektorraum*.

Ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, so heißt x_i die *i-te Koordinate* von $\vec{x}$.

Zwei Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ heißen *gleich* , d.h. $\vec{x} = \vec{y}$

$\Leftrightarrow \quad x_i = y_i$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$, d.h. alle Koordinaten sind gleich.

In $\mathbb{R}^n$ führen wir die beiden folgenden Rechenoperationen ein:

Definition 2.2 : Seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\vec{x} + \vec{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$ *Addition* (koordinatenweise Addition),

$$\lambda\vec{x} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \qquad \textit{Skalarmultiplikation.}$$

Für diese Operationen gelten die folgenden Regeln

Satz 2.3 : Für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

a) $\vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{R}^n$
$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ *Kommutativität*
$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ *Assoziativität*

$$\vec{0} + \vec{x} = \vec{x} + \vec{0} = \vec{x} \quad \text{mit} \quad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0} \quad \text{mit} \quad -\vec{x} = (-1)\vec{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} .$$

b) $\lambda\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
$(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$ *Distributivität*
$\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$ *Distributivität*
$(\lambda\mu)\vec{x} = \lambda(\mu\vec{x})$ *Assoziativität*
$1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

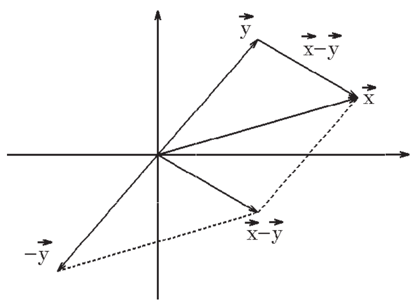
Beweis : Alle Eigenschaften folgen sofort aus den entsprechenden Eigenschaften (Axiome 1.3) der reellen Zahlen, da die Operationen koordinatenweise ausgeführt werden.

Aus a) folgt: Zu $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ $\dot{\exists}$ $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} + \vec{a} = \vec{y}$ $(\vec{a} := \vec{y} - \vec{x})$.

Definition 2.4 : Eine Menge V $(V \neq \emptyset)$, in der eine *Addition* und *Skalarmultiplikation* mit den Regeln a) und b) von Satz 2.3 erklärt sind, heißt *Vektorraum.*

Geometrische Deutung von $\vec{x} - \vec{y}$

$\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-1)\vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y})$.



Seien P_1, P_2 zwei Punkte in $\mathbb{R}^n$,
dann gehören zu P_1 der Ortsvektor $\vec{x}_1$
und zu P_2 der Ortsvektor $\vec{x}_2$.
Der Vektor $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ ist dann der Vektor,
der von P_2 aus nach P_1 gerichtet ist, also: $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \hat{=} \overrightarrow{P_2P_1}$.

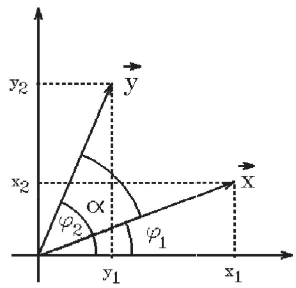
Definition 2.5 : Seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in I\!R^n$.

a) $< \vec{x}, \vec{y} > := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ heißt *Skalarprodukt* der Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$.

Andere Schreibweise: $< \vec{x}, \vec{y} >= \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}\vec{y}$.

b) $|\vec{x}| := \sqrt{< \vec{x}, \vec{x} >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ heißt *Länge* oder *Norm* von $\vec{x}$.

Geometrische Deutung



α sei der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$,

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$,

$|\vec{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2$, $|\vec{y}|^2 = y_1^2 + y_2^2$,

$\frac{x_1}{|\vec{x}|} = \cos\varphi_1$, $\frac{x_2}{|\vec{x}|} = \sin\varphi_1$,

$\frac{y_1}{|\vec{y}|} = \cos\varphi_2$, $\frac{y_2}{|\vec{y}|} = \sin\varphi_2$,

$$\cos\alpha = \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \cos\varphi_2 \cos\varphi_1 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_1$$
$$= \frac{x_1 y_1}{|\vec{x}||\vec{y}|} + \frac{x_2 y_2}{|\vec{x}||\vec{y}|} = \frac{< \vec{x}, \vec{y} >}{|\vec{x}||\vec{y}|} .$$

$\boxed{\text{Also gilt:} \quad < \vec{x}, \vec{y} >= |\vec{x}||\vec{y}| \cos\alpha}$ (dies gilt auch in $I\!R^3$).

Ist $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$ d.h. $\vec{x}$ und $\vec{y}$ stehen senkrecht aufeinander.

Also gilt: $< \vec{x}, \vec{y} >= 0 \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$ (oder $\vec{x} = \vec{0}$ oder $\vec{y} = \vec{0}$).

Diese und weitere Eigenschaften fassen wir nun im folgenden Satz zusammen

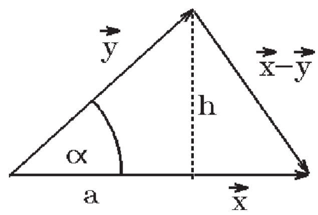
Satz 2.6 : Für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in I\!R^n$, $\lambda \in I\!R$, gilt

a) $< \vec{x}, \vec{y} >= |\vec{x}||\vec{y}| \cos\alpha$ (α der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$)
b) $< \vec{x}, \vec{y} >= 0 \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$ (oder $\vec{x} = \vec{0}$ oder $\vec{y} = \vec{0}$)
c) $| < \vec{x}, \vec{y} > | \leq |\vec{x}||\vec{y}|$ *(Schwarzsche Ungleichung)*

d) $< \vec{x}, \vec{y} >=< \vec{y}, \vec{x} >$ (Symmetrie)
e) $< \lambda\vec{x}, \vec{y} >= \lambda < \vec{x}, \vec{y} >$ und
$< \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} >=< \vec{x}, \vec{z} > + < \vec{y}, \vec{z} >$ (Linearität)

f) $|\vec{x}| \geq 0$, $|\vec{x}| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
g) $|\lambda\vec{x}| = |\lambda||\vec{x}|$
h) $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ (Dreiecksungleichung).

Beweis :



a) Wir zeigen zunächst den *Cosinussatz*

$$|\vec{x}-\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}|\cos\alpha\ .$$

$a^2 + h^2 = |\vec{y}|^2$,
$(|\vec{x}| - a)^2 + h^2 = |\vec{x}-\vec{y}|^2$.
Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt
$|\vec{x}-\vec{y}|^2 - |\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 - 2a|\vec{x}|$

$\Rightarrow \quad |\vec{x}-\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2a|\vec{x}|$

$\Rightarrow \quad |\vec{x}-\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}|\cos\alpha \quad , \quad$ da $\dfrac{a}{|\vec{y}|} = \cos\alpha$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}|\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}|\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i =< \vec{x},\vec{y} >= |\vec{x}||\vec{y}|\cos\alpha\ .$$

b) $< \vec{x},\vec{y} >= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha = 0$ oder $\vec{x} = \vec{0}$ oder $\vec{y} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}\perp\vec{y}$ (oder $\vec{x} = \vec{0}$ oder $\vec{y} = \vec{0}$).

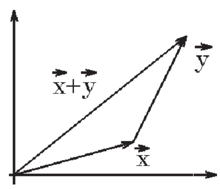
c) Da $|\cos\alpha| \le 1 \quad \Rightarrow \quad |< \vec{x},\vec{y} >| \le |\vec{x}||\vec{y}|$ (siehe auch Beispiel 1.22).

d) und e) einfaches nachrechnen (Axiome in $I\!R$ ausnutzen).

f) $|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \ge 0 \ ; \ = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ alle $x_i = 0$.

g) $|\lambda\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\lambda x_i)^2} = |\lambda|\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = |\lambda||\vec{x}|\ .$

h) $|\vec{x}+\vec{y}|^2 =< \vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y} >=< \vec{x},\vec{x} > +2 < \vec{x},\vec{y} > + < \vec{y},\vec{y} >$ (nach d)e))
$\le |\vec{x}|^2 + 2|\vec{x}||\vec{y}| + |\vec{y}|^2 = (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2$ (nach c)).



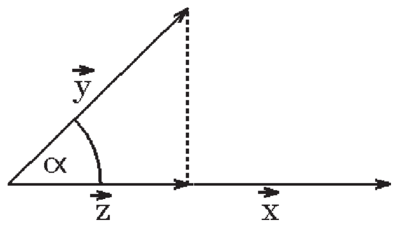
Anwendungen (2.7)

1. *Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$*

Über $\cos\alpha = \dfrac{< \vec{x},\vec{y} >}{|\vec{x}||\vec{y}|}$ kann der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ berechnet werden.

Beispiel $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3} \mathrel{\hat{=}} 60°.$

2. *Projektion des Vektors $\vec{y}$ auf den Vektor $\vec{x}$*



$\vec{z}$ sei der Projektionsvektor,

dann gilt $\quad \frac{|\vec{z}|}{|\vec{y}|} = \cos\alpha \quad (\alpha \le \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow \quad |\vec{z}| = |\vec{y}|\cos\alpha = |\vec{y}| \cdot \frac{<\vec{x},\vec{y}>}{|\vec{x}||\vec{y}|}$

$$\boxed{\Rightarrow \quad |\vec{z}| = \frac{<\vec{x},\vec{y}>}{|\vec{x}|} \quad \text{ist die } \textit{Länge der Projektion}}$$

$\vec{z} = \lambda\vec{x}$ mit $\quad |\vec{z}| = \lambda|\vec{x}| = \frac{<\vec{x},\vec{y}>}{|\vec{x}|} \quad$ (da $\lambda > 0$)

$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{<\vec{x},\vec{y}>}{|\vec{x}|^2}$

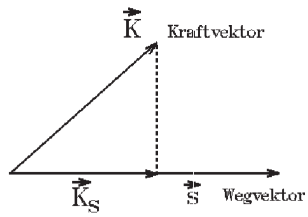
$$\boxed{\Rightarrow \quad \vec{z} = \frac{<\vec{x},\vec{y}>}{|\vec{x}|^2}\vec{x} \quad \text{ist der } \textit{Projektionsvektor}}.$$

Ist $|\vec{x}| = 1 \quad \Rightarrow \quad |\vec{z}| = <\vec{x},\vec{y}>$ ist die Länge der Projektion
und $\quad \vec{z} = <\vec{x},\vec{y}>\vec{x}$ ist der Projektionsvektor.

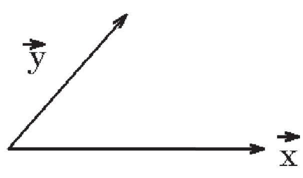
Beispiel : Ist $\vec{K}$ ein Kraftvektor und $\vec{s}$ ein Wegvektor, so ist die geleistete *Arbeit* $A = <\vec{K},\vec{s}>$, denn

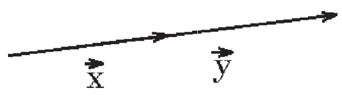
$$A = |\vec{K}_s||\vec{s}| = \frac{<\vec{K},\vec{s}>}{|\vec{s}|}|\vec{s}|,$$

wobei $\vec{K}_s$ der Projektionsvektor von $\vec{K}$ auf $\vec{s}$ ist.



Lineare Abhängigkeit, - Unhabhängigkeit





$\vec{x},\vec{y}$ linear unabhängig $\qquad$ *$\vec{x},\vec{y}$ linear abhängig*

$\vec{x},\vec{y}$ sind linear abhängig $\Leftrightarrow \quad \vec{x} = \alpha\vec{y}$ oder $\vec{y} = \beta\vec{x}$
$\Leftrightarrow \quad \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \vec{0}$ für $(\lambda,\mu) \ne (0,0)$, $\lambda,\mu \in I\!R$.
$\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$ heißt Linearkombination der Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$.

Definition 2.8 :

a) r Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_r \in \mathbb{R}^n$ heißen *linear abhängig*, wenn es reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ gibt, die *nicht alle Null* sind, so daß $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0}$ gilt.

b) r Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_r \in \mathbb{R}^n$ heißen *linear unabhängig*, wenn sie *nicht* linear abhängig sind, d.h. aus $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0}$ muß folgen, daß alle $\lambda_i = 0$ sind.

c) $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{x}_i$ heißt *Linearkombination* der Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_r$.

Beispiele

1. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig, denn $2\vec{x} + 1\vec{y} = \vec{0}$.

2. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, denn

$$\lambda\vec{x}+\mu\vec{y} = \begin{pmatrix} \lambda+\mu \\ -2\lambda \\ 3\lambda+\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0\,,\ \mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x}, \vec{y} \text{ sind linear unabhängig.}$$

3. $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\cdots$, $\vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$,

denn

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots \vec{e}_n \text{ sind linear unabhängig.}$$

Definition 2.9 : Sei V ein Vektorraum.

a) Ist r die *Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren in* V, so heißt r die *Dimension* von V, also $\dim V = r$.

b) In diesem Fall bilden je r linear unabhängige Vektoren aus V eine *Basis von* V, d.h.: Seien $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_r \in V$ (mit $\dim V = r$) linear unabhängig, dann gilt: $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_r\}$ ist Basis von V, und es gilt: $\forall \vec{x} \in V \exists \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ mit $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{x}_i$, also jedes Element aus V läßt sich als Linearkombination der Basiselemente schreiben.

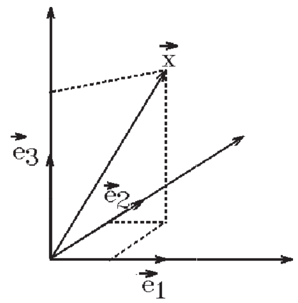
Beispiele

1. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$ (natürliche Basis).

Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$

$\Rightarrow \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i$.



2. $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, denn

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 ,$$

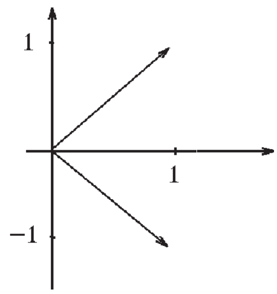
also bilden $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

Ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, so gilt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad x_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, $x_2 = \lambda_1 - \lambda_2$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{x_1 - x_2}{2}$.



Geometrische Anwendungen: Gerade, Ebene

1. Gerade im $\mathbb{R}^3$

Eine Gerade g ist eindeutig bestimmt durch

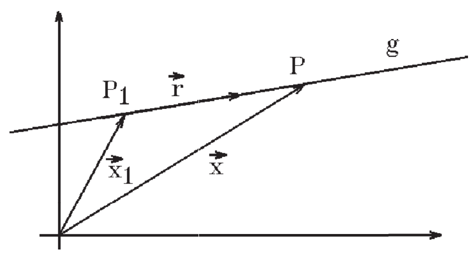
a) einen Punkt P_1 bzw. den zugehörigen Ortsvektor $\vec{x}_1$ und

b) einen Richtungsvektor $\vec{r}$.

Alle Punkte (bzw. deren Ortsvektoren) auf der Geraden g lassen sich darstellen durch

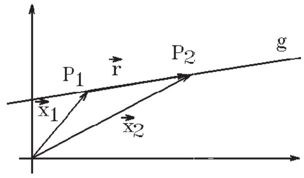
$$\boxed{\vec{x} = \vec{x}_1 + t\vec{r} \quad , \quad (t \in \mathbb{R})}$$

Diese Darstellung heißt *Parameterdarstellung* der Geraden g durch $\vec{x}_1$ in Richtung $\vec{r}$.
t heißt Parameter.



Eine Gerade durch P_1 und P_2 mit zugehörigen Ortsvektoren $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ führt auf die *2-Punkte-Parameter Form*

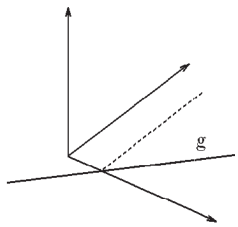
$$\boxed{\vec{x} = \vec{x}_1 + t(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \quad , \quad (t \in I\!R)}$$



weil $\vec{r} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ Richtungsvektor ist.

Beispiele

1. $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\Rightarrow \quad g = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in I\!R \right\}$,

mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ gilt also

$x = 1 + t \ , \ y = t \ , \ z = 0 \quad \Rightarrow \quad \{z = 0 \ \ ((x,y) - Ebene) \ und \ y = x - 1\}$.
Also eine Gerade in der (x,y)-Ebene.

2. Seien P_1 mit $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, P_2 mit $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Dann ist die Gerade durch P_1 und P_2:

$g = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in I\!R \right\}$,

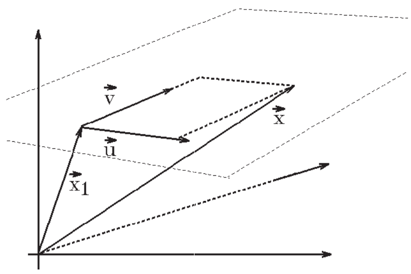
oder koordinatenweise: $x = 1 + 2t \ , \ y = 2 - t \ , \ z = 1 - t \ , \ t \in I\!R$.

2. Ebene im $I\!R^3$

Eine Ebene im $I\!R^3$ ist eindeutig bestimmt durch
a) einen Punkt P_1 bzw. den zugehörigen Ortsvektor $\vec{x}_1$ und
b) 2 linear unabhängige Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Alle Punkte (bzw. deren Ortsvektoren) auf der Ebene E lassen sich darstellen durch

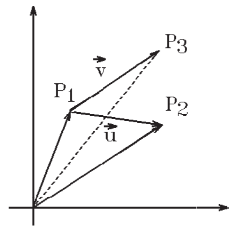
$$\boxed{\vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \quad , \quad (\lambda, \mu \in I\!R)}$$



Diese Darstellung heißt *Parameterdarstellung* der Ebene E durch $\vec{x}_1$ in Richtung $\vec{u}$ und $\vec{v}$.
λ und μ heißen Parameter.

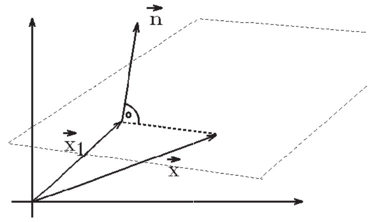
Eine Ebene E durch 3 Punkte P_1, P_2, P_3 mit zugehörigen Ortsvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ führt auf die *3-Punkte-Parameter Form*

$$\boxed{\vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) + \mu(\vec{x}_3 - \vec{x}_1) \quad , \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})}$$



Denn $\quad \vec{u} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$, $\vec{v} = \vec{x}_3 - \vec{x}_1$ sind
2 linear unabhängige Richtungsvektoren,
falls die 3 Punkte nicht alle auf einer Geraden liegen.

Eine Ebene E ist ebenso eindeutig bestimmt durch
a) einen Punkt P_1 bzw. den zugehörigen Ortsvektor $\vec{x}_1$ und
b) einen Normalenvektor $\vec{n}$ ($\vec{n}$ steht senkrecht auf der Ebene E , also $\vec{n} \perp E$).



Für alle $\vec{x} \in E$ gilt:
$(\vec{x} - \vec{x}_1) \perp \vec{n}$, also
$< \vec{x} - \vec{x}_1, \vec{n} >= 0$, also

$$\boxed{< \vec{x}, \vec{n} >=< \vec{x}_1, \vec{n} >}$$

Hessesche Normalform oder *lineare Form* der Ebene E.

Ausgeschrieben lautet sie für $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$< \vec{x}, \vec{n} >= ax + by + cz =< \vec{x}_1, \vec{n} >= d$ also

$$\boxed{ax + by + cz = d} \qquad \text{mit } \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ und } d =< \vec{x}_1, \vec{n} > .$$

Beispiel

$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear unabhängig),

$E = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ (Parameterform),

wähle $\lambda = 0$, $\mu = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in E$,

wähle $\lambda = 1$, $\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \;,\; \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \;,\; \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$ sind 3 Punkte in der Ebene E, also erhalten wir die 3-Punkte-Parameter Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) + \mu\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right), \text{ also}$$

$$E = \left\{\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad , \quad \lambda, \mu \in I\!R\right\},$$

also koordinatenweise $x = 1 + 2\lambda + \mu$, $y = 1 + \lambda$, $z = \lambda + \mu$,
λ, μ eliminieren ergibt: $\lambda = y - 1$, $\mu = z - \lambda = z - y + 1$
$\Rightarrow \quad x = 1 + 2(y - 1) + (z - y + 1) \quad \Rightarrow \quad x - y - z = 0$ (lineare Form), oder

$$\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = d = 0$$ (Hessesche Normalform) , also $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ ist Normale auf E. Die Ebene E geht durch den Nullpunkt, da $d =< \vec{0}, \vec{n} >= 0$.

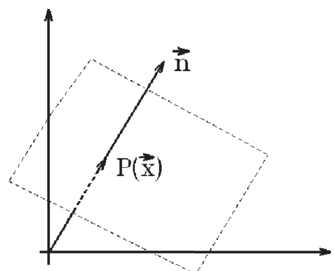
Umgekehrt erhält man aus der linearen Form wieder eine Parameterform, indem man 3 Punkte bestimmt, die die lineare Form erfüllen (also in E liegen): hier z.B. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, also erhält man

$$E = \left\{\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad , \quad \lambda, \mu \in I\!R\right\} \quad \text{(Parameterform).}$$

Allgemein stellt jede lineare Form $ax + by + cz = d$ eine Ebene E im $I\!R^3$ dar:

$$E = \left\{\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \;:\; ax + by + cz = d\right\} \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \text{ ist Normalenvektor auf } E.$$

Abstand der Ebene zum Nullpunkt



$P(\vec{x})$ sei der Durchstoßpunkt des Lotes vom Nullpunkt auf die Ebene, dann ist $|\vec{x}|$ der Abstand der Ebene zum Nullpunkt.
Da $\vec{x}$ in Richtung von $\vec{n}$ zeigt,
gilt: $\vec{x} = \lambda\vec{n}$ mit $\lambda \in I\!R$.
Ist $< \vec{x}, \vec{n} >= d$ die Ebenengleichung, so gilt:
$< \lambda\vec{n}, \vec{n} >= \lambda < \vec{n}, \vec{n} >= \lambda|\vec{n}|^2 = d$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{d}{|\vec{n}|^2} \quad \Rightarrow \quad |\vec{x}| = |\lambda\vec{n}| = |\lambda||\vec{n}| = \frac{|d|}{|\vec{n}|^2}|\vec{n}| = \frac{|d|}{|\vec{n}|} .$$

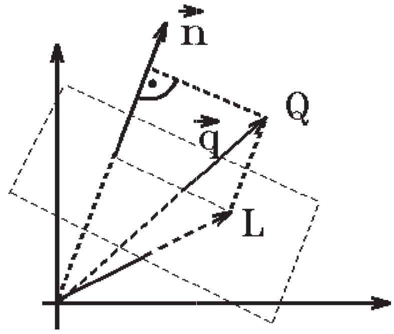
Also ist

$$\boxed{\frac{|d|}{|\vec{n}|} \quad \text{der } \textit{Abstand der Ebene zum Nullpunkt}}$$

Abstand eines Punktes Q (mit Ortsvektor $\vec{q}$) zur Ebene

Die Projektionslänge von $\vec{q}$ auf $\vec{n}$
ist $h = \dfrac{<\vec{q},\vec{n}>}{|\vec{n}|}$ (vgl. 2.7).
Der Abstand der Ebene zum Nullpunkt ist
$\dfrac{d}{|\vec{n}|}$ (falls $d \geq 0$), also ist
der Abstand des Punktes $\vec{q}$ zur Ebene E
mit $<\vec{x},\vec{n}>= d \geq 0$

$$\boxed{\frac{|<\vec{q},\vec{n}> -d|}{|\vec{n}|}}$$



Der Lotfußpunkt L (mit Ortsvektor $\vec{l}$) erfüllt die Gleichung der Ebene: $<\vec{l},\vec{n}>= d$,
und es gilt $\vec{q} - \vec{l} = \lambda\vec{n}$ mit $\lambda \in I\!R$. Also folgt
$\vec{l} = \vec{q} - \lambda\vec{n} \quad \Rightarrow \quad <\vec{q} - \lambda\vec{n},\vec{n}>=<\vec{q},\vec{n}> -\lambda <\vec{n},\vec{n}>=<\vec{q},\vec{n}> -\lambda|\vec{n}|^2 = d$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{<\vec{q},\vec{n}> -d}{|\vec{n}|^2} \ .$$

Also gilt für den *Lotfußpunkt*

$$\boxed{\vec{l} = \vec{q} + \frac{d- <\vec{q},\vec{n}>}{|\vec{n}|^2}\vec{n}}$$

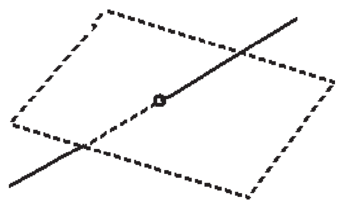
Beispiel : $E: \quad x + y + z = 1 \ , \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}| = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ist der Abstand zum Nullpunkt.

$<\vec{q},\vec{n}> -d = 5 - 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ ist der Abstand von $\vec{q}$ zu E.

Schnittpunkte

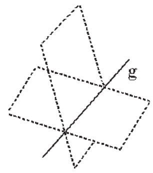
Beispiel : Gerade mit Ebene
Gerade g : $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
Ebene E : $\quad x - y + z = 0$.



Für die Gerade g gilt: $x = 1 + \lambda \ , \ y = 1 \ , \ z = \lambda$, einsetzen in E ergibt:

$(1 + \lambda) - 1 + \lambda = 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der Schnittpunkt.

**Beispiel : ** zwei Ebenen



E_1 : $\quad x - y + z = 0$,
E_2 : $\quad 2x + y + z = 1$
(zwei Gleichungen mit 3 Unbekannten).
1.Gl.+2.Gl. $\Rightarrow \quad 3x + 2z = 1 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \quad , \quad x \in I\!R$ beliebig,
2.Gl.-1.Gl. $\Rightarrow \quad x + 2y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$.
Also erhalten wir die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ : \ x \in I\!R \ , \ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \ , \ z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \right\} ,$$

oder anders geschrieben (für $x = \lambda$ setzen)

$$L = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \ : \ \lambda \in I\!R \right\} ,$$

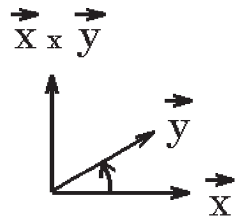
also stellt die Lösungsmenge eine Gerade (Schnittgerade) dar.

Vektorprodukt

Definition 2.10 : Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in I\!R^3$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in I\!R^3$ heißt der Vektor

$$\vec{x} \times \vec{y} = := \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \qquad \text{das } \textit{Vektorprodukt} \text{ von } \vec{x} \text{ und } \vec{y}.$$

$\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{x} \times \vec{y}$ bilden
ein Rechtsdreibein, d.h.: nimmt man die
rechte Hand und zeigt $\vec{x}$ in Richtung Daumen
und $\vec{y}$ in Richtung Zeigefinger, so zeigt
$\vec{x} \times \vec{y}$ in Richtung Mittelfinger.



Es gelten folgende Eigenschaften:

Satz 2.11 : Für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in I\!R^3$, $\lambda \in I\!R$ git

a) $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{x}$ und $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{y}$
b) $|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}| \sin \alpha$ (α der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$, falls $0 \leq \alpha \leq \pi$)
c) $|\vec{x} \times \vec{y}|$ ist der Flächeninhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms
d) $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}$ und $\vec{y}$ sind linear abhängig
e) $\vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x})$
f) $\lambda(\vec{x} \times \vec{y}) = (\lambda\vec{x}) \times \vec{y} = \vec{x} \times (\lambda\vec{y})$
g) $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$.

Aus f) und g) folgt die Linearität des Vektorprodukts.

Beweis :

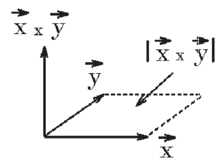
a) $< \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} >= x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) = 0$, analog $< \vec{x} \times \vec{y}, \vec{y} >= 0$.

b) $|\vec{x} \times \vec{y}|^2 = (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2$
$= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2$
$= |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 - < \vec{x}, \vec{y} >^2 = |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2(1 - \cos^2 \alpha) = |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 \sin^2 \alpha$.

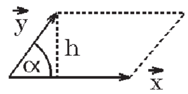
Also gilt

$$\boxed{|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}| \sin \alpha}$$

falls $0 \leq \alpha \leq \pi$.



c) Da $h = |\vec{y}| \sin \alpha$ gilt:
der Flächeninhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms ist
$F = |\vec{x}|h = |\vec{x}||\vec{y}| \sin \alpha = |\vec{x} \times \vec{y}|$.



d) $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{x} \times \vec{y}| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{0}$ oder $\vec{y} = \vec{0}$ oder $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}, \vec{y}$ linear abhängig.

e),f),g) Einfaches nachrechnen.

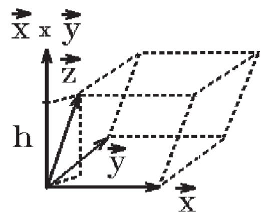
Beispiele

1. Sei E eine Ebene, die durch $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt wird $\Rightarrow$ $\vec{n} = \dfrac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$ ist eine Nomale auf E mit $|\vec{n}| = 1$.

2. Seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ 3 linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$, dann ist der *Inhalt* des von diesen Vektoren aufgespannten *Spats (Parallelepipeds)*

   $$\boxed{| < \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} > |}$$

   Denn:
   Grundfläche $|\vec{x} \times \vec{y}|$,
   Höhe $h = |\vec{z}| \cos \alpha$
   $\Rightarrow$ Inhalt$=|\vec{x} \times \vec{y}||\vec{z}| \cos \alpha =< \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} >$.

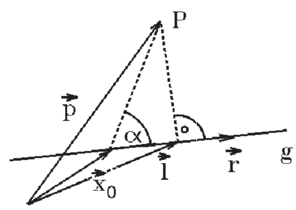


3. Der *Abstand eines Punktes P (mit Ortsvektor $\vec{p}$) zur Geraden g* mit Parameterdarstellung $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{r}$, mit $|\vec{r}| = 1$ ist

   $$\boxed{|(\vec{p} - \vec{x}_0) \times \vec{r}|}$$

   Der Ortsvektor des Lotfußpunktes ist

   $$\boxed{\vec{l} = \vec{x}_0 + < \vec{p} - \vec{x}_0, \vec{r} > \vec{r}}$$



Denn:

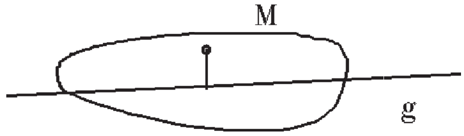
$|(\vec{p}-\vec{x}_0)\times\vec{r}| = |\vec{p}-\vec{x}_0||\vec{r}|\sin\alpha = |\vec{p}-\vec{x}_0|\sin\alpha = h$, da $|\vec{r}|=1$.

Für den Lotfußpunkt L mit Ortsvektor $\vec{l}$ gilt:
a) $\vec{l}=\vec{x}_0+t\vec{r}$ mit $t\in I\!R$ (L liegt auf g),
b) $<\vec{p}-\vec{l},\vec{r}>=0$ $((\vec{p}-\vec{l})\perp\vec{r})$
$\Rightarrow$ $<\vec{p},\vec{r}>=<\vec{l},\vec{r}>=<\vec{x}_0+t\vec{r},\vec{r}>=<\vec{x}_0,\vec{r}>+t<\vec{r},\vec{r}>$
$\Rightarrow$ $t=<\vec{p}-\vec{x}_0,\vec{r}>$, da $<\vec{r},\vec{r}>=|\vec{r}|=1$
$\Rightarrow$ $\vec{l}=\vec{x}_0+<\vec{p}-\vec{x}_0,\vec{r}>\vec{r}$.

4. *Trägheitsmoment bzg. der Geraden* $g\ :\ \vec{x}=\vec{x}_0+t\vec{r}$, $|\vec{r}|=1$:

$T_g = \int_M |(\vec{x}-\vec{x}_0)\times\vec{r}|^2\ d\vec{x}$

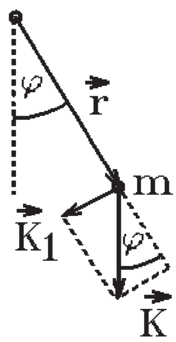
(Beweis später).



5. *Drehmoment*

Bei einer durch eine Kraft $\vec{K}$ bewirkten Drehbewegung ($\vec{K}\perp$ Drehachse) ensteht das Drehmoment $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{K}$.

Beispiel *Mathematisches Pendel*



$\vec{K}$ ist die Schwerkraft, also $|\vec{K}|=mg$,
$\vec{K}_1$ ist der Anteil von $\vec{K}$,
der die Bewegung bewirkt. Also gilt
$|\vec{K}_1|=|\vec{K}|\sin\varphi$
$\Rightarrow$ $|\vec{M}|=|\vec{K}_1||\vec{r}|=|\vec{K}||\vec{r}|\sin\varphi=|\vec{r}\times\vec{K}|$.
Nach dem Newtonschen Kraftgesetz gilt:
$mb=|\vec{K}_1|=|\vec{K}|\sin\varphi=mg\sin\varphi$ (b Bahnbeschleunigung)
$\Rightarrow$ $b=g\sin\varphi$, da $b=-l\varphi''$ (l Länge des Pendels)
$\Rightarrow$ $\varphi''+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$ (Differentialgleichung (DGL) für $\varphi(t)$).

Ist φ klein, so gilt $\sin\varphi\approx\varphi$. Also erhalten wir mit $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$ die DGL

$$\boxed{\varphi''+\omega^2\varphi=0 \qquad \text{Schwingungs-DGL}}$$

Als Lösung erhält man $\varphi(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$ (Beweis später).

6. *Induktionsgesetz*

Bewegung eines elektrischen Leiters mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch ein Magnetfeld mit der Induktion $\vec{B}$ erzeugt eine Feldstärke $\vec{E}=\vec{v}\times\vec{B}$.

7. *Lineare Abhängikeit, lineare Unabhängigkeit in* $I\!R^3$

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$ sind linear abhängig, denn

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12-15\\12-6\\5-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} \right\rangle = 0$

$\Rightarrow$ nach Beispiel 2. ist der Inhalt des Spats $= 0$, also die 3 Vektoren linear abhängig.

Definition 2.12 : Für $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in I\!R^3$ heißt
$< \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} >$ das *Spatprodukt* der 3 Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Es gelten folgende Eigenschaften

Satz 2.13 : Für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u} \in I\!R^3$ gilt:
a) $< \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} >= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ sind linear abhängig
b) $< \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} >=< \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} >$
c) $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) =< \vec{x}, \vec{z} > \vec{y} - < \vec{x}, \vec{y} > \vec{z}$ (Entwicklungssatz)
d) $< \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \times \vec{u} >=< \vec{x}, \vec{z} >< \vec{y}, \vec{u} > - < \vec{x}, \vec{u} >< \vec{y}, \vec{z} >$ (Identität von Lagrange).

Beweis :

a) $< \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} >= 0 \quad \Leftrightarrow$ Inhalt des von $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ aufgespannten Spats $= 0$
$\Leftrightarrow \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ sind linear abhängig.
b) Geometrisch klar, einfaches nachrechnen.
c) 1.Fall: $\vec{y}, \vec{z}$ linear abhängig, z.B. $\vec{z} = \lambda \vec{y} \quad \Rightarrow$ beide Seiten $= \vec{0}$,
2.Fall: $\vec{y}, \vec{z}$ linear unabhängig
$\Rightarrow \quad \vec{y} \times \vec{z} \perp$ Ebene, die von $\vec{y}, \vec{z}$ aufgespannt wird
$\Rightarrow \quad \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$ liegt in dieser Ebene
$\Rightarrow \quad \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = \lambda \vec{y} + \mu \vec{z}$ mit $\lambda, \mu \in I\!R$
$\Rightarrow \quad < \vec{x}, \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) >= \lambda < \vec{x}, \vec{y} > + \mu < \vec{x}, \vec{z} >= 0$,
setze $\lambda = c < \vec{x}, \vec{z} > \quad \Rightarrow \quad \mu = -c < \vec{x}, \vec{y} >$, $(c \in I\!R)$, (oder $< \vec{x}, \vec{z} >= 0$)
$\Rightarrow \quad \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = c\{< \vec{x}, \vec{z} > \vec{y} - < \vec{x}, \vec{y} > \vec{z}\}$,
erste Koordinate ausrechnen ergibt $c = 1$.
d) $< \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \times \vec{u} >=< \vec{x}, \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{u}) >$ (nach b))
$=< \vec{x}, < \vec{y}, \vec{u} > \vec{z} - < \vec{y}, \vec{z} > \vec{u} >$ (nach c))
$=< \vec{x}, \vec{z} >< \vec{y}, \vec{u} > - < \vec{x}, \vec{u} >< \vec{y}, \vec{z} >$.

2 Matrizen

Motivation: Gegeben sei das Gleichungssystem (GLS)

$$\begin{bmatrix} x+y=2 \\ 3x-2y=1 \end{bmatrix} \quad \text{2.Zeile - 3*1.Zeile ergibt :}$$

$$\begin{bmatrix} x+y=2 \\ -5y=-5 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x+y=2 \\ y=1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x=1 \\ y=1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist die Lösung dieses GLS.}$$

Dieses "Gaußsche Eliminationsverfahren" führt das gegebene GLS in ein äquivalentes GLS über. Dabei können folgende Operationen ausgeführt werden:
a) von einer Gleichung (Zeile) das Vielfache einer anderen Gleichung (Zeile) subtrahieren (oder addieren),
b) Gleichungen (Zeilen) vertauschen,
c) evt. Gleichungen (Zeilen) mit Faktor $\neq 0$ multiplizieren.

Bei diesen Operationen werden nur die Koeffizienten der Unbekannten und die rechte Seite verändert. Damit das GLS übersichtlicher und die Schreibarbeit geringer wird, faßt man die Koeffizienten zu einer "Matrix" zusammen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ Koeffizientenmatrix }, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Vektor der rechten Seite,}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Vektor der Unbekannten. Zusammen schreibt man dann:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1x+1y=2 \\ 3x-2y=1 \end{bmatrix} .$$

Beim Gaußschen Eliminationsverfahren schreibt man dann nur die Koeffizienten-Matrix und die rechte Seite auf:

$$\underset{\text{2.Zeile - 3*1.Zeile}}{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{array}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{(-1/5)*2.Zeile}}{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \quad y = 1 \quad , \quad x + y = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2 - y = 2 - 1 = 1$
$\Rightarrow \quad x = y = 1$.

Definition 2.14 : Für $a_{ij} \in I\!R$, $(i = 1, 2, \ldots, m \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n \; ; \; m, n \in I\!N)$ heißt

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{eine } (m,n)\text{-Matrix.}$$

Kurzschreibweise: $A = (a_{ij})_{(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)}$.

Hierbei heißt $\vec{z}_i^T := (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ die i-te Zeile oder der i-te *Zeilenvektor* von A

und $\vec{s}_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ die j-te Spalte oder der j-te *Spaltenvektor* von A.

Beispiele

$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine quadratische (2,2)-Matrix,

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ist eine (3,2)-Matrix,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist eine (3,1)-Matrix ; $(1, 2, 3)$ ist eine (1,3)-Matrix.

Jeder Spaltenvektor ist eine (m,1)-Matrix; jeder Zeilenvektor ist eine (1,n)-Matrix.
Auch für Matrizen werden Rechenoperationen (Addition, Multiplikation, Skalarmultiplikation) eingeführt:

Definition 2.15 :

a) Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ zwei (m,n)-Matrizen und $\lambda \in I\!R$, dann ist

$A + B := C = (c_{ij})$ mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$,

$\lambda A := D = (d_{ij})$ mit $d_{ij} = \lambda a_{ij}$ $\forall i, j$ mit $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$,

die *Addition* bzw. *Skalarmultiplikation*.

Das Ergebnis ist wieder eine (m,n)-Matrix. Die Operationen werden *elementweise* ausgeführt.

b) Sei $A = (a_{ij})$ eine (m,n)-Matrix und $B = (b_{ij})$ eine (n,p)-Matrix, dann ist

$AB := C := (c_{ij})$ mit $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ $\forall i, j$ das *Produkt* von A und B.

Das *Ergebnis* C ist dann eine (m,p)-Matrix.

c) Sei $A = (a_{ij})$ eine (m,n)-Matrix, dann heißt

$A^T := (c_{ij})$ mit $c_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j$ die *transponierte Matrix* von A. A^T ist dann eine (n,m)-Matrix.

Beispiele

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 0-2 \\ 3+8 & 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 11 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus den beiden letzten Beispielen folgt, daß die Multiplikation *nicht* kommutativ ist, also i.a. $AB \neq BA$ gilt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1+4+9) = (14) \qquad \text{(eine (1,1)-Matrix)},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{(eine (3,3)-Matrix)},$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; \vec{x}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{x}^T \vec{x} = <\vec{x}, \vec{x}>} \quad \text{(Skalarprodukt)}.$$

$AB = C = (c_{ij})$, $c_{ij} = <\vec{z}_i, \vec{s}_j>$ mit $\vec{z}_i^T$ die i-te Zeile von A und $\vec{s}_j$ die j-te Spalte von B, also ist c_{ij} das Skalarprodukt aus i-tem Zeilenvektor von A und j-tem Spaltenvektor von B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition 2.16 :

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{heißt (n,n)-Einheitsmatrix.}$$

Es gilt: $AE = EA = A$ für alle (n,n)-Matrizen A.

Satz 2.17 :

a) Bzgl. Addition und Skalarmultiplikation ist die Menge aller (m,n)-Matrizen ein *Vektorraum*, dh.: es gelten die Regeln a),b) von Satz 2.3 (S.28).

b) Für alle (m,n)-Matrizen A, (n,p)-Matrizen B und (p,q)-Matrizen C gilt:
$(AB)C = A(BC)$.

c) Für alle (m,n)-Matrizen A und B, (n,p)-Matrizen C und (q,m)-Matrizen D gilt:
$(A+B)C = AC + BC$
$D(A+B) = DA + DB$.

d) Für alle quadratischen (n,n)-Matrizen A und B gilt:
$AE = EA = A$ (E Einheitsmatrix)
$AB \neq BA$ (im allg.)
$(AB)^T = B^T A^T$.

Beweis :
a) Da die Operationen + und $\lambda\cdot$ elementweise ausgeführt werden, gelten die Regeln a),b) von Satz 2.3 (wegen der Eigenschaften der reellen Zahlen).
b),c) Nachrechnen,

z.B. $$((AB)C)_{ij} = \sum_{l=1}^{p}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl})c_{lj} = \sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}$$

$$(A(BC))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj}) = \sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj} \ .$$

d) $(AE)_{ij} =< \vec{z}_i, \vec{e}_j >= a_{ij}$

$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk} = (B^T A^T)_{ij} \ .$$

Definition 2.18 : Sei A eine (n,n)-Matrix. Existiert eine (n,n)-Matrix X mit
$\boxed{AX = E}$,
so heißt A *regulär* (invertierbar) und $X = A^{-1}$ die *inverse Matrix* von A.
Existiert keine inverse Matrix, so heißt A *singulär*.

Satz 2.19 : Für alle *regulären* (n,n)-Matrizen A und B gilt:

a) $AA^{-1} = A^{-1}A = E$
b) $(A^{-1})^{-1} = A$
c) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
d) Mit A ist auch A^T regulär, und es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
e) A hat n linear unabhängige Zeilenvektoren
f) A hat n linear unabhängige Spaltenvektoren.

Beweis :
Mit A, B regulär $\Rightarrow$ A^{-1}, A^T, AB sind regulär (Beweis später mit "Determinanten").
a),b) $A^{-1}X = E \quad \Rightarrow \quad AA^{-1}X = AE = A \quad \Rightarrow \quad X = A$, (da $AA^{-1} = E$)
$\Rightarrow$ $A^{-1}A = E$ und $(A^{-1})^{-1} = A$.
c) $(AB)X = E \quad \Rightarrow \quad A^{-1}ABX = A^{-1}E = A^{-1} \quad \Rightarrow \quad BX = A^{-1}$
$\Rightarrow$ $B^{-1}BX = B^{-1}A^{-1} \quad \Rightarrow \quad X = B^{-1}A^{-1} \quad \Rightarrow \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
d) $A^TX = E \quad \Rightarrow \quad (A^TX)^T = E^T = E \quad \Rightarrow \quad X^TA^{TT} = X^TA = E$
$\Rightarrow$ $X^TAA^{-1} = A^{-1} \quad \Rightarrow \quad X^T = A^{-1} \quad \Rightarrow \quad X = (A^{-1})^T \quad \Rightarrow \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

e),f) Seien $\vec{s}_i$ die i-ten Spaltenvektoren von A und $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{s}_i = \vec{0}$, d.h. mit

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{gelte} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{s}_i = A\vec{l} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}A\vec{l} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{l} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_n$ linear unabhängig.
Da die Zeilenvektoren von A die entsprechenden Spaltenvektoren von A^T sind und mit A auch A^T regulär ist, sind auch die Zeilenvektoren von A linear unabhängig.

Definition 2.20 : Die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren der (m,n)-Matrix A heißt *Rang der Matrix* A (rang A).

Bemerkung 2.21 : Es gilt:
Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren $=$ Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren.

Beweis : später.

Beispiele

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, denn $AA^{-1} = E$
$\Rightarrow$ rang $A = 3$, A regulär.
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$, denn $AA^{-1} = E$
$\Rightarrow$ rang $A = 3$, A regulär.
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rang $A = 2$, A nicht regulär $\Rightarrow$ A singulär.

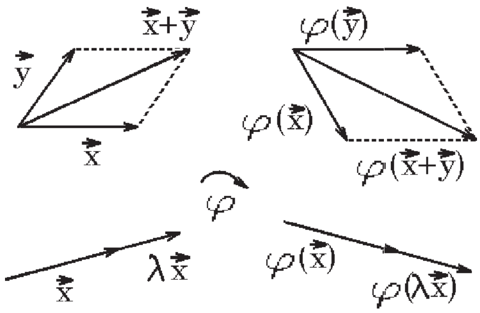
Geometrische Deutung

Jede (m,n)-Matrix A induziert eine *lineare Abbildung* des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$ vermöge

$$\boxed{\begin{aligned} A : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \vec{x} &\mapsto A\vec{x} \end{aligned}}$$

Umgekehrt existiert zu jeder linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine (m,n)-Matrix A mit $\varphi(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
Hierbei heißt φ *linear*, wenn für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}) \qquad \text{und} \qquad \varphi(\lambda\vec{x}) = \lambda\varphi(\vec{x})}$$



Lineare Abbildung

Für eine lineare Abbildung φ gilt:

$$\boxed{\varphi(\vec{0}) = \vec{0}}$$

Denn: $\quad \varphi(\vec{0}) = \varphi(0 \cdot \vec{x}) = 0 \cdot \varphi(\vec{x}) = \vec{0}$.

Beispiele linearer Abbildungen von $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

1) Drehung um eine Gerade durch 0,
2) Spiegelung an einer Ebene durch 0,
3) Eine Translation $\varphi : \vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{a}$ (mit $\vec{a} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$ fest) ist *keine* lineare Abbildung, denn $\varphi(\vec{0}) = \vec{a} \neq \vec{0}$.

Konstruktion der zu einer linearen Abbildung gehörenden Matrix A

Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung.
Gesucht: A (m,n)-Matrix mit $A\vec{x} = \varphi(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
Die Matrix A ist eindeutig festgelegt durch die Bilder der n Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ des $\mathbb{R}^n$, denn es gilt

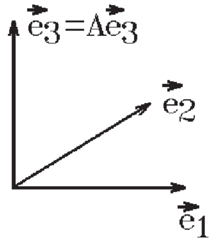
$$A\vec{e}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = \vec{s}_i \ ,$$

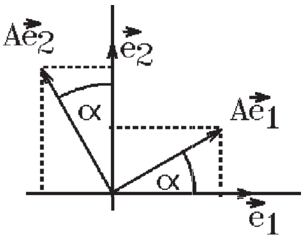
also das Bild von $\vec{e}_i$ ist der i-te Spaltenvektor von A.
Ist $\varphi(\vec{e}_i) = \vec{s}_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$, dann gilt $A = (\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_n)$ und

$$A\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{s}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(\vec{e}_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i) = \varphi(\vec{x}) \text{ , da } \varphi \text{ linear.}$$

Beispiele

a) *Drehung* um die z-Achse um den Winkel α





$$A\vec{e}_3 = \vec{e}_3 \ , \quad A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ erzeugt eine Drehung um die z-Achse um den Winkel α.

b) *Drehung* um die z-Achse um den Winkel $(-\alpha)$

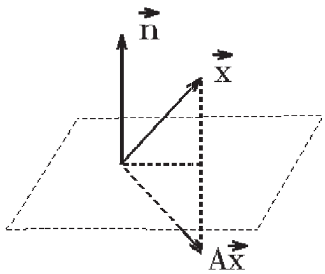
$$B = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also muß gelten $B = A^{-1}$, also

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) *Spiegelung* an der Ebene $E: \quad <\vec{x},\vec{n}>= 0$ mit $|\vec{n}| = 1$.

Es gilt:
$A\vec{x} = \vec{x} - 2\lambda\vec{n}$,
$\vec{x} - \lambda\vec{n}$ erfüllt die
Gleichung der Ebene, also
$<\vec{x} - \lambda\vec{n},\vec{n}>=<\vec{x},\vec{n}> -\lambda <\vec{n},\vec{n}>= 0$
$\Rightarrow \quad \lambda =<\vec{x},\vec{n}>$, (da $<\vec{n},\vec{n}>= |\vec{n}|^2 = 1$)
$\Rightarrow \quad \boxed{A\vec{x} = \vec{x} - 2 <\vec{x},\vec{n}> \vec{n}}$



Beispiel hierzu

$$E: \quad 2x + y - z = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{6}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{6}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

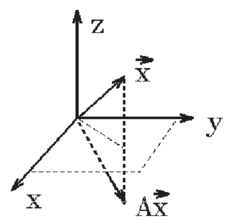
$$A\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{6}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da die Spiegelung von $A\vec{x}$ wieder $\vec{x}$ ergibt, gilt hier $A^{-1} = A$.

d) *Spiegelung* an der $(x.y)-$Ebene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$



Matrizen, die eine Spiegelung an einer Ebene durch 0 oder eine Drehung an einer Geraden durch 0 erzeugen, gehören zu den *orthogonalen Matrizen.* Für diese gilt: $|A\vec{x}| = |\vec{x}| \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definition 2.22 : Sei A eine *reelle* (n,n)-Matrix.
A heißt *symmetrisch* $\quad \Leftrightarrow \quad A = A^T$.
A heißt *orthogonal* $\quad \Leftrightarrow \quad A^{-1} = A^T$.

Besitzt die Matrix A komplexe Elemente $a_{ij} \in \mathbb{C}$, so definieren wir

Definition 2.23 : Sei A eine *komplexe* (n,n)-Matrix.
A heißt *hermitesch* $\quad \Leftrightarrow \quad A = \bar{A}^T$.
A heißt *unitär* $\quad \Leftrightarrow \quad A^{-1} = \bar{A}^T$.

Beispiele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ist symmetrisch,}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1-i & 2 & 1 \\ -i & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ist hermitesch,}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist orthogonal , da } A^{-1} = A^T.$$

Satz 2.24 : Für orthogonale Matrizen gilt:

a) A ist orthogonal $\quad \Leftrightarrow \quad$ Die *Zeilenvektoren* von A bilden ein *ONS (Orthonormalsystem)*, d.h.: alle Vektoren stehen *paarweise senkrecht* aufeinander und haben die *Länge 1.*
b) A ist orthogonal $\quad \Leftrightarrow \quad$ Die *Spaltenvektoren* von A bilden ein *ONS.*
c) A ist orthogonal $\quad \Leftrightarrow \quad |A\vec{x}| = |\vec{x}| \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, d.h.: A ist *längentreu.*
d) A und B orthogonal $\quad \Rightarrow \quad AB$ ist orthogonal.

Beweis :

a) $\quad (AA^T)_{ij} =< \vec{z}_i, \vec{z}_j >= \left\{ \begin{matrix} 1 & ,\text{falls } i = j \\ 0 & ,\text{falls } i \neq j \end{matrix} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad AA^T = E \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1} = A^T.$

b) $\quad A^T$ ist auch orthogonal, denn $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^T$, also bilden auch die Spaltenvektoren ein ONS.

c) "$\Rightarrow$" $|A\vec{x}|^2 =< A\vec{x}, A\vec{x} >=< A^T A\vec{x}, \vec{x} >=< E\vec{x}, \vec{x} >=< \vec{x}, \vec{x} >= |\vec{x}|^2$ (nach folgendem Hilfssatz).
"$\Leftarrow$" $|\vec{s}_i| = |A\vec{e}_i| = |\vec{e}_i| = 1$, also haben die Spaltenvektoren die Länge 1,
$|\vec{s}_i - \vec{s}_j|^2 = |A\vec{e}_i - A\vec{e}_j|^2 = |A(\vec{e}_i - \vec{e}_j)|^2 = |\vec{e}_i - \vec{e}_j|^2$
$\Rightarrow$ $< \vec{s}_i - \vec{s}_j, \vec{s}_i - \vec{s}_j >=< \vec{e}_i - \vec{e}_j, \vec{e}_i - \vec{e}_j >$
$\Rightarrow$ $< \vec{s}_i, \vec{s}_i > -2 < \vec{s}_i, \vec{s}_j > + < \vec{s}_j, \vec{s}_j >=< \vec{e}_i, \vec{e}_i > -2 < \vec{e}_i, \vec{e}_j > + < \vec{e}_j, \vec{e}_j >$
$\Rightarrow$ $< \vec{s}_i, \vec{s}_j >=< \vec{e}_i, \vec{e}_j >= 0$ für $i \neq j$ (da $< \vec{s}_i, \vec{s}_i >= |\vec{s}_i|^2 = 1$ und $< \vec{e}_i, \vec{e}_i >= |\vec{e}_i|^2 = 1$)
$\Rightarrow$ die Spaltenvektoren bilden ein ONS $\Rightarrow$ A ist orthogonal.
d) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T$.

Hilfssatz 2.25 : Für alle (n,n)-Matrizen A und alle Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\boxed{< \vec{x}, A\vec{y} >=< A^T\vec{x}, \vec{y} >}$$

Beweis :

$$< \vec{x}, A\vec{y} >= \sum_{i=1}^{n} x_i (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k) = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i) y_k =< A^T\vec{x}, \vec{y} > .$$

Beispiel

$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist orthogonal, da die Spaltenvektoren ein ONS bilden.

Koordinatentransformation

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ sei die übliche Basis des $\mathbb{R}^n$,
$\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \dots, \vec{e}_n{}'\}$ sei eine andere Basis des $\mathbb{R}^n$,
also $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \dots, \vec{e}_n{}'$ sind linear unabhängig.
$\vec{e}_i{}'$ läßt sich als Bild von $\vec{e}_i$ auffassen: $\vec{e}_i{}' = A\vec{e}_i$, mit $\vec{e}_i{}'$ ist die i-te Spalte von A,
also $A = (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \dots, \vec{e}_n{}')$, $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.
Für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt dann:
$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i' \vec{e}_i{}'$ (x_i sind die alten Koordinaten und x_i' die neuen Koordinaten von $\vec{x}$). In Matrizenschreibweise lautet diese Gleichung:

$$\vec{x} = E \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} .$$

Hieraus folgt:

(2.26)

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

Bilden die neuen Basisvektoren $\vec{e}_i\,'$ ein ONS, so ist die Matrix A orthogonal und es gilt $\quad A^{-1} = A^T$.

Beispiele

1. $\vec{e}_1\,' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_2\,' = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{e}_3\,' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (linear unabhängig)

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & -3 & 3 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix} .$$

Sei $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 = x'_1\vec{e}_1\,' + x'_2\vec{e}_2\,' + x'_3\vec{e}_3\,'$

$\Rightarrow \quad A \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$ Die Lösung dieses GLS ergibt:

$x'_1 = \dfrac{4}{9}\ ,\ x'_2 = \dfrac{3}{9}\ ,\ x'_3 = \dfrac{1}{9}$ sind die neuen Koordinaten, also

$\vec{x} = \dfrac{4}{9}\vec{e}_1\,' + \dfrac{3}{9}\vec{e}_2\,' + \dfrac{1}{9}\vec{e}_3\,' .$

2. $\vec{e}_1\,' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \vec{e}_2\,' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3\,' = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ bilden ein ONS, also gilt:

$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ist orthogonal, also gilt z.B. für

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = x'_1\vec{e}_1\,' + x'_2\vec{e}_2\,' + x'_3\vec{e}_3\,'$$

$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, also

$\vec{x} = \sqrt{2}\vec{e}_1\,' + \vec{e}_2\,' .$

Lineare Gleichungssysteme

Sei A eine (m,n)-Matrix und $\vec{b} \in I\!R^m$.

Gesucht: $\vec{x} \in I\!R^n$ mit

$$\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$$

A heißt *Koeffizientenmatrix* , $\vec{b}$ heißt *"rechte Seite"*.

$L = \{\vec{x} \in I\!R^n \ : \ A\vec{x} = \vec{b}\,\}$ heißt *Lösungsmenge* des linearen GLS (Gleichungssystems).

Sonderfall: $m = n$ und *A regulär*

Ist A eine reguläre (n,n)-Matrix, so ist das GLS $A\vec{x} = \vec{b}$ *eindeutig lösbar* mit $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Bestimmung der inversen Matrix A^{-1}

Sei A regulär $\Rightarrow$ es existiert A^{-1} mit $AA^{-1} = E$.
Sei $A^{-1} = (\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_n)$, also $\vec{s}_i$ der i-te Spaltenvektor von A^{-1} , dann gilt:
$A(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n) = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, also für $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\boxed{A\vec{s}_i = \vec{e}_i}.$$

Zur Berechnung der inversen Matrix $A^{-1} = (\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n)$ müssen also n GLS $A\vec{s}_i = \vec{e}_i$ gelöst werden (mit gleicher Koeffizientenmatrix, aber unterschiedlichen rechten Seiten $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$).

Gaußsches Eliminationsverfahren

Gegeben: $A\vec{x} = \vec{b}$ mit der *Koeffizientenmatrix* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ und der *erweiterten Matrix* $(A \mid \vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$.

Satz 2.27 : *Gauß Algorithmus*

Ein GLS $A\vec{x} = \vec{b}$ kann durch folgende Operationen:

a) Gleichungen (Zeilen) vertauschen,
b) zu einer Gleichung (Zeile) das Vielfache einer anderen Gleichung (Zeile) addieren,
c) Unbekannte (Spalten) vertauschen

in ein äquivalentes GLS mit folgender erweiterter Matrix umgewandelt werden:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc|c}
c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} & d_1 \\
0 & c_{22} & \dots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \dots & c_{2n} & d_2 \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} & d_r \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{r+1} \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & d_m
\end{array}\right)$$

mit $\quad c_{ii} \neq 0 \quad$ für $i = 1, 2, \dots, r$, also $\quad C\tilde{\vec{x}} = \vec{d}$.
Hierbei ändert sich nicht die Lösungsmenge, auch nicht der Rang der Koeffizientenmatrix, bzw. der erweiterten Matrix. Der Rang der Matrix A ist r.

Das GLS ist lösbar $\quad \Leftrightarrow \quad d_{r+1} = \dots = d_m = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\boxed{\text{rang } A \; = \; \text{rang}(A \mid \vec{b})}$$

In diesem Fall sind $(n-r)$ *Unbekannte frei wählbar*, alle anderen Unbekannten lassen sich dann aus den ersten r Gleichungen bestimmen.

Beweis : Die in a) bis c) aufgeführten Operationen verändern nicht die Lösungsmenge und auch nicht die Ränge der Matrizen (d.h. die Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren).

Sei $a_{11} \neq 0 \quad$ (a_{11} heißt dann *Pivotelement*).
(Ist $a_{11} = 0$, so muß vorher ein Zeilentausch ($\hat{=}$ vertauschen von Gleichungen), oder falls alle $a_{i1} = 0$ sind, ein Spaltentausch ($\hat{=}$ vertauschen von Unbekannten) durchgeführt werden.)

$$\boxed{(i - te\ Zeile) - \frac{a_{i1}}{a_{11}} * (1.Zeile) \quad , \quad (i = 2, 3, \dots, m)}$$

Dann erhält man $\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots \\ \vdots & & \\ 0 & \tilde{a}_{m2} & \dots \end{pmatrix}$

Sei $\tilde{a}_{22} \neq 0 \quad$ ($\tilde{a}_{22}$ heißt dann Pivotelement, sonst Zeilen- oder wenn nötig Spaltentausch).

$$\boxed{(i - te\ Zeile) - \frac{\tilde{a}_{i2}}{\tilde{a}_{22}} * (2.Zeile) \quad , \quad (i = 3, 4, \dots, m)}$$

Dann erhält man $\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$

Fährt man so fort, so erhält man die obige erweiterte Matrix mit $c_{ii} \neq 0$ für $i = 1, 2, \ldots, r$. Ist rang A= rang $(A \mid \vec{b}) = r$, so sind $(n - r)$ Variable frei wählbar. Hat kein Spaltentausch stattgefunden, so sind $x_{r+1}, \ldots, x_n$ frei wählbar. Die restlichen Unbekannten lassen sich dann aus den ersten r Gleichungen durch *"Rückwärtseinsetzen"* bestimmen :

$$\boxed{x_k = \frac{1}{c_{kk}} \cdot (d_k - \sum_{j=k+1}^{n} c_{kj} x_j)}$$

für $k = r, r-1, \ldots, 1$.

Bemerkung 2.28 :
An der neuen Matrix C erkennt man, daß die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von A *gleich* der Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A ist, denn die Matrix C

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} c_{11} & \ldots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \ldots & c_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \ldots & c_{rn} \end{array}\right)$$

hat r linear unabhängige Zeilenvektoren und auch r linear unabhängige Spaltenvektoren (da $c_{ii} \neq 0$ und dim $\mathbb{R}^r = r$), also hat auch die Matrix A r linear unabhängige Zeilen- und Spaltenvektoren.

Beispiel 1

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 8 \ . \end{aligned}$$

In Matrizenschreibweise $A\vec{x} = \vec{b}$ erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

oder als erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 9 & 2 & 8 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 5 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

(2.Zeile $-2 *$ 1.Zeile, 3.Zeile $-$1.Zeile) (3.Zeile +2.Zeile)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ rang A = rang $(A \mid \vec{b}) = 2$ $\Rightarrow$ $(4 - 2) = 2$ Unbekannte frei wählbar, also
$x_3 = \lambda\ ,\ x_4 = \mu\ ,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad x_2 = (-5+5\lambda)/(-5) = 1-\lambda\ , \quad x_1 = 3-2\mu-4\lambda-2(1-\lambda) = 1-2\lambda-2\mu$, also ist die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\lambda-2\mu \\ 1-\lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \lambda, \mu \in I\!R \right\} .$$

Beispiel 2

$$\begin{array}{l} y+z=1 \\ x+z=2 \\ x+y=3 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{(Zeilentausch)}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{(3.Zeile } -1.\text{Zeile)}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Man kann hier auch noch weitere Schritte machen, um vorne die Einheitsmatrix zu erhalten; dann steht rechts die Lösung des GLS

$$\Leftrightarrow \quad \underset{((-1/2)*3.\text{Zeile})}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{(1.Zeile } -3.\text{Zeile, 2.Zeile } -3.\text{Zeile)}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist eindeutige Lösung (rang } A = 3).$$

Geometrische Deutung des letzten Beispiels

Die 3 Gleichungen stellen 3 Ebenen des $I\!R^3$ dar, die Lösungsmenge ist also die Schnittmenge. Es ergeben sich drei Möglichkeiten

1) eindeutig lösbar (genau ein Schnittpunkt), 

2) mehrdeutig lösbar (Schnittgerade oder Schnittebene), 

3) nicht lösbar. 

Bei 1) sind die drei Normalenvektoren linear unabhängig, also rang $A = 3$,
bei 2)3) linear abhängig, also rang $A < 3$,
bei 2) ist rang $A = \text{rang}(A \mid \vec{b})$,
bei 3) ist rang $A \neq \text{rang}(A \mid \vec{b})$.

Numerische Fehler

Bei der Berechnung der Lösung mit Hilfe von Taschenrechner oder Computer können Rechenfehler (durch Rundung) auftreten:

Beispiel 1 (5-stellige Rechnung)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.00035 & 1 & 1.2224 \\ 1 & 1 & 2.3330 \end{array}\right)$$

exakte Lösung: $x_1 = 1.111$, $x_2 = 1.222$

(2.Zeile $-(1/0.00035) * 1.$Zeile) ergibt

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.00035 & 1 & 1.2224 \\ 0 & -2856.1 & -3490.3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ $x_2 = (3490.3/2856.1) = 1.2221$
$x_1 = (1.2224 - 1.2221)/0.00035 = 0.85714$, also ein sehr ungenaues Ergebnis.

Da hier das Pivotelement a_{11} sehr klein ist, sollte man besser vorher die 1.Zeile mit der 2.Zeile vertauschen, also

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2.3330 \\ 0.00035 & 1 & 1.2224 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2.3330 \\ 0 & 0.99965 & 1.2216 \end{array}\right)$$

(2.Zeile $-0.00035 * 1.$Zeile)

$\Rightarrow$ $x_2 = 1.222$, $x_1 = 2.333 - 1.222 = 1.111$ (besseres Ergebnis).

Allgemein: Durch Zeilentausch wählt man das Element als *Pivotelement*, das ab Diagonalelement das *betraglich größte* in der *jeweiligen Spalte* ist, in der Nullen erzeugt werden.

Schlecht konditionierte Matrix

Trotz dieser optimalen "Pivotstrategie" können bei gewissen GLS große Rechenfehler auftreten:

Beispiel 2

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1/8 & 1/9 & 1 \\ 1/9 & 1/10 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1/8 & 1/9 & 1 \\ 0 & 1/810 & 1/9 \end{array}\right)$$

(2.Zeile $-(8/9) * 1.$Zeile)

$\Rightarrow$ $x_2 = 810/9 = 90$, $x_1 = 8(1 - (90/9)) = -72$ ist die exakte Lösung.

3-stellige Rechnung ergibt:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.125 & 0.111 & 1 \\ 0.111 & 0.100 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0.125 & 0.111 & 1 \\ 0 & 0.0014 & 0.112 \end{array}\right)$$

(2.Zeile $-(0.111/0.125) * 1.$Zeile)

$\Rightarrow$ $x_2 = 0.112/0.0014 = 80$, $x_1 = (1 - 80 * 0.111)/0.125 = -63.04$, also ein wesentlich ungenaueres Ergebnis.

Die Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/9 \\ 1/9 & 1/10 \end{pmatrix}$ in diesem Beispiel ist *schlecht konditioniert*. Berechnet man die Determinante von A (später): $\det A = (1/8)*(1/10)-(1/9)*(1/9) \approx 1.5*10^{-4}$, so sieht man, daß dieser Wert sehr klein ist. Wäre $\det A = 0$, so wäre das GLS *nicht eindeutig lösbar* und die Matrix A singulär (siehe später). Hier ist also A "fast singulär". In solchen Fällen muß die Rechnung mit möglichst *hoher Rechengenauigkeit* durchgeführt werden. Die beiden Gleichungen bedeuten 2 Geraden in $\mathbb{R}^2$:

gut konditioniert schlecht konditioniert

Berechnung der inversen Matrix

Vor.: A regulär, also $AX = E$. Gesucht $X = A^{-1}$.

Man muß n GLS lösen: $A\vec{s}_i = \vec{e}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$.
Schreibt man sofort alle rechten Seiten $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ zusammen auf, so erhält man die erweiterte Matrix $(A \mid E)$. Führt man nun Gauß-Schritte solange durch, bis man $(E \mid X)$ erhält, so gilt $X = A^{-1}$.

Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, also lautet die erweiterte Matrix :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

(2.Zeile $-(3/2) * 1$.Zeile , 3.Zeile -1.Zeile) , ($2 * 2$.Zeile)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 12 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

(1.Zeile $-3 * 2$.Zeile $-2 * 3$.Zeile) $(1/2) * 1$.Zeile)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ergebnis aus Satz 2.27

$A\vec{x} = \vec{b}$ *lösbar* $\Leftrightarrow$ rang $A =$ rang $(A \mid \vec{b})$.
Ist A eine quadratische (n,n)-Matrix, dann gilt
$A\vec{x} = \vec{b}$ *eindeutig lösbar* $\Leftrightarrow$ rang $A = n$ $\Leftrightarrow$ A *regulär* $\Leftrightarrow$ A^{-1} *existiert.*

Definition 2.29 : Sei V ein *Vektorraum* und $W \subset V$.
Gilt für alle $x, y \in W$, $\lambda \in I\!R$: $x + y \in W$, $\lambda x \in W$ (d.h.: abgeschlossen bzgl. Addition und Skalarmultiplikation), dann heißt W ein *linearer Unterraum* von V. Ist r die *Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren* aus W, so heißt r die *Dimension* von W : dim $W = r$. Je r linear unabhängige Vektoren aus W bilden dann eine *Basis* von W.

Beispiele

1. $I\!R^n$ ist ein Vektorraum und hat die Dimension n, denn $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ sind linear unabhängig (denn $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ ist regulär), und jeder andere Vektor $\vec{x} \in I\!R^n$ läßt sich als Linearkombination von $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ schreiben:
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \quad \Rightarrow \quad \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\} \text{ ist Basis von } I\!R^n.$$

2. Jede Gerade durch 0 ist ein 1-dim. Unterraum des $I\!R^n$, denn für $g = \{\vec{x} \in I\!R^n \ : \ \vec{x} = t\vec{r} \ , \ t \in I\!R\}$ mit $\vec{r} \neq \vec{0}$ gilt: $\{\vec{r}\}$ ist Basis von g, $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in g \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_1 = t_1\vec{r} \ , \ \vec{x}_2 = t_2\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = (t_1 + t_2)\vec{r} = t_3\vec{r} \ \in g$ und $\vec{x} = t\vec{r} \ \in g \quad \Rightarrow \quad \lambda\vec{x} = (\lambda t)\vec{r} = t_4\vec{r} \ \in g$, also ist g ein 1-dim. Unterraum des $I\!R^n$.

3. Jede Ebene durch 0 ist ein 2-dim. Unterraum des $I\!R^n$, denn $E = \{\vec{x} \in I\!R^n \ : \ \vec{x} = t\vec{u} + s\vec{v} \ , \ t, s \in I\!R\}$ mit $\vec{u}, \vec{v}$ linear unabhängig $\Rightarrow \quad \{\vec{u}, \vec{v}\}$ ist Basis von E.

Definition 2.30 : Sei A eine (m,n)-Matrix, $\vec{x} \in I\!R^n$.

a) $A\vec{x} = \vec{0}$ heißt *homogenes* lineares GLS,
b) $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $\vec{b} \neq \vec{0}$ heißt *inhomogenes* lineares GLS.

Satz 2.31 :

a) $\vec{x} = \vec{0}$ ist Lösung des homogenen GLS (triviale Lösung).
b) Die *Lösungsmenge* L des *homogenen* GLS ist ein linearer Unterraum des $I\!R^n$ mit dim $L = n - r$, falls rang $A = r$.
c) Die allgemeine Lösung des *inhomogenen* GLS läßt sich darstellen durch die allgemeine Lösung des homogenen GLS plus eine partikuläre Lösung des inhomogenen GLS, also
$\vec{x} = \vec{x}_h + \vec{x}_0$ mit $A\vec{x}_h = \vec{0}$, $A\vec{x}_0 = \vec{b}$,
$L_{inh} = \{\vec{x} = \vec{x}_h + \vec{x}_0 \ \}$, hierbei ist $\vec{x}_h$ die allgemeine Lösung des homogenen GLS, $\vec{x}_0$ eine partikuläre Lösung des inhomogenen GLS.

Beweis : a) klar.
b) Mit $A\vec{x}_1 = \vec{0}$ und $A\vec{x}_2 = \vec{0}$ gilt auch $A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = \vec{0}$, mit $A\vec{x} = \vec{0}$ gilt auch $A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x} = \vec{0}$. Da rang $A = r \quad \Rightarrow \quad (n - r)$ viele Unbekannte sind frei wählbar. Seien also $x_{r+1}, \ldots, x_n$ frei wählbar mit $x_{r+1} = \lambda_1, \ldots, x_n = \lambda_{n-r}$, dann ist die allgemeine Lösung des homogenen GLS $L = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-r} \end{pmatrix} \ , \ \lambda_i \in I\!R \right\}$, also

bilden die Vektoren $\begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ... , $\begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von L. Das sind $(n-r)$ linear unabhängige Vektoren $\Rightarrow$ dim $L = n - r$.

c) Sei $\vec{x} = \vec{x}_h + \vec{x}_0 \quad \Rightarrow \quad A\vec{x} = A\vec{x}_h + A\vec{x}_0 = \vec{0} + \vec{b} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}$ ist Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$. Sei umgekehrt $\vec{x}$ Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ und $\vec{x}_0$ partikuläre Lösung, also $A\vec{x}_0 = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad A(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} - \vec{x}_0 = \vec{x}_h \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \vec{x}_h + \vec{x}_0$.

Bemerkung 2.32 : Alle Aussagen und Verfahren (z.B. Gauß Algorithmus) gelten auch für *komplexe Matrizen* und *komplexe lineare GLS* (Unterschied: Skalarmultiplikation mit $\lambda \in \mathbb{C}$). Beim Gauß-Algorithmus muß komplex gerechnet werden.

Beispiel zu Satz 2.31

$$\begin{array}{rl} y + z &= 0 \\ x \qquad + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{(Zeilentausch)}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{(3.Zeile }-\text{1.Zeile)}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ rang $A = 2$, $z = \lambda$, $y = -\lambda$, $x = -\lambda$,

$$L = \left\{ \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;,\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{Gerade durch } \vec{0} \text{ , dim } L = 3 - 2 = 1.$$

$$\begin{array}{rl} y + z &= 1 \\ x \qquad + z &= 2 \\ x + y + 2z &= 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist partikuläre Lösung} \quad \Rightarrow$$

$$L_{inh} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;,\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{Gerade durch } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ in Richtung } \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3 Determinanten

Motivation: Gegeben sei das GLS

$a_{11}x + a_{12}y = b_1$

$a_{21}x + a_{22}y = b_2$,

also die Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und die rechte Seite $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Durch Umformung erhalten wir

$a_{11}x = b_1 - a_{12}y$

$a_{21}x = b_2 - a_{22}y$,

$a_{12}y = b_1 - a_{11}x$

$a_{22}y = b_2 - a_{21}x$,

$a_{22} * 1.$Zeile $-a_{12} * 2.$Zeile ergibt

$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = b_1a_{22} - b_2a_{12}$,

$a_{11} * 4.$Zeile $-a_{21} * 3.$Zeile ergibt

$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = b_2a_{11} - b_1a_{21}$.

Also ist das GLS genau dann eindeutig lösbar, wenn

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Definition 2.33 : Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ eine (2,2)-Matrix, dann heißt

$$\boxed{\det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

die *Determinante von A*.

Aus obiger Rechnung folgt sofort

Satz 2.34 : Das (2,2)-GLS $A\vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det A \neq 0$.
In diesem Fall ist

$$x = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad y = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix} \qquad \text{die eindeutige Lösung.}$$

Verallgemeinerung auf $n > 2$ (per Reduktion)

Definition 2.35 :

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ eine quadratische (n,n)-Matrix,

Sei $Aij = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ die (n-1,n-1)-Matrix,
die aus A entsteht durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte, dann heißt

$$\boxed{\det A := \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} det A_{1j}}$$

die *Determinante* der Matrix A.

Für $n = 1$, also $A = (a_{11})$ ist $\det A = a_{11}$.

Andere Schreibweise: $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Beispiel :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \det A = 1 * \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 2 * \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 4 * \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
$= 1(3-2) - 2(0-1) + 4(0-1) = 1 + 2 - 4 = -1.$

Eigenschaften der Determinante

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n)$ ($\vec{s}_i$ der i-te Spaltenvektor von A), dann ist
$\det A = D(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n)$ eine Funktion der n Spaltenvektoren. Für $\det A = D(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n)$ gilt dann:

Satz 2.36 :
a) $D(\vec{s}_1, \dots, \lambda\vec{s}_i, \dots, \vec{s}_n) = \lambda D(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_i, \dots, \vec{s}_n)$, ($\lambda \in \mathbb{R}$), d.h.:
Ein gemeinsamer Faktor einer Spalte kann aus der Determinante herausgezogen werden.

b) $D(\vec{s}_1, \dots, \vec{t}_1 + \vec{t}_2, \dots, \vec{s}_n) = D(\vec{s}_1, \dots, \vec{t}_1, \dots, \vec{s}_n) + D(\vec{s}_1, \dots, \vec{t}_2, \dots, \vec{s}_n)$.

a) und b) besagen,daß $\det A$ *bzgl. jeder Spalte linear* ist (Multilinearform).

c) $D(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_i, \dots, \vec{s}_j, \dots, \vec{s}_n) = -D(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_j, \dots, \vec{s}_i, \dots, \vec{s}_n)$.
Bei Spaltentausch kehrt sich das Vorzeichen um.

d) $D(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}, \dots, \vec{s}, \dots, \vec{s}_n) = 0$.
Bei zwei gleichen Spalten ist $\det A = 0$.

e) $D(\vec{s}_1,\dots,\vec{s}_i+\lambda\vec{s}_j,\dots,\vec{s}_n) = D(\vec{s}_1,\dots,\vec{s}_i,\dots,\vec{s}_n) \quad (j \neq i)$.
Der Wert von $\det A$ ändert sich nicht, wenn zu einer Spalte das Vielfache einer anderen Spalte addiert wird.

f) $\det E = 1 \quad$ (E Einheitsmatrix).

g) $$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \ .$$
(obere Dreiecksmatrix) (untere Dreiecksmatrix)

Beweis :
a),b),c) per Induktion.
Beispielhaft wollen wir die Beweise für $n = 2$ durchführen :

a) $\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} .$

b) $\begin{vmatrix} b_{11}+b_{12} & a_{12} \\ b_{21}+b_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = (b_{11}+b_{12})a_{22} - (b_{21}+b_{22})a_{12} = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{12} & a_{12} \\ b_{22} & a_{22} \end{vmatrix} .$

c) $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} .$

d) $D(\vec{s}_1,\dots,\vec{s},\dots,\vec{s},\dots,\vec{s}_n) = -D(\vec{s}_1,\dots,\vec{s},\dots,\vec{s},\dots,\vec{s}_n)$ (nach c) mit vertauschen von $\vec{s}$ mit $\vec{s}$)
$\Rightarrow \quad D(\vec{s}_1,\dots,\vec{s},\dots,\vec{s},\dots,\vec{s}_n) = 0.$

e) $D(\vec{s}_1,\dots,\vec{s}_i+\lambda\vec{s}_j,\dots,\vec{s}_n) = D(\vec{s}_1,\dots,\vec{s}_i,\dots,\vec{s}_n) + \lambda D(\vec{s}_1,\dots,\vec{s}_j,\dots,\vec{s}_j,\dots,\vec{s}_n)$
$= D(\vec{s}_1,\dots,\vec{s}_i,\dots,\vec{s}_n)$ (nach d),da in der zweiten Determinante zwei gleiche Spalten).

g) (Induktionsbeweis)
$n = 1 \ : \quad \det A = \det(a_{11}) = a_{11}$,

$$n-1 \to n \ : \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,2} & \dots & \ddots & 0 \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$= a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ (nach Induktionsvor.).

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \det A^T = \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n-1} & \dots & \ddots & 0 \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$= a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ (da $\det A = \det A^T$ (später)).

f) $\det E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$ (nach g).

Im folgenden Satz werden noch 3 weitere wichtige Eigenschaften zusammengefaßt:

Satz 2.37 : Seien A, B (n,n)-Matrizen. Dann gilt:

a) $\det(AB) = \det A \det B$
b) $\det(A^T) = \det A$
c) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$, falls A regulär.

Beweis :
a),b) per Induktion.
Beweis für $n = 2$: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$
a) $\Rightarrow \quad \det(AB) = (ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) = acef + adeh + bcgf + bdgh - acef - adgf - bceh - bdgh = adeh + bcgf - adgf - bceh$,
$\det A \det B = (ad - bc)(eh - fg) = adeh + bcgf - adgf - bceh = det(AB)$.
b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \quad \det A = ad - bc = \det A^T$.
c) $\det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1} = \det E = 1 \quad \Rightarrow \quad \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Folgerung 2.38 :
Alle Regeln des Satzes 2.36 gelten auch für die *Zeilenvektoren* von A; $\det A$ ist also auch linear bzgl. aller Zeilenvektoren.

Denn: $\det A^T = \det A$, Zeilenvektoren von A sind die Spaltenvektoren von A^T.

Folgerung 2.39 :
Bei der Berechnung einer Determinante kann nach jeder Zeile oder Spalte entwickelt werden:

z.B. *Entwicklung nach der i-ten Zeile*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij} \ ,$$

oder *Entwicklung nach der j-ten Spalte*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

(wegen Satz 2.36 c) und Satz 2.37 b)).

Hierbei ist folgende Vorzeichenregel zu beachten: $(-1)^{i+j}$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ & & & & + \end{pmatrix}$$

Beispiele

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \; ,$

(Entwicklung nach der 2.Zeile, 2-te Determinante = 0)

oder $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-2) = -1 \; .$

(Entwicklung nach der 1.Spalte)

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \left\{ 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\} = 2(2-2) = 0 \; .$

(Entwicklung nach der 3.Spalte)

Man kann auch zunächst die Regeln des Satzes 2.36 anwenden, um die Berechnung von $\det A$ zu vereinfachen:

3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1 \; .$

(3.Zeile -1.Zeile)

4) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \; .$

(Faktor 2 aus 2.Spalte herausziehen)

5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \; .$

(2 gleiche Zeilen)

6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \; .$

(2 Zeilen vertauschen)

Um die Determinante einer größeren Matrix zu berechnen, wendet man zunächst Eliminationsschritte des *Gauß - Algorithmus* an, um eine *obere Dreiecksmatrix* zu erhalten. Der Wert der Determinante ist dann (bis auf Vorzeichen, falls Zeilen- oder Spaltentausch stattgefunden hat) das Produkt der Diagonalelemente (bei jedem Zeilen- oder Spaltentausch ändert sich das Vorzeichen) (siehe Beispiel 3)).

Folgerung 2.40 :
Ist A eine *orthogonale* (reelle) (n,n)-Matrix $\Rightarrow$ $\det A = \pm 1$.

Denn : $AA^T = E \quad \Rightarrow \quad \det A \det A^T = 1 \quad \Rightarrow \quad (\det A)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det A = \pm 1$, (da $\det A^T = \det A$).

Man erhält "$\det A = 1$" bei einer reinen Drehung, "$\det A = -1$" bei einer Dreh-Spiegelung.

Folgerung 2.41 :
Für $A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline O & D \end{array}\right)$
mit B eine (r,r)-Matrix, D eine (s,s)-Matrix, C eine (r,s)-Matrix,
gilt: $\det A = \det B \det D$.

Denn : $A = \left(\begin{array}{c|c} E & C \\ \hline O & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B & O \\ \hline O & E \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline O & D \end{array}\right)$

$\Rightarrow \quad \det A = \det \left(\begin{array}{c|c} E & C \\ \hline O & D \end{array}\right) \det \left(\begin{array}{c|c} B & O \\ \hline O & E \end{array}\right) = \det D \det B$, (da $\det E = 1$).

Beispiel :

$$\det \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Anwendung auf GLS

Sei $A = (\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n)$ eine (n.n)-Matrix, dann gilt:

Satz 2.42 : *(Cramer-Regel)*
Das GLS $A\vec{x} = \vec{b}$ ist eindeutig lösbar
$\Leftrightarrow \quad A$ *regulär* $\quad \Leftrightarrow \quad \det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}$ existiert
$\Leftrightarrow \quad \vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n$ sind linear unabhängig.
In diesem Fall ist $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ die *eindeutige Lösung*.
Diese Lösung kann mit Hilfe der *Cramerschen Regel* folgendermaßen berechnet werden:

$$\boxed{x_i = \frac{1}{\det A} \det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_{i-1}, \vec{b}, \vec{s}_{i+1}, \ldots, \vec{s}_n)}$$

(für $i = 1, 2, \ldots, n$).

Beweis :
{eindeutig lösbar $\Leftrightarrow$ A regulär $\Leftrightarrow$ A^{-1} existiert $\Leftrightarrow$ $\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n$ linear unabhängig}
folgt bereits aus Satz 2.19 und Satz 2.27.
Sei nun A regulär $\Rightarrow \quad AA^{-1} = E \quad \Rightarrow \quad \det A \det A^{-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \det A \neq 0$.

Sei umgekehrt $\det A \neq 0$, $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad x_1\vec{s}_1 + x_2\vec{s}_2 + \ldots + x_n\vec{s}_n = \vec{b}$
$\Rightarrow \quad \det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{s}_n) = \det(\vec{s}_1, \ldots, x_1\vec{s}_1 + \ldots + x_n\vec{s}_n, \ldots, \vec{s}_n)$
$= x_1 \det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n) + \ldots + x_i \det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_i, \ldots, \vec{s}_n) + \ldots$
$+ x_n \det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n, \ldots, \vec{s}_n)$
$= x_i \det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_i, \ldots, \vec{s}_n) = x_i \det A$, (da bei allen anderen Determinanten jeweils 2 gleiche Spaltenvektoren)
$\Rightarrow \quad x_i = \dfrac{1}{\det A} \det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{s}_n)$ ($\vec{b}$ in der i-ten Spalte) , (für $i = 1, \ldots, n$)
$\Rightarrow \quad A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar.

Beispiel :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = 3(-3-2) - 2(6-1) + 4(4+1) = -15 - 10 + 20 = -5 \neq 0$,

$$x = \frac{1}{-5} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}$$

$$y = \frac{1}{-5} \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$z = \frac{1}{-5} \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}$$

$\Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 0 \\ 2/5 \end{pmatrix}$ ist eindeutige Lösung.

Berechnung der inversen Matrix mit Hilfe der Cramer-Regel

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ eine reguläre (n,n)-Matrix, und

$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$ die zu berechnende inverse Matrix von A, dann gilt:

$$\boxed{b_{ij} = \frac{1}{\det A} (-1)^{i+j} \det A_{ji}}$$

(A_{ji} entsteht aus A durch Streichung der j-ten Zeile und i-ten Spalte).

Beweis :
$AA^{-1} = E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) \quad \Leftrightarrow \quad A\vec{s}_j = \vec{e}_j \quad (j = 1, \ldots, n)$, ($\vec{s}_j$ der j-te Spaltenvektor von A^{-1}).
Nach der Cramer-Regel gilt:
$(\vec{s}_j)_i = b_{ij} = \dfrac{1}{\det A} \det(\vec{t}_1, \ldots, \vec{e}_j, \ldots, \vec{t}_n)$
($\vec{e}_j$ in der i-ten Spalte) , ($\vec{t}_i$ der i-te Spaltenvektor von A).
Entwicklung nach der i-ten Spalte ergibt:
$b_{ij} = \dfrac{1}{\det A}(-1)^{i+j} \det A_{ji}$.

Bemerkung :
Die Cramer-Regel ist nur sinnvoll bei kleinen Matrizen ($n \leq 3$).

Beispiele

1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det A = ad - bc \neq 0$, also A regulär $\Rightarrow$
$A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = -5$,
$b_{11} = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$, $b_{12} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{2}{5}$, $b_{13} = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{6}{5}$
$b_{21} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$, $b_{22} = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$, $b_{23} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$
$b_{31} = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$, $b_{32} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{4}{5}$, $b_{33} = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{7}{5}$
$A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 \\ 5 & -5 & -5 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Bemerkung 2.43 :

a) Seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in I\!R^3$, dann läßt sich das *Spatprodukt* $< \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} >$ mittels Determinante berechnen:
$< \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} >= \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$.

b) Da $| < \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} > |$ = Volumen des von $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ aufgespannten Spats, gilt:

$|\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})|$ = Volumen des Spats.

c) Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, dann läßt sich das *Vektorprodukt* $\vec{x} \times \vec{y}$ formal mittels Determinante berechnen:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \det \text{"} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & x_1 & y_1 \\ \vec{e}_2 & x_2 & y_2 \\ \vec{e}_3 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \text{"} \qquad \text{(Entwicklung nach der 1.Spalte)}$$

$$= (x_2 y_3 - x_3 y_2)\vec{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\vec{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{e}_3 \; .$$

Bemerkung 2.44 :
Aus Satz 2.37 und Satz 2.42 folgt:
Mit A und B sind auch AB , A^T , A^{-1} regulär (siehe Satz 2.19).

Bemerkung 2.45 :
rang $A = r \quad \Leftrightarrow \quad$ größte Unterdeterminante von A, die $\neq 0$ ist, ist eine (r,r)-Determinante.

Beispiel :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \; , \; \det A = 0 \; , \; \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rang } A = 2.$$

Bemerkung 2.46 :
Alle Eigenschaften bzgl. Determinanten gelten auch für *komplexe Matrizen* , (Skalarmultiplikation mit $\lambda \in \mathbb{C}$).

4 Eigenwerte, Eigenvektoren

Im folgenden sei A eine (reelle) quadratische (n,n)-Matrix. Ferner betrachten wir Vektoren $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$, dh.: die einzelnen Koordinaten $z_k = x_k + iy_k$ sind komplexe Zahlen; $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$ kann zerlegt werden in Real- und Imaginärteil: $\vec{z} = \vec{x} + i\vec{y}$ mit $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Definition 2.47 : Sei A eine reelle (n,n)-Matrix.
Existiert ein Vektor $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$ mit $\vec{z} \neq \vec{0}$ und ein (zugehöriges) $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$\boxed{A\vec{z} = \lambda\vec{z}}$$

so heißt λ *Eigenwert (EW)* und $\vec{z}$ (zu λ gehörender) *Eigenvektor (EV)* von A.

Bemerkung 2.48 :
Die zu einem EW λ gehörenden EV bilden zusammen mit dem Nullvektor einen linearen Unterraum des $\mathbb{C}^n$, den sogenannten *Eigenraum* zum EW λ:
$E_\lambda = \{\vec{z} \in \mathbb{C}^n \ : \ \vec{z} = \vec{0} \text{ oder } \vec{z} \text{ EV zu } \lambda\} = \{\vec{z} \in \mathbb{C}^n \ : \ A\vec{z} = \lambda\vec{z}\}$.

Denn : Mit $\vec{z}_1$ und $\vec{z}_2$ ist auch jede Linearkombination $\alpha\vec{z}_1 + \beta\vec{z}_2$ EV zu λ (oder $= \vec{0}$), denn $\quad A(\alpha\vec{z}_1 + \beta\vec{z}_2) = \alpha A\vec{z}_1 + \beta A\vec{z}_2 = \alpha\lambda\vec{z}_1 + \beta\lambda\vec{z}_2 = \lambda(\alpha\vec{z}_1 + \beta\vec{z}_2)$.

Geometrische Deutung

Faßt man die Matrix A als Abbildung des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$ auf, so sind die *reellen* EV die Vektoren, die bei der Abbildung ihre *Richtung nicht verändern*, (falls $\lambda > 0$), *oder* ihre *Richtung umkehren*, (falls $\lambda < 0$). Nur die Länge wird mit $|\lambda|$ multipliziert.

Beispiel 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ 0 & \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt eine Drehung um 90° um die x-Achse. Also ist jeder Vektor $\neq \vec{0}$, der in der Drehachse liegt, EV von A (mit EW $\lambda = 1$).

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \ ,$$

$\lambda = 1$ ist EW, $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$, sind die zugehörigen EV,

$E_{\lambda=1} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ ist Eigenraum zu $\lambda = 1$ mit dim $E_{\lambda=1} = 1$.

Die anderen EW und zugehörigen EV sind in diesem Beispiel komplex.

Beispiel 2

$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ erzeugt eine Spiegelung an der Ebene $E \; : \; 2x + y - z = 0$, (vgl. S.48).

EV sind alle Vektoren $\neq \vec{0}$ *in der Ebene* (mit EW $\lambda = 1$) und alle Vektoren $\neq \vec{0}$ *senkrecht zur Ebene* (mit EW $\lambda = -1$). Die Eigenräume stehen in diesem Fall senkrecht aufeinander und haben die Dimensionen 2 bzw. 1:

$$E_{\lambda=1} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; : \; 2x + y - z = 0 \right\} , \quad \dim E_{\lambda=1} = 2 \; ,$$

$$E_{\lambda=-1} = \left\{ \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \; : \; \alpha \in I\!R \right\} , \quad \dim E_{\lambda=-1} = 1 \; .$$

Berechnung der EW und EV

$\lambda \in \mathbb{C}$ ist EW von A und $\vec{z} \in \mathbb{C}^n \backslash \{\vec{0}\}$ zugehöriger EV

$\Leftrightarrow \quad A\vec{z} = \lambda\vec{z} \;\; , \;\; \vec{z} \neq \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad A\vec{z} - \lambda\vec{z} = \vec{0} \;\; , \;\; \vec{z} \neq \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad (A - \lambda E)\vec{z} = \vec{0} \;\; , \;\; \vec{z} \neq \vec{0}$ ($\vec{z}$ ist nichttriviale Lösung des homogenen GLS)

$\Leftrightarrow \quad \boxed{\det(A - \lambda E) = 0}$ und $\vec{z}$ ist nichttriviale Lösung von $(A - \lambda E)\vec{z} = \vec{0}$.

Bezeichnung : $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ heißt *charakteristisches Polynom* von A.

$p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ ist ein Polynom in λ vom *grad* n.

Also gilt:

Satz 2.49 :

1) Genau die $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $\det(A - \lambda E) = 0$ ist, sind EW der Matrix A.

2) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ EW von A, so sind alle nichttrivialen Lösungen des homogenen GLS $(A - \lambda E)\vec{z} = \vec{0}$ zugehörige EV von A.

3) Die Lösungsmenge des homogenen GLS $(A - \lambda E)\vec{z} = \vec{0}$ ist der zu λ gehörende *Eigenraum*; ihre Dimension ist die *Dimension* des Eigenraums.

4) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ EW und $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$ zugehöriger EV von A, so gilt:
$\bar{\lambda}$ ist auch EW mit zugehörigem EV $\bar{\vec{z}}$.

Denn :
$A\vec{z} = \lambda\vec{z} \;\; \Rightarrow \;\; \overline{A\vec{z}} = \overline{\lambda\vec{z}} \;\; \Rightarrow \;\; A\bar{\vec{z}} = \bar{\lambda}\bar{\vec{z}},$ da A reell.

Beispiel 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der EW

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+1) = 0$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_{2,3} = \pm i$ sind (einfache) EW von A.

Berechnung der EV

Zu $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ lösen (mit Gauß-Algorithmus)}$$

(da homogenes GLS, wird die rechte Seite beim Gauß-Algorithmus nicht verändert, braucht also nicht aufgeschrieben zu werden)

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0 \ , \ x_2 = 0 \ , \ x_1 = \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \alpha \neq 0 \ , \text{ EV zu } \lambda_1 = 1 \ ,$$

$$E_{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \right\} \text{ ist Eigenraum zu } \lambda_1 = 1 \text{ mit } \dim E_{(1)} = 1.$$

Zu $\lambda_2 = i$:

$$\begin{pmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ lösen}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_3 = \alpha \in \mathbb{C} \ , \ x_2 = i\alpha \ , \ x_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \alpha \in \mathbb{C} \backslash \{0\} \ , \ \text{ sind die EV zu } \lambda_2 = i \ ,$$

$$E_{(i)} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ \alpha \in \mathbb{C} \right\} \text{ ist Eigenraum zu } \lambda_2 = i \text{ mit } \dim E_{(i)} = 1.$$

Zu $\lambda_3 = -i$:

$$\beta \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \beta \in \mathbb{C} \backslash \{0\} \ , \ \text{ sind die EV zu } \lambda_3 = -i \ ,$$

$$E_{(-i)} = \left\{ \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ \beta \in \mathbb{C} \right\} \text{ ist Eigenraum zu } \lambda_3 = -i \text{ mit } \dim E_{(-i)} = 1.$$

Beispiel 2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der EW

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1+\lambda & -(1+\lambda) \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -(1+\lambda) \end{pmatrix} = -(1+\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = -(1+\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2) = 0$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -1$ 2-facher EW (weil 2-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms), $\lambda_2 = 2$ einfacher EW von A.

Berechnung der EV

Zu $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \alpha \ , \ x_3 = \beta \ , \ x_1 = -\alpha - \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \ , \ (\alpha, \beta) \neq (0,0), \text{ sind die EV zu } \lambda_1 = -1 \ ,$$

$$E_{(-1)} = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \text{ ist Eigenraum zu } \lambda_1 = -1 \text{ mit } \dim E_{(-1)} = 2.$$

Zu $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad x_3 = \alpha \ , \ x_2 = \alpha \ , \ x_1 = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \quad \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \alpha \neq 0 \text{ , sind die EV zu } \lambda_2 = 2 \ ,$$

$$E_{(2)} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \right\} \text{ ist Eigenraum zu } \lambda_2 = 2 \text{ mit } \dim E_{(2)} = 1.$$

In diesem Fall gilt: $E_{(2)} \perp E_{(-1)}$, denn $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$

Es gelten nun folgende Eigenschaften

Satz 2.50 :
Vor.: A habe EW λ mit zugehörigem EV $\vec{x}$.
Dann gilt:
a) A^n hat EW λ^n mit gleichem EV $\vec{x}$.
b) αA hat EW $(\alpha\lambda)$ mit gleichem EV $\vec{x}$, $(\alpha \in I\!R)$.
c) $(A - \alpha E)$ hat EW $(\lambda - \alpha)$ mit gleichem EV $\vec{x}$, $(\alpha \in I\!R)$.
d) A^{-1} hat EW $\dfrac{1}{\lambda}$ mit gleichem EV $\vec{x}$, (falls A regulär).
e) $C^{-1}AC$ hat den gleichen EW λ mit zugehörigem EV $(C^{-1}\vec{x})$.
f) A regulär $\Leftrightarrow$ alle EW von A sind $\neq 0$.

Beweis :
a) $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad\Rightarrow\quad A^2\vec{x} = \lambda A\vec{x} = \lambda^2\vec{x} \quad\Rightarrow$ (per Induktion) $A^n\vec{x} = \lambda^n\vec{x}$.
b) $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad\Rightarrow\quad \alpha A\vec{x} = (\alpha\lambda)\vec{x}$.
c) $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad\Rightarrow\quad A\vec{x} - \alpha E\vec{x} = \lambda\vec{x} - \alpha\vec{x} \quad\Rightarrow\quad (A - \alpha E)\vec{x} = (\lambda - \alpha)\vec{x}$.
d) $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad\Rightarrow\quad A^{-1}A\vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x} \quad\Rightarrow\quad A^{-1}\vec{x} = \dfrac{1}{\lambda}\vec{x}$.
e) $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad\Rightarrow\quad C^{-1}A\vec{x} = \lambda C^{-1}\vec{x} \quad\Rightarrow$ (mit $\vec{y} = C^{-1}\vec{x}$) $C^{-1}AC\vec{y} = \lambda\vec{y}$.
f) A regulär $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \det(A - \lambda E) \neq 0$ für $\lambda = 0$.

Bemerkung : Die charakteristischen Polynome von A und $C^{-1}AC$ sind gleich.

Denn: $\det(C^{-1}AC - \lambda E) = \det(C^{-1}AC - \lambda C^{-1}CE) = \det(C^{-1}(A - \lambda E)C) = \det C^{-1}\det(A - \lambda E)\det C = \det(A - \lambda E)$, da $\det C^{-1} = 1/\det C$.

Weitere Eigenschaften:

Satz 2.51 :
a) Eine (n,n)-Matrix hat höchstens n verschiedene EW.
b) Eigenvektoren zu verschiedenen EW sind *linear unabhängig*.
c) A habe n *verschiedene* EW $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ und $\vec{s}_i$ sei EV zu λ_i (für $i = 1, 2, \ldots, n$). Sei $C = (\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n)$ (Spalten von C bestehen aus EV), dann gilt

$$\boxed{C^{-1}AC = D} \quad \text{mit } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

In diesem Fall heißt A *diagonalähnlich* oder *diagonalisierbar*.

d) Aussage c) gilt auch, falls A Mehrfach-EW besitzt und für alle Mehrfach-EW λ gilt:

$$\boxed{\dim E_\lambda = \text{Vielfachheit von } \lambda}$$

In diesem Fall müssen in C entsprechend viele linear unabhängige EV zu allen λ_i stehen.

e) Aussage d) gilt für alle reellen *symmetrischen* Matrizen. Jede reelle *symmetrische* Matrix ist also *diagonalisierbar*.

f) Ist A *reell symmetrisch*, so sind alle EW *reell*, und EV zu verschiedenen EW *stehen senkrecht aufeinander*. Also kann man die Matrix C *orthogonal* wählen mit

$$\boxed{C^T A C = D}$$

g) Ist A *komplex hermitesch* (dh.: $A = \bar{A}^T$), so sind alle EW von A *reell*.
h) Ist A *orthogonal*, so haben alle EW den Betrag $= 1$, also $|\lambda| = 1$.

Beweis :
a) $\det(A - \lambda E)$ ist ein Polynom vom grad n $\Rightarrow$ höchstens n verschiedene Nullstellen.
b) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ verschiedene EW von A und $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ zugehörige EV, also $A\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$ (für $i = 1, \ldots, k$).

Sei $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}$, dann ist zu zeigen: $\alpha_i = 0 \ \ \forall i = 1, \ldots, k$. Es gilt:

$$A(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0} \ ,$$

$$A^2(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A^2 \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i {\lambda_i}^2 \vec{x}_i = \vec{0} \ ,$$

$$\vdots$$

$$A^{k-1}(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A^{k-1} \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i {\lambda_i}^{k-1} \vec{x}_i = \vec{0} \ ,$$

mit $\vec{u}_i = \alpha_i \vec{x}_i$ gilt dann: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} {\lambda_i}^m \vec{u}_i = \vec{0}$ $(m = 0, 1, \ldots, k-1)$;
mit u_{ij} die j-te Koordinate von $\vec{u}_i$ gilt dann $\forall j = 1, \ldots, n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {\lambda_1}^{k-1} & {\lambda_2}^{k-1} & \ldots & {\lambda_k}^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{kj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Wir bezeichnen die Koeffizientenmatrix mit $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Die Determinante von $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ wird *Vandermondsche Determinante* genannt. Es gilt, wie wir gleich zeigen werden, $\det V(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq 0$. Damit ist das GLS eindeutig lösbar, also ist die triviale Lösung die einzige Lösung $\Rightarrow$ $u_{ij} = 0 \ \forall i = 1, \ldots, k; \ \forall j = 1, \ldots, n$ $\Rightarrow$ $\vec{u}_i = \vec{0} \ \forall i = 1, \ldots, k$ $\Rightarrow$ $\alpha_i \vec{x}_i = \vec{0} \ \forall i = 1, \ldots, k$ $\Rightarrow$ $\alpha_i = 0 \ \forall i = 1, \ldots, k$, (da $\vec{x}_i \neq \vec{0}$,da EV) $\Rightarrow$ $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ sind linear unabhängig.
Zu zeigen bleibt: $\det V(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq 0$, falls alle λ_i verschieden:

$$\det V(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {\lambda_1}^{k-1} & {\lambda_2}^{k-1} & \ldots & {\lambda_k}^{k-1} \end{pmatrix}$$

(j-te Zeile $-\lambda_1 *$(j-1)-te Zeile, $(j = k, k-1, \ldots, 2)$, führt auf

$$\det V(\lambda_1,\dots,\lambda_k) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & (\lambda_2-\lambda_1) & \dots & (\lambda_k-\lambda_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (\lambda_2-\lambda_1){\lambda_2}^{k-3} & \dots & (\lambda_k-\lambda_1){\lambda_k}^{k-3} \\ 0 & (\lambda_2-\lambda_1){\lambda_2}^{k-2} & \dots & (\lambda_k-\lambda_1){\lambda_k}^{k-2} \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\dots(\lambda_k-\lambda_1)\det V(\lambda_2,\dots,\lambda_k) \quad \text{mit}$$

$$\det V(\lambda_2,\dots,\lambda_k) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {\lambda_2}^{k-2} & {\lambda_3}^{k-2} & \dots & {\lambda_k}^{k-2} \end{pmatrix}.$$

Mit vollständiger Induktion folgt hieraus:

$\det V(\lambda_1,\dots,\lambda_k) = \prod\limits_{1\le\mu<\nu\le k} (\lambda_\nu-\lambda_\mu) \neq 0$, da alle λ_i verschieden.

c) A habe n verschiedene EW $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ mit zugehörigen EV $\vec{s}_1,\dots,\vec{s}_n$. Nach b) sind diese EV linear unabhängig, also ist die Matric $C=(\vec{s}_1,\dots,\vec{s}_n)$ regulär.

Da $A\vec{s}_i = \lambda_i\vec{s}_i$ $(\forall i=1,\dots,n) \quad\Rightarrow\quad AC=CD$ mit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow\quad C^{-1}AC = D \quad\Rightarrow\quad A$ ist diagonalisierbar.

d) Ist λ ein k-facher EW und gilt $\dim E_\lambda = k \quad\Rightarrow\quad$ man kann k linear unabhängige EV $\vec{s}_1,\dots,\vec{s}_k$ zum EW λ wählen $\Rightarrow\quad C$ wieder regulär, und es gilt $C^{-1}AC=D$.

e) Ist A *reell symmetrisch* und ist λ ein k-facher EW $\quad\Rightarrow\quad \dim E_\lambda = k$.

Beweis hierzu:

Sei also λ EW von A und E_λ der zugehörige Eigenraum mit $\dim E_\lambda = r$, dann ist zu zeigen: λ ist r-facher EW.

Sei $\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_r\}$ eine ON-Basis von E_λ und $\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_r,\vec{x}_{r+1},\dots,\vec{x}_n\}$ eine ON-Basis von $\mathbb{R}^n$ und $C=(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$, also C orthogonal

$\Rightarrow\quad (C^{-1}AC)_{ij} = (C^TAC)_{ij} = <\vec{x}_i, A\vec{x}_j>$

$$= \lambda <\vec{x}_i,\vec{x}_j> = \begin{cases} \lambda\ , & \text{falls } i=j\ (1\le i,j\le r) \\ 0\ , & \text{falls } i\neq j\ (1\le i\le n, 1\le j\le r) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad C^{-1}AC = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & B & \\ 0 & & 0 & & & \end{array}\right)$$

$\Rightarrow\quad \det(A-\mu E) = \det(C^{-1}AC-\mu E) = (\lambda-\mu)^r\det(B-\mu E)$.

Da $\dim E_\lambda = r \quad\Rightarrow\quad$ rang $(A-\lambda E) = n-r$, also

$\Rightarrow\quad$ rang $(C^{-1}AC-\lambda E) =$ rang $(C^T(A-\lambda E)C) =$ rang $(A-\lambda E)$

$= \text{rang }(B-\lambda E) = n-r \quad \Rightarrow \quad \det(B-\lambda E) \neq 0$ (falls $r < n$) $\quad \Rightarrow \quad \lambda$ ist r-fache Nullstelle von $\det(A-\mu E) = (\lambda-\mu)^r \det(B-\mu E)$ (da $\det(B-\mu E) \neq 0$ für $\mu = \lambda$) $\Rightarrow \quad \lambda$ ist r-facher EW von A.
(Rang A verändert sich nicht bei Multiplikation mit orthogonalen Matrizen.)

f) *A reell symmetrisch* $\Rightarrow \; < A\vec{x}, \vec{y} > = < \vec{x}, A^T\vec{y} > = < \vec{x}, A\vec{y} > \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ (vgl. Hilfssatz 2.25, S.50).
Ist nun $A\vec{z} = \lambda\vec{z}$, so auch $A\bar{\vec{z}} = \bar{\lambda}\bar{\vec{z}}$, also
$< A\vec{z}, \bar{\vec{z}} > = < \vec{z}, A\bar{\vec{z}} > = \lambda < \vec{z}, \bar{\vec{z}} > = \bar{\lambda} < \vec{z}, \bar{\vec{z}} > \quad \Rightarrow \quad \lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ (da $\vec{z} \neq \vec{0}$).
Seien λ, μ EW von A mit $\lambda \neq \mu$ und $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ zugehörige EV, dann
$\Rightarrow \; < A\vec{x}, \vec{y} > = < \vec{x}, A\vec{y} > = \lambda < \vec{x}, \vec{y} > = \mu < \vec{x}, \vec{y} > \;\Rightarrow\; < \vec{x}, \vec{y} > = 0 \;\Rightarrow\; \vec{x} \perp \vec{y}$ (da $\lambda \neq \mu$).
Ist λ k-facher EW von A, so wähle man eine ON-Basis des zugehörigen Eigenraumes (dh.: $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ mit $\vec{x}_i \perp \vec{x}_k$ für $i \neq k$ und $|\vec{x}_i| = 1 \; \forall i$) $\quad \Rightarrow \quad C = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ ist orthogonal, und es gilt $C^T A C = D$.

g) Für komplexe Matrizen gilt analog: Ist A hermitesch $\Rightarrow$ alle EW von A sind reell.

h) A orthogonal $\Rightarrow \; |A\vec{x}| = |\vec{x}| \; \forall \vec{x} \in \mathbb{C}^n \quad \Rightarrow \quad |A\vec{x}| = |\lambda\vec{x}| = |\lambda||\vec{x}| = |\vec{x}| \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1.$

Beispiel 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnung der EW

$$\det(A-\lambda E) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 6-\lambda & -2 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda) + 2(2-\lambda)$$
$$= (2-\lambda)((3-\lambda)(6-\lambda)+2) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 20) = (2-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-5)$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 5$ sind (einfache) EW.

Berechnung der EV

Zu $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{ist EV zu } \lambda_1 = 2 \,.$$

Zu $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist EV zu } \lambda_2 = 4 \,.$$

Zu $\lambda_3 = 5$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{ist EV zu } \lambda_3 = 5$$

$$\Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} , \ C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} , \text{ also gilt:}$$

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

Beispiel 2

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ reell symmetrisch (vgl. Beispiel 2, S.72)

EW und EV:

$\lambda_1 = -1$ (doppelter) EW mit EV $\begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$,

$\lambda_2 = 2$ (einfacher) EW mit EV $\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$, $(\alpha \neq 0)$.

Wähle 2 orthogonale EV zu $\lambda_1 = -1$:

mit $\beta = 0, \alpha = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist EV zu $\lambda_1 = -1$,

für den 2.EV muß gelten: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\rangle = -\alpha - \beta - \alpha$

$= -2\alpha - \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = -2\alpha$, mit $\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist ein zum 1.EV orthogonaler EV zu $\lambda_1 = -1$,

normieren ergibt: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ bilden eine ON-Basis des Eigenraums zu $\lambda_1 = -1$,

der Vektor $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist normierter EV zu $\lambda_2 = 2$ und steht nach Satz 2.51 f) senkrecht auf $E_{(-1)}$

$$\Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ ist } \textit{orthogonal},$$

und es gilt

$$C^T AC = D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Beispiel 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Berechnung der EV

$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1$ (doppelter) EW, $\lambda_2 = 2$ (einfacher) EW.

Berechnung der EV

Zu $\lambda_1 = 1$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$, sind die EV zu $\lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow$

$\dim E_{(1)} = 1 < 2 =$ Vielfachheit des EW $\;\Rightarrow\;$ A nicht diagonalisierbar.

Beispiel 4

$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ erzeugt eine Spiegelung an der Ebene $E: \; 2x+y-z = 0$ (vgl. Beispiel S.48 und Beispiel 2, S.70).

$\lambda_1 = 1$ ist zweifacher EW, der Eigenraum $E_{(1)}$ zu $\lambda_1 = 1$ ist die Ebene E,

$\lambda_2 = -1$ ist einfacher EW, der Eigenraum $E_{(-1)}$ zu $\lambda_2 = -1$ ist die Gerade durch $\vec{0}$ senkrecht zur Ebene E

$\Rightarrow \quad \dim E_{(1)} = 2$ mit ON-Basis $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\dim E_{(-1)} = 1$ mit ON-Basis $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ ist *orthogonal*, und es gilt

$C^T A C = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ist die Dimension der Eigenräume > 2, so benötigt man zur Bestimmung einer ON-Basis das folgende "Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren".

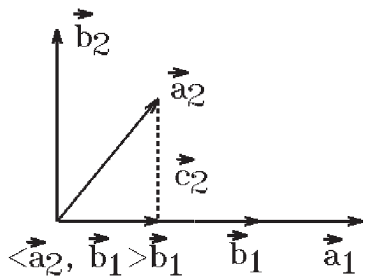
2.52 Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren

Gegeben: k linear unabhängige Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \in V$ (V Vektorraum).
Gesucht: k *orthonormale* Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k$, die den gleichen Untervektorraum aufspannen wie $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$.

Dh. es muß gelten: $<\vec{b}_i, \vec{b}_j> = \begin{cases} 0 & \text{,falls } i \neq j \\ 1 & \text{,falls } i = j \end{cases}$.

Es gilt dann $\quad <\vec{b}_i, \vec{b}_i> = |\vec{b}_i|^2 = 1$.

Rechenvorschrift:



$$\vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|}$$

$$\vec{b}_2 = \frac{\vec{c}_2}{|\vec{c}_2|} \quad \text{mit} \quad \vec{c}_2 = \vec{a}_2 - <\vec{a}_2, \vec{b}_1> \vec{b}_1$$

usw.

Allgemein:

$$\boxed{\vec{b}_i = \frac{\vec{c}_i}{|\vec{c}_i|} \quad \text{mit} \quad \vec{c}_i = \vec{a}_i - \sum_{j=1}^{i-1} <\vec{a}_i, \vec{b}_j> \vec{b}_j}$$

für $i = 1, 2, \ldots, k$.

Denn: Für $r < i$ gilt:

$$<\vec{c}_i, \vec{b}_r> = <\vec{a}_i, \vec{b}_r> - \sum_{j=1}^{i-1} <\vec{a}_i, \vec{b}_j><\vec{b}_j, \vec{b}_r> = <\vec{a}_i, \vec{b}_r> - <\vec{a}_i, \vec{b}_r> = 0$$

(da $<\vec{b}_j, \vec{b}_r> = 0$ für $j \neq r$ und $= 1$ für $j = r$)

$\Rightarrow \quad \vec{c}_i \perp \vec{b}_r$ für $r = 1, 2, \ldots, i-1$.

Beispiel

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig, da

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0 \ ,$$

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ bilden ein ON-System, also ist die Matrix $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ orthogonal.

Berechnung höherer Potenzen einer diagonalisierbaren Matrix

Sei A diagonlisierbar, also $C^{-1}AC = D$ mit C regulär,
$\Rightarrow \quad AC = CD \quad \Rightarrow \quad A = CDC^{-1} \quad \Rightarrow \quad A^2 = CDC^{-1}CDC^{-1} = CD^2C^{-1}$.
Per Induktion folgt:

$$\boxed{A^k = CD^kC^{-1}}$$

Da für $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ gilt: $\quad D^k = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & {\lambda_n}^k \end{pmatrix}$,
läßt sich A^k einfach berechnen.

Beispiel :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (vgl. S.77)

$C = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = C^T$, (da C orthogonal)

$$\Rightarrow \quad A^k = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^k\sqrt{3} & -(-1)^k\sqrt{3} & 0 \\ (-1)^k & (-1)^k & -2(-1)^k \\ 2^k\sqrt{2} & 2^k\sqrt{2} & 2^k\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4(-1)^k + 2^{k+1} & -2(-1)^k + 2^{k+1} & -2(-1)^k + 2^{k+1} \\ -2(-1)^k + 2^{k+1} & 4(-1)^k + 2^{k+1} & -2(-1)^k + 2^{k+1} \\ -2(-1)^k + 2^{k+1} & -2(-1)^k + 2^{k+1} & 4(-1)^k + 2^{k+1} \end{pmatrix}.$$

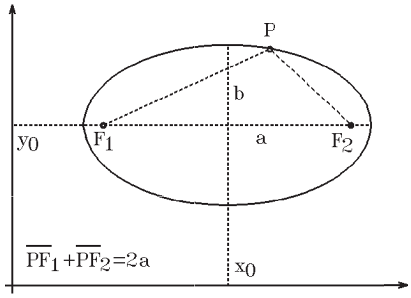
Hauptachsentransformation, Kegelschnitte, Quadratische Formen

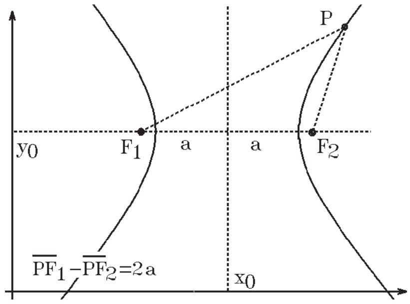
Normalformen der Kegelschnitte

1) *Ellipse*

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1\ ,$$

Mittelpunkt (x_0, y_0), Halbachsen a, b.

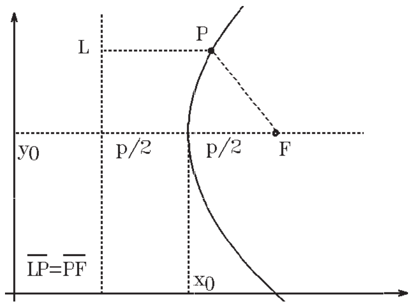




2) *Hyperbel*

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1\ ,$$

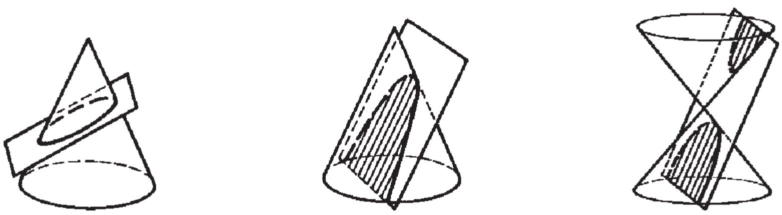
Mittelpunkt (x_0, y_0).



3) *Parabel*

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)\ ,$$

Scheitelpunkt (x_0, y_0).



Ellipse Parabel Hyperbel

Liegen die Kegelschnitte nicht achsenparallel, so muß zunächst eine *Hauptachsentransformation* durchgeführt werden, damit die neuen Koordinatenachsen parallel zu den Achsen des Kegelschnitts verlaufen:

Gegeben: Quadratische Gleichung in x, y

$$\boxed{ax^2+2bxy+cy^2+p_1x+p_2y+r=0}$$

Alle Punkte $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, die diese Gleichung erfüllen, stellen einen *Kegelschnitt* (oder eine Entartung oder die leere Menge) dar. Ist $b = 0$, so ist der Kegelschnitt achsenparallel, sonst nicht. Für $b \neq 0$ muß eine Hauptachsentransformation durchgeführt werden. Dazu schreiben wir die quadratische Gleichung in Matrizenschreibweise auf:
Mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist obige Gleichung äquivalent zu

$$\boxed{< A\vec{x}, \vec{x} > + < \vec{p}, \vec{x} > + r = 0}$$

$$< A\vec{x}, \vec{x} > = \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$$

$= ax^2 + 2bxy + cy^2$ heißt *quadratische Form.*

A ist eine *reelle symmetrische* Matrix, also existiert eine orthogonale Matrix C mit $C^T AC = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, λ_1, λ_2 sind die EW von A und $C = (\vec{s}_1, \vec{s}_2)$ mit $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ (zugehörige EV) $\Rightarrow$ $A = CDC^T$.
Also erhalten wir für die quadratische Gleichung:
$< CDC^T \vec{x}, \vec{x} > + < \vec{p}, \vec{x} > + r = 0 \quad \Rightarrow$ (nach Hilfsatz 2.25)
$< DC^T \vec{x}, C^T \vec{x} > + < \vec{p}, \vec{x} > + r = 0.$

Mit den neuen Koordinaten (u,v), wobei $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ mit

$$\boxed{\vec{u} = C^T \vec{x}}$$

(vgl. Koordinatentransformation S.50,51), erhalten wir
$< D\vec{u}, \vec{u} > + < CC^T \vec{p}, \vec{x} > + r = 0 \quad \Rightarrow$
$< D\vec{u}, \vec{u} > + < C^T \vec{p}, C^T \vec{x} > + r = 0 \quad \Rightarrow$

$$\boxed{< D\vec{u}, \vec{u} > + < \vec{q}, \vec{u} > + r = 0}$$

mit

$$\boxed{\vec{q} = C^T \vec{p}}$$

Ausgeschrieben lautet diese Gleichung:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle + r = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + q_1 u + q_2 v + r = 0}$$

Mittels quadratischer Ergänzung läßt sich hieraus die Normalform des Kegelschnitts angeben.

Die Hauptachsentransformation wurde durch die orthogonale Matrix C erzeugt (C enthält als Spaltenvektoren EV von A):

$$\boxed{\vec{u} = C^T \vec{x} \quad , \quad \vec{x} = C\vec{u}}$$

Die Spaltenvektoren (Eigenvektoren von A) von C bilden die neuen Basisvektoren, zeigen also in *Richtung der neuen Koordinatenachsen* (u-Achse bzw. v-Achse) des neuen (u,v)-Systems (vgl. Koordinatentransformation S.50,51).

Es gilt:
λ_1, λ_2 gleiches Vorzeichen $\Rightarrow$ *Ellipse* (oder Entartung oder leere Menge).
λ_1, λ_2 verschiedenes Vorzeichen $\Rightarrow$ *Hyperbel* (oder Entartung oder leere Menge).
$\lambda_1 = 0$ oder $\lambda_2 = 0$ $\Rightarrow$ *Parabel* (oder Entartung oder leere Menge).

Beispiel 1

$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 18x - 12y + 15 = 0$

$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \;,\; \vec{p} = \begin{pmatrix} -18 \\ -12 \end{pmatrix} .$

EW von A: $\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$

$= (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \;,\; \lambda_2 = 6$ sind die EW von A.

EV zu $\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist EV zu $\lambda_1 = 1$,

EV zu $\lambda_2 = 6$: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV zu $\lambda_2 = 6$,

normieren ergibt: $C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \;,\; C^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \;,\; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} .$

C erzeugt eine Drehung um $(-\alpha)$ mit $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, also $\alpha = 63.4^\circ$.

$\vec{q} = C^T \vec{p} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -18 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 6 \\ -48 \end{pmatrix} = \frac{6}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\boxed{u^2 + 6v^2 + \frac{6}{\sqrt{5}} u - \frac{6}{\sqrt{5}} 8v + 15 = 0}$$

quadratische Ergänzung ergibt:

$(u + \frac{3}{\sqrt{5}})^2 + 6(v - \frac{4}{\sqrt{5}})^2 = \frac{9}{5} + \frac{96}{5} - 15 = 6 \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{(u + \frac{3}{\sqrt{5}})^2}{\sqrt{6}^2} + \frac{(v - \frac{4}{\sqrt{5}})^2}{1^2} = 1}$$

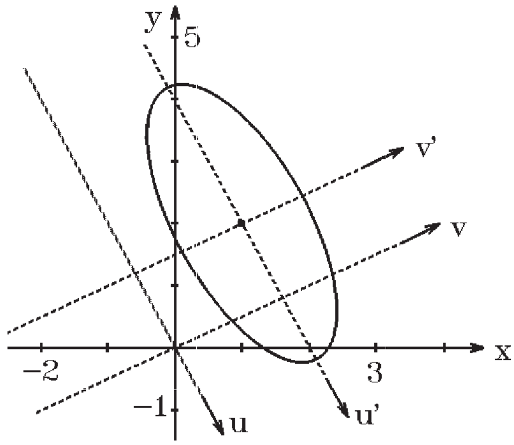
$\Rightarrow$ Ellipse mit Mittelpunkt $(\frac{-3}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}})$ und Halbachsen $\sqrt{6}$ und 1.

Mittelpunkt im (x, y)-System:

$\vec{x} = C\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$

Richtung der u-Achse $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

Richtung der v-Achse $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,



u'-Achse $\Leftrightarrow$ $v = v_0 = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$,

v'-Achse $\Leftrightarrow$ $u = u_0 = \dfrac{-3}{\sqrt{5}}$,

da $\vec{u} = C^T\vec{x}$, also

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$v = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x+y) = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$,

$u = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x-2y) = \dfrac{-3}{\sqrt{5}}$.

Also $2x + y = 4 \quad \Rightarrow \quad y = 4 - 2x$ ist die u'-Achse,

$x - 2y = -3 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}$ ist die v'-Achse.

Beispiel 2

$xy = 1$ also $y = \dfrac{1}{x}$ (Hyperbel)

$\Rightarrow \quad 2xy - 2 = 0$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \vec{0}$,

$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ sind die EW von A.

EV zu $\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV zu $\lambda_1 = 1$,

EV zu $\lambda_2 = -1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV zu $\lambda_2 = -1$

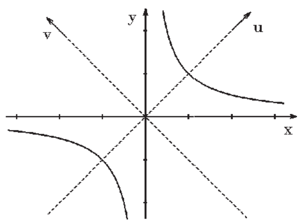
$$\Rightarrow \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \; C^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} , \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

C erzeugt eine Drehung um $\alpha = 45°$, denn $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$.

Also erhalten wir die Hyperbel

$u^2 - v^2 = 2 \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{u^2}{\sqrt{2}^2} - \frac{v^2}{\sqrt{2}^2} = 1}$$



Beispiel 3

$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 40x + 220y - 100 = 0$,

$A = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} -40 \\ 220 \end{pmatrix}$,

$\det(A - \lambda E) = (9-\lambda)(16-\lambda) - 144 = \lambda^2 - 25\lambda = \lambda(\lambda - 25) = 0$

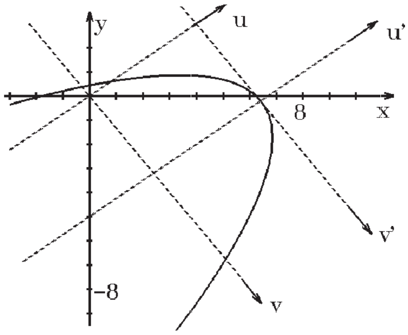
$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 0\ ,\ \lambda_2 = 25$ sind die EW von A ($\Rightarrow$ Parabel oder Entartung).

EV zu $\lambda_1 = 0$: $\begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist EV zu $\lambda_1 = 0$,

EV zu $\lambda_2 = 25$: $\begin{pmatrix} -16 & -12 \\ -12 & -9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ ist EV zu $\lambda_2 = 25$

$\Rightarrow \quad C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\ ,\ C^T = C\ ,\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$,

$\vec{q} = C^T\vec{p} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -40 \\ 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ -200 \end{pmatrix}$.



Da $\det C = -1$, erzeugt C eine Drehspiegelung.
Also erhalten wir die Parabel

$25v^2 + 100u - 200v - 100 = 0 \quad \Rightarrow$

$v^2 + 4u - 8v - 4 = 0 \quad \Rightarrow$

$(v-4)^2 = 4 + 16 - 4u \quad \Rightarrow$

$$\boxed{(v-4)^2 = -4(u-5)}$$

Parabel mit Scheitelpunkt $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ im (u,v)-System.

Scheitelpunkt im (x,y)-System:

$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 32 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Richtung der u-Achse: $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, Richtung der v-Achse: $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Bemerkung:

Haben beide EW gleiches Vorzeichen $\Rightarrow$ *Ellipse* (oder Entartung oder leere Menge).
Haben beide EW verschiedenes Vorz. $\Rightarrow$ *Hyperbel* (oder Entartung oder leere Menge).
Ist ein EW $= 0$ $\Rightarrow$ *Parabel* (oder Entartung oder leere Menge).

Quadratische Formen

Definition 2.53 : Sei A eine *reelle symmetrische* (n,n)-Matrix, $\vec{x} \in I\!R^n$, so heißt

$$\boxed{Q(\vec{x}) = < A\vec{x}, \vec{x} >}$$

eine *quadratische Form*.

Ausgeschrieben erhalten wir:

$Q(\vec{x}) = < A\vec{x}, \vec{x} > = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)x_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$

$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$.

Beispiele

1) $2x^2+3y^2-z^2+4xy-2xz+yz = \left\langle A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$.

2) $2x^2 - 4y^2 + 6xy = \langle A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Definition 2.54 : Sei $Q(\vec{x}) =< A\vec{x}, \vec{x} >$, A *reell symmetrisch.*

a) $< A\vec{x}, \vec{x} >$ bzw. A heißt *positiv definit* $\Leftrightarrow$ $< A\vec{x}, \vec{x} > > 0 \;\; \forall \vec{x} \in I\!R^n \backslash \{\vec{0}\}$
$\Leftrightarrow$ alle EW von A sind > 0.

b) $< A\vec{x}, \vec{x} >$ bzw. A heißt *negativ definit* $\Leftrightarrow$ $< A\vec{x}, \vec{x} > < 0 \;\; \forall \vec{x} \in I\!R^n \backslash \{\vec{0}\}$
$\Leftrightarrow$ alle EW von A sind < 0.

c) $< A\vec{x}, \vec{x} >$ bzw. A heißt *indefinit* $\Leftrightarrow$ $< A\vec{x}, \vec{x} >$ nimmt positive und negative Werte an
$\Leftrightarrow$ A hat positive und negative EW.

d) $< A\vec{x}, \vec{x} >$ bzw. A heißt *positiv semidefinit* $\Leftrightarrow$ $< A\vec{x}, \vec{x} > \geq 0 \;\; \forall \vec{x} \in I\!R^n$
$\Leftrightarrow$ alle EW von A sind ≥ 0.

e) $< A\vec{x}, \vec{x} >$ bzw. A heißt *negativ semidefinit* $\Leftrightarrow$ $< A\vec{x}, \vec{x} > \leq 0 \;\; \forall \vec{x} \in I\!R^n$
$\Leftrightarrow$ alle EW von A sind ≤ 0.

Begründung der Äquivalenz:
$\left\{< A\vec{x}, \vec{x} > > 0 \quad \forall \vec{x} \in I\!R^n \backslash \{\vec{0}\}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad$ alle EW von A sind > 0 .

Beweis
Da A symmetrisch, existiert eine orthogonale Matric C mit $C^T AC = D$
$\Rightarrow \quad A = CDC^T \quad \Rightarrow \; < A\vec{x}, \vec{x} > =< CDC^T \vec{x}, \vec{x} > =< DC^T \vec{x}, C^T \vec{x} > =< D\vec{u}, \vec{u} >$
$= \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i^2$ mit $\vec{u} = C^T \vec{x}$.

Also gilt: $< A\vec{x}, \vec{x} > > 0 \; \forall \vec{x} \neq \vec{0}$ (damit auch $\forall \vec{u} \neq \vec{0}$) $\Leftrightarrow$ alle $\lambda_i > 0$
(mit $\vec{x}$ ist auch $\vec{u} \neq \vec{0}$, da C die Länge nicht verändert).
Alle anderen Äquivalenzen gelten analog.

Es gilt:
$\det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ alle EW $\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A$ positiv- oder negativ- definit oder indefinit.

Denn:
$\det A = \det(A - 0E) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0$ kein EW von A.

Spezialfall: $n = 2$
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, A symmetrisch $\Rightarrow$
$\det(A - \lambda E) = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2) = \lambda^2 - (\text{Spur } A)\lambda + \det A$
(Spur $A \hat{=}$ Summe der Diagonalelemente von A).
Also: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - (\text{Spur } A)\lambda + \det A$.
Seien λ_1, λ_2 die EW von A, so gilt:

$\det(A - \lambda E) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$.
Also muß gelten:

$$\boxed{\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Spur } A = a + c \quad , \quad \lambda_1\lambda_2 = \det A = ac - b^2}$$

Hieraus folgt

Satz 2.55 :
Für eine reelle symmetrische (2,2)-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{array}{lcl} A \textit{ positiv definit} & \Leftrightarrow & \lambda_1 > 0 \text{ und } \lambda_2 > 0 \\ & \Leftrightarrow & a > 0 \text{ und } \det A > 0. \\ A \textit{ negativ definit} & \Leftrightarrow & \lambda_1 < 0 \text{ und } \lambda_2 < 0 \\ & \Leftrightarrow & a < 0 \text{ und } \det A > 0. \\ A \textit{ indefinit} & \Leftrightarrow & \lambda_1, \lambda_2 \text{ haben verschiedene Vorzeichen} \\ & \Leftrightarrow & \det A < 0. \end{array}$$

Beweis :
$\det A = ac - b^2 = \lambda_1\lambda_2$, Spur $A = a + c = \lambda_1 + \lambda_2$,
$\det A > 0 \;\Rightarrow\; ac > b^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; a, c$ haben gleiches Vorzeichen.
Sei $a > 0 \;\Rightarrow\; c > 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 + \lambda_2 > 0$, da $\det A = \lambda_1\lambda_2 > 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.
Ist umgekehrt $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0 \;\Rightarrow\; \det A > 0 \;\Rightarrow\; a, c$ haben gleiches Vorzeichen $\Rightarrow$ (da $a + c = \lambda_1 + \lambda_2$) $a > 0$.
Alle anderen Fälle analog.

Beispiel
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = 1 > 0$, $\det A = 3/4 > 0 \quad \Rightarrow \quad A$ ist positiv definit $\Rightarrow$
A hat nur positive EW $\Rightarrow$
$< A\vec{x}, \vec{x} >= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = x^2 + xy + y^2 > 0 \;\; \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Allgemeiner Fall: $n \in I\!N$

Sei $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ eine *reelle symmetrische* (n,n)-Matrix,

seien $\quad \det A_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ & \ddots & \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}$ die *Hauptunterdeterminanten* von A, also

$\det A_1 = (a_{11})$, $\det A_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, ... , $\det A_n = \det A$,
dann gilt:

Satz 2.56 :

A ist *positiv definit* $\Leftrightarrow$ alle EW von A sind > 0
$\Leftrightarrow$ alle Hauptunterdeterminanten $\det A_i > 0$.

A ist *negativ definit* $\Leftrightarrow$ alle EW von A sind < 0
$\Leftrightarrow$ alle Hauptunterdeterminanten $\det A_i$ haben wechselnde Vorzeichen: $\det A_1 < 0, \det A_2 > 0, \det A_3 < 0$, usw.

A ist *indefinit* $\Leftrightarrow$ es existieren positive und negative EW
$\Leftrightarrow$ die Hauptunterdeterminanten $\det A_i$ haben andere Vorzeichen als bei positiv- bzw. negativ-(semi)definit.

A ist *positiv semidefinit* (und nicht positiv definit)
$\Leftrightarrow$ alle EW von A sind ≥ 0 und mindestens ein EW $= 0$
$\Rightarrow$ $detA = 0$ und alle Hauptunterdeterminanten $\det A_i \geq 0$.

A ist *negativ semidefinit* (und nicht negativ definit)
$\Leftrightarrow$ alle EW von A sind ≤ 0 und mindestens ein EW $= 0$
$\Rightarrow$ $\det A = 0$ und alle Hauptunterdeterminanten $\det A_i$ haben wechselnde Vorzeichen: $\det A_1 \leq 0, \det A_2 \geq 0, \det A_3 \leq 0$, usw.

Anwendung: Extrema quadratischer Formen

Satz 2.57 :

Sei A eine *reelle symmetrische* (n,n)-Matrix, dann gilt:

$$\boxed{\max_{|\vec{x}|=1} < A\vec{x}, \vec{x} >= \lambda_1}$$

mit λ_1 ist der größte EW von A. Das Maximum wird angenommen bei $\vec{x}_1$ EV zu λ_1 mit $|\vec{x}_1| = 1$.

$$\boxed{\min_{|\vec{x}|=1} < A\vec{x}, \vec{x} >= \lambda_n}$$

mit λ_n ist der kleinste EW von A. Das Minimum wird angenommen bei $\vec{x}_n$ EV zu λ_n mit $|\vec{x}_n| = 1$.

Beweis :

A symmetrisch $\Rightarrow$ $\exists$ orthogonale Matrix C mit $C^T AC = D \;\Rightarrow\; A = CDC^T \;\Rightarrow$

$$< A\vec{x}, \vec{x} >=< CDC^T\vec{x}, \vec{x} >=< DC^T\vec{x}, C^T\vec{x} >=< D\vec{u}, \vec{u} >= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i^2 \text{ mit } \vec{u} = C^T\vec{x} \;.$$

Also gilt: $\lambda_n \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \leq < A\vec{x}, \vec{x} > \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} u_i^2$.

Da $|\vec{x}|^2 = |\vec{u}|^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1 \;\Rightarrow\; \lambda_n \leq < A\vec{x}, \vec{x} > \leq \lambda_1$.

Ist $\vec{x}_1$ EV zu λ_1 mit $|\vec{x}_1| = 1$, so gilt
$< A\vec{x}_1, \vec{x}_1 >= \lambda_1 < \vec{x}_1, \vec{x}_1 >= \lambda_1 |\vec{x}_1|^2 = \lambda_1$.
Also gilt $\max_{|\vec{x}|=1} < A\vec{x}, \vec{x} >= \lambda_1$ (analog für Minimum).

Beispiel

$x^2 + xy + y^2 =< A\vec{x}, \vec{x} >$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$\det(A - \lambda E) = (1-\lambda)^2 - 1/4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 1/2 = 3/2$ oder $1/2 \Rightarrow$

$\max\limits_{x^2+y^2=1} (x^2 + xy + y^2) = \frac{3}{2}$, $\min\limits_{x^2+y^2=1} (x^2 + xy + y^2) = \frac{1}{2}$.

Die EV zu $\lambda_1 = 3/2$ sind $\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$, $(\alpha \neq 0)$, mit Länge 1 folgt: $\vec{x}_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

An diesen Stellen wird das Maximum angenommen.

Die EV zu $\lambda_2 = 1/2$ sind $\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$, $(\alpha \neq 0)$, mit Länge 1 folgt: $\vec{x}_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

An diesen Stellen wird das Minimum angenommen.

III Folgen, Reihen

Definition 3.1 : Ordnen wir jedem Element $n \in \mathbb{N}$ ein Element $a_n \in \mathbb{R}$ zu, so entsteht eine *reelle Zahlen-Folge* $(a_1, a_2, \ldots)$.

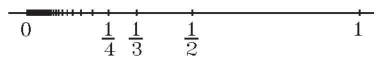
Andere Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder kurz (a_n) .

Häufig fängt die Numerierung bei einer anderen Zahl $m \in \mathbb{Z}$ an: $(a_n)_{n\geq m}$.

Beispiele

$(1, 1, 1, \ldots)$ konstante Folge

$(1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots) = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$



$(1, 1.4, 1.41, \ldots)$

$(2^0, 2^1, 2^2, \ldots) = (2^n)_{n\geq 0}$

Konvergenz:

z.B.: $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$,
z.B.: Die Werte der Folge $(1, 1.4, 1.41, \ldots)$ nähern sich dem Wert $\sqrt{2}$, falls $n \to \infty$.

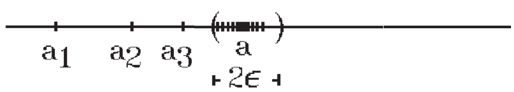
Frage: Nähern sich für $n \to \infty$ die Werte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einem bestimmten Wert $a \in \mathbb{R}$? Falls dies der Fall ist, sagt man: Die Folge (a_n) konvergiert gegen a für $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
Wir müssen den Bergiff "Konvergenz" präzisieren:

Definition 3.2 : Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$. Die Folge (a_n) heißt *konvergent* gegen $a \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R}$ mit $|a_n - a| < \epsilon\ \ \forall n > N$.

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Existiert kein $a \in \mathbb{R}$, so daß die Folge (a_n) gegen a konvergiert, so heißt die Folge (a_n) *divergent.*

In Worten ausgedrückt heißt "Konvergenz gegen a": In jedem (noch so kleinen) Intervall um a liegen fast alle (bis auf endlich viele) Folgenelemente.



Beispiele

1. $(1, 1, 1, \ldots)$ konvergiert gegen 1, denn $|a_n - 1| = |1 - 1| = 0 < \epsilon\ \forall n \in \mathbb{N}$.

2. $(\frac{1}{n})_{n\in I\!N}$ konvergiert gegen 0, denn $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon} =: N$, also $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \epsilon \;\; \forall n > N = \frac{1}{\epsilon}$.

3. $(\frac{1}{n^\alpha})_{n\in I\!N}$, $(\alpha > 0$ fest), konvergiert gegen 0, denn $|\frac{1}{n^\alpha} - 0| = \frac{1}{n^\alpha} < \epsilon \;\; \forall n > \frac{1}{\epsilon^{1/\alpha}} =: N$.

4. $(q^n)_{n\in I\!N}$, $q \in I\!R$ mit $|q| \leq 1$ fest.
Fallunterscheidung:
a) $q = 0 \Rightarrow (q^n) = (0, 0, \ldots) \to 0$, für $n \to \infty$,
b) $q = 1 \Rightarrow (q^n) = (1, 1, \ldots) \to 1$, für $n \to \infty$,
c) $q = -1 \Rightarrow (q^n) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ divergent (alternierend, der Abstand zwischen 2 aufeinanderfolgenden Folgengliedern ist immer $= 2$).
d) $|q| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|q|} > 1 \Rightarrow \exists b > 0$ mit $\frac{1}{|q|} = 1 + b \Rightarrow$
$|q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1+b)^n} < \frac{1}{nb}$, denn
$(1+b)^n = 1 + nb + \binom{n}{2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n > nb$ (da $b > 0$) $\Rightarrow$
$|q^n - 0| < \epsilon \;\; \forall n > \frac{1}{\epsilon b} =: N \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, falls $|q| < 1$.

Definition 3.3 :
Ist (a_n) eine *Nullfolge* in $I\!R$ (dh.: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$), und gilt $a_n > 0$ (bzw. < 0) $\forall n \geq m$, so schreibt man für die Folge (b_n) mit $b_n := \frac{1}{a_n}$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ (bzw. $-\infty$), und man sagt:
(b_n) konvergiert *uneigentlich* gegen ∞ (bzw. $-\infty$).

Beispiel :
$(q^n)_{n\in I\!N}$ mit $q > 1$ fest.
Da $|\frac{1}{q}| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, falls $q > 1$.

Eine besondere Rolle spielen die monotonen Folgen:

Definition 3.4 :
a) Eine Folge (a_n) heißt *(streng) monoton wachsend*
$\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n$ (bzw. $a_{n+1} > a_n$) $\forall n \in I\!N$.
b) Eine Folge (a_n) heißt *(streng) monoton fallend*
$\Leftrightarrow a_{n+1} \leq a_n$ (bzw. $a_{n+1} < a_n$) $\forall n \in I\!N$.
c) Eine Folge (a_n) heißt *beschränkt* $\Leftrightarrow \exists c_1, c_2 \in I\!R$ mit $c_1 \leq a_n \leq c_2 \;\; \forall n \in I\!N$.
Existiert nur eine untere Schranke c_1 (bzw. nur eine obere Schranke c_2), so heißt die Folge (a_n) nach unten (bzw. nach oben) beschränkt.

Definition 3.5 : Sei (a_n) eine Folge, und sei $(n_k)_{k\in I\!N}$ eine streng monotone Folge *natürlicher Zahlen.* Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in I\!N}$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in I\!N}$.

Beispiele

1. $(\frac{1}{2l})_{l\in I\!N}$ ist eine Teilfolge von $(\frac{1}{n})_{n\in I\!N}$.
2. $(q^{2l+1})_{l\in I\!N}$ ist eine Teilfolge von $(q^n)_{n\in I\!N}$.

Für den Beweis des nächsten Satzes benötigen wir noch die folgende Definition:

Definition 3.6 : Sei $M \subset I\!R$ eine beschränkte Teilmenge von $I\!R$ (dh.: $\exists c_1, c_2 \in I\!R$ mit $c_1 \le x \le c_2 \; \forall x \in M$), dann heißt
$\sup M =$ *kleinste obere Schranke* von M,
$\inf M =$ *größte untere Schranke* von M.

Es gilt dann:
Gilt $x \le c \; \forall x \in M \quad \Rightarrow \quad c \ge \sup M$.
Gilt $x \ge c \; \forall x \in M \quad \Rightarrow \quad c \le \inf M$.

Es gilt nun der folgende wichtige Satz für Folgen:

Satz 3.7 :
a) Eine Folge (a_n) hat *höchstens einen Grenzwert.*
b) Jede *Teilfolge* einer *konvergenten Folge* konvergiert gegen den *gleichen Grenzwert.*
c) Eine *konvergente* Folge ist *beschränkt.*
d) Eine *monotone* und *beschränkte* Folge ist *konvergent.*

Beweis :
a) Sei $a_n \to a$ und $a_n \to b$ mit $a \ne b \;\Rightarrow\; |a_n - a| < \epsilon \; \forall n > N_1$ und
$|a_n - b| < \epsilon \; \forall n > N_2 \quad \Rightarrow$
$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \le |a - a_n| + |a_n - b| < 2\epsilon \;\; \forall n > \max\{N_1, N_2\}$,
wähle $\epsilon = \frac{1}{2}|a - b| \quad \Rightarrow \quad |a - b| < |a - b|$, also Widerspruch.
b) Sei $|a_n - a| < \epsilon \; \forall n > N \quad \Rightarrow \quad |a_{n_k} - a| < \epsilon \; \forall k > N$, weil $n_k \ge k$ ((n_k) streng monoton).
c) Wähle $\epsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < 1 \; \forall n > N \in I\!N \quad \Rightarrow$
$|a_n| = |a_n - a + a| \le |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \; \forall n > N \quad \Rightarrow$
$|a_n| \le \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, 1 + |a|\} =: c \quad \forall n \in I\!N$.
d) Sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt, K sei eine obere Schranke
$\Rightarrow \quad a_1 \le a_n \le a_{n+1} \le K \; \forall n \in I\!N$.
Dann existiert eine kleinste obere Schranke $a = \sup\{a_n \; : \; n \in I\!N\}$.
Sei $\epsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad (a - \epsilon)$ ist keine obere Schranke. Weil $a - \epsilon < a = \sup\{a_n\} \quad \Rightarrow \quad \exists a_N$ mit $a - \epsilon < a_N \le a$.
Da (a_n) monoton wachsend $\;\Rightarrow\; a - \epsilon < a_n \le a \; \forall n \ge N \quad \Rightarrow$
$|a_n - a| < \epsilon \; \forall n \ge N \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
(analog für monoton fallend).

Bemerkung: d) ist ein hinreichendes aber nicht notwendiges *Kriterium für Konvergenz.* Der Grenzwert a ist dadurch noch nicht bekannt.

Beispiele

1. $a_n = (-1)^n \ , \ n \in I\!N$.
   Teilfolgen $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1 \ , \ a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \to -1 \neq 1$
   $\Rightarrow \quad (a_n)$ divergent.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$, denn:
   $$|\frac{\sqrt{n}}{n+1} - 0| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon \ \text{ für } \ n > \frac{1}{\epsilon^2} =: N.$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = 0$, denn:
   $$|\sqrt{n^2+1} - n - 0| = \sqrt{n^2+1} - n = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} \quad (\text{erweitert mit } \sqrt{n^2+1}+n)$$
   $$= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < \frac{1}{2n} < \epsilon \ \text{ für } n > \frac{1}{2\epsilon} \ .$$

4. $$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$$ denn:
   $\sqrt[n]{n} > 1$ für $n > 1 \quad \Rightarrow \quad \exists b_n > 0$ mit $\sqrt[n]{n} = 1 + b_n \quad \Rightarrow$
   $n = (1+b_n)^n = 1 + nb_n + \binom{n}{2}b_n^2 + \ldots + \binom{n}{n}b_n^n > \binom{n}{2}b_n^2$ (da $b_n > 0$) $\Rightarrow$
   $n > \dfrac{n(n-1)}{2}b_n^2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq b_n^2 \leq \dfrac{2}{n-1} < \epsilon$ für $n > (1 + \dfrac{2}{\epsilon}) \quad \Rightarrow$
   $|b_n^2 - 0| < \epsilon \ \forall n > N = (1 + \dfrac{2}{\epsilon}) \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$
   denn: $0 \leq b_n^2 < \epsilon \quad \Rightarrow \quad 0 \leq b_n < \epsilon^{1/2} \quad \Rightarrow \quad |b_n - 0| < \epsilon^{1/2}$.

5. Für $c > 0$ gilt:
   $$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1}$$ denn:
   1.Fall: $c = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{1} = 1 \to 1$.
   2.Fall: $c > 1 \quad \Rightarrow \quad \exists b_n > 0$ mit $\sqrt[n]{c} = 1 + b_n \quad \Rightarrow \quad c = (1+b_n)^n \quad \Rightarrow$
   $c = 1 + nb_n + \binom{n}{2}b_n^2 + \ldots + \binom{n}{n}b_n^n > nb_n \quad \Rightarrow$
   $0 < b_n < \dfrac{c}{n} < \epsilon$ für $n > \dfrac{c}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad |b_n - 0| < \epsilon$ für $n > \dfrac{c}{\epsilon} \quad \Rightarrow$
   $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.
   3.Fall: $0 < c < 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{c} > 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{c}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{c}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n!} = 0$, denn:

$$|\frac{n^2}{n!} - 0| = \frac{n^2}{n!} \leq \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)} = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \leq \frac{2}{n-2} < \epsilon \text{ für } n > 2 + \frac{2}{\epsilon} \;.$$

7.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e}$$

e heißt *Eulersche Zahl*

Denn:

a) Wir zeigen zunächst: (a_n) mit $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ ist eine *monoton wachsende* Folge:

$$a_{n-1} \leq a_n \quad \Leftrightarrow \quad (1+\frac{1}{n-1})^{n-1} \leq (1+\frac{1}{n})^n$$

$$\Leftrightarrow \quad (\frac{n}{n-1})^{n-1} \leq (\frac{n+1}{n})^n \quad \text{(Multiplikation mit } \frac{n}{n-1} \text{ für } n > 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\frac{n}{n-1})^n \leq (\frac{n+1}{n})^n \frac{n}{n-1} \qquad \text{(Multiplikation mit } (\frac{n}{n+1})^n)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\frac{n^2}{n^2-1})^n \leq \frac{n}{n-1} \qquad \text{(Kehrwert bilden)}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\frac{n^2-1}{n^2})^n \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-\frac{1}{n^2})^n \geq 1 - \frac{1}{n} \;.$$

Das ist die Bernoullische Ungleichung $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für $x = -\frac{1}{n^2}$ (siehe S.7).

b) Nun zeigen wir: (a_n) ist *beschränkt*:
Da (a_n) monoton wachsend, gilt:

$$a_1 \leq a_n = (1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (\frac{1}{2})^k$$

$$= 1 + \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1/2} = 3 \quad \text{(vgl. 1.30, S.15)}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 \leq a_n < 3 \quad \forall n \in I\!N.$$

Da (a_n) monoton und beschränkt, gilt nach Satz 3.7 d): $(a_n)_{n\in I\!N}$ ist konvergent. Den Grenzwert nennen wir e (Eulersche Zahl). Es gilt: $2 < e < 3$ (genauerer Wert $e = 2.7182818\ldots$ (später)).

8. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{1+a_n^2}{2}$, $n \in I\!N$ *rekursiv definierte Folge.*

Es gilt: $a_2 = \frac{1+1/4}{2} = \frac{5}{8} = 0.625$, $a_3 = \frac{1+25/64}{2} = \frac{89}{128} = 0.695\ldots$, usw.

Wir zeigen: (a_n) ist monoton und beschränkt

a) $a_{n+1} - a_n = \frac{1+a_n^2}{2} - a_n = \frac{1+a_n^2-2a_n}{2} = \frac{(1-a_n)^2}{2} \geq 0 \quad \Rightarrow$

$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad (a_n)$ monoton wachsend.
b) Da (a_n) monoton wachsend, gilt $a_1 = \frac{1}{2} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Mit Induktion zeigen wir:
$a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, denn
$n = 1$: richtig,
$n \to n+1$: $a_{n+1} = \frac{1+a_n^2}{2} \leq \frac{1+1^2}{2} = 1$.
Also gilt: $a_1 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, also (a_n) beschränkt.

Da (a_n) monoton und beschränkt, ist (a_n) konvergent (gegen $a \in \mathbb{R}$).
Bestimmung des Grenzwertes a:
Da $a_{n+1} = \frac{1+a_n^2}{2}$ und $a_n \to a$, also auch $a_{n+1} \to a$, folgt:
linke Seite $\to a$, rechte Seite $\to \frac{1+a^2}{2}$. Da beide Seiten gleich, folgt:

$$a = \frac{1+a^2}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 + a^2 - 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-a)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \ .$$

Um die Konvergenz einer Folge (a_n) gegen a zu zeigen, kann man häufig folgenden Satz benutzen:

Satz 3.8 : Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$.
Gilt $|a_n - a| \leq b_n \quad \forall n \geq n_1$ mit (b_n) ist eine Nullfolge (dh.: $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$)
$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Beweis :
Sei $\epsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| \leq b_n < \epsilon \quad \forall n > N \quad \Rightarrow$
$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > \max\{N, n_1\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Beispiel

$$a_n = \frac{\cos n}{n} \quad \Rightarrow \quad |a_n - 0| = |\frac{\cos n}{n}| \leq \frac{1}{n} \to 0 \text{ für } n \to \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0 \ .$$

Definition 3.9 : *Cauchy-Konvergenz*
Eine Folge (a_n) heißt *Cauchy-konvergent*
$\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{R}$ mit $|a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m > N$.

In $\mathbb{R}$ gilt folgende Eigenschaft

Satz 3.10 :
Die Folge (a_n) ist *konvergent* $\Leftrightarrow$ die Folge (a_n) ist *Cauchy-konvergent.*

Beweis :
"$\Rightarrow$": $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \epsilon/2 + \epsilon/2 < \epsilon \quad \forall n, m > N$.
"$\Leftarrow$": (a_n) ist beschränkt, denn:
$|a_n| \leq |a_n - a_m| + |a_m| \leq 1 + |a_m| \quad \forall n > N \in \mathbb{N}, (m > N$ fest)
$\Rightarrow \quad |a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, 1 + |a_m|\} =: K$.

Sei $b_n = \inf\{a_k \ : \ k \geq n\}$ (größte untere Schranke)
$\Rightarrow \quad b_{n+1} \geq b_n$, da $\{a_k \ : \ k \geq n+1\} \subset \{a_k \ : \ k \geq n\}$
$\Rightarrow \quad (b_n)$ ist monoton wachsend und beschränkt (beschränkt durch $b_1 \leq b_n \leq K$)
$\Rightarrow \quad (b_n)$ ist konvergent gegen einen Grenzwert a, also $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.
Sei $\epsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists n_0 > N$ mit $|a - b_{n_0}| < \epsilon/2$ und $\exists n_1 \geq n_0$ mit $|b_{n_0} - a_{n_1}| < \epsilon/2$ (weil inf)
$\Rightarrow \quad |a - a_n| \leq |a - b_{n_0}| + |b_{n_0} - a_{n_1}| + |a_{n_1} - a_n|$
$< \epsilon/2 + \epsilon/2 + \epsilon = 2\epsilon \ \ \forall n > N \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$

Rechenregeln konvergenter Folgen

Satz 3.11 : Seien $(a_n), (b_n)$ zwei konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda a$
b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$
d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, falls $b_n \neq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$
e) Gilt $a_n \leq b_n \ \ \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad a \leq b$.

Beweis :
a) $|\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda||a_n - a| < |\lambda|\epsilon' = \epsilon \ \ \forall n > N.$
b) $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \ \ \forall n > N.$
c) $|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$
$\leq K|b_n - b| + |b||a_n - a|$ (konvergente Folge ist beschränkt)
$< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \ \ \forall n > N.$
d) $|b| \leq |b - b_n| + |b_n| \leq \dfrac{|b|}{2} + |b_n| \ \ \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |b_n| \geq \dfrac{|b|}{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{|b_n|} \leq \dfrac{2}{|b|} \ \ \forall n \geq n_0$
$\Rightarrow \quad |\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{b}| = \dfrac{|b - b_n|}{|b_n||b|} \leq \dfrac{2}{|b|^2}|b_n - b| < \epsilon \ \ \forall n > N$
$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \dfrac{1}{b_n} = a \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{b}$ (nach c)).
e) $b_n - a_n \geq 0$ (da $a_n \leq b_n$) und $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = b - a \quad \Rightarrow \quad (b - a) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b \geq a.$

Beispiele

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1}{n} + (1 + \dfrac{1}{n})^n) = 0 + e = e$.
2. Sei $p(x) = c_k x^k + c_{k-1} x^{k-1} + \ldots + c_1 x + c_0$, $c_i \in \mathbb{R}$ (Polynom)
$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} p(\dfrac{1}{n}) = c_0$, denn $(\dfrac{1}{n})^k \to 0$ für $k > 0 \quad \Rightarrow$
$p(1/n) = c_k(1/n)^k + \ldots + c_1(1/n) + c_0 \quad \to \quad c_0$.

3. $a_n = \dfrac{c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \ldots + c_1 n + c_0}{d_l n^l + d_{l-1} n^{l-1} + \ldots + d_1 n + d_0}$ mit $c_k \neq 0$, $d_l \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{,falls } k < l \\ \dfrac{c_k}{d_l} & \text{,falls } k = l \\ \infty & \text{,falls } k > l \text{ und } \dfrac{c_k}{d_l} > 0 \\ -\infty & \text{,falls } k > l \text{ und } \dfrac{c_k}{d_l} < 0 \end{cases}$$

denn:

$$a_n = n^{k-l}\left\{\frac{c_k + c_{k-1}\frac{1}{n} + \ldots + c_0\frac{1}{n^k}}{d_l + d_{l-1}\frac{1}{n} + \ldots + d_0\frac{1}{n^l}}\right\} \quad \text{wobei } \{\ldots\} \to \frac{c_k}{d_l} \ .$$

Z.B.:

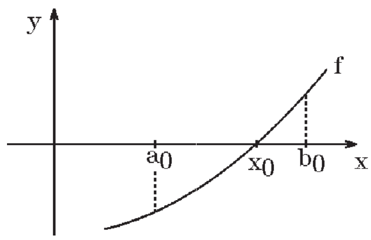
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n-1}{4n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{4+\frac{5}{n^2}} = \frac{3}{4} \ ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{10n+6} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n^2}}{\frac{10}{n}+\frac{6}{n^2}} = \infty \ ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{6n^3+5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^3}}{6+\frac{5}{n^2}} = 0 \ .$$

4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n-\cos n}{n+\cos n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{\cos n}{n}}{1+\frac{\cos n}{n}} = 1$, da $\dfrac{\cos n}{n} \to 0$ für $n \to \infty$.

Beispiel : *Intervallschachtelung*



Gegeben: $f : I \subset I\!R \to I\!R$ stetige Funktion.
Gesucht: *Nullstelle* $x_0 \in I$, dh.: $f(x_0) = 0$.

1.Schritt: *Ausgangsintervall* $[a_0, b_0]$ wählen mit $x_0 \in [a_0, b_0]$,
dh.: $f(a_0)f(b_0) < 0$ (Vorzeichenwechsel)

2.Schritt: *Halbierung* des Intervalls: $c = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$

3.Schritt: *nächstes Teilintervall* angeben:

falls $f(a_0)f(c) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \in [a_0, c]$, sonst $x_0 \in [c, b_0]$.

Also wähle $a_1 = \begin{cases} a_0 & \text{,falls } f(a_0)f(c) \leq 0 \\ c & \text{,sonst} \end{cases}$

$b_1 = \begin{cases} c & \text{,falls } f(a_0)f(c) \leq 0 \\ b_0 & \text{,sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad x_0 \in [a_1, b_1]$ (neues Intervall).

Weiter bei Schritt 2) (bis $|b_n - a_n| = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n} < \epsilon$).

Auf diese Weise erhält man eine Folge von ineinandergeschachtelten Intervallen $[a_n, b_n]$ mit $x_0 \in [a_n, b_n]$.

Es gilt: $a_0 \le a_n \le a_{n+1} \le x_0 \le b_{n+1} \le b_n \le b_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \quad (a_n)$ und (b_n) sind monoton und beschränkt $\Rightarrow$ konvergent
$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \ , \ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b.$ Da $0 < (b_n - a_n) = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n} \to 0$ für $n \to \infty$
$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = b - a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b = x_0$ (da $x_0 \in [a_n, b_n] \ \ \forall n \in \mathbb{N}$).

Beispiel hierzu: Gesucht $\sqrt{2}$.
$f(x) = x^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \sqrt{2}$ (positive Nullstelle).
Ausgangsintervall $[1, 2]$ (denn $f(1)f(2) = (-1)(2) = -2 < 0$)
$c = \dfrac{1+2}{2} = 1.5 \ , \ f(1)f(1.5) < 0 \quad \Rightarrow \quad [a_1, b_1] = [1, 1.5]$
$c = \dfrac{1+1.5}{2} = 1.25 \ , \ f(1.25)f(1.5) < 0 \quad \Rightarrow \quad [a_2, b_2] = [1.25, 1.5]$
$c = \dfrac{1.25+1.5}{2} = 1.375 \ , \ f(c)f(b_2) < 0 \quad \Rightarrow \quad [a_3, b_3] = [1.375, 1.5]$
$c = 1.4375 \ , \ f(a_3)f(c) < 0 \quad \Rightarrow \quad [a_4, b_4] = [1.375, 1.4375]$
$c = 1.40625 \ , \ f(c)f(b_4) < 0 \quad \Rightarrow \quad [a_5, b_5] = [1.40625, 1.4375]$
$c = 1.421875 \ , \ f(a_5)f(c) < 0 \quad \Rightarrow \quad [a_6, b_6] = [1.40625, 1.421875]$
$c = 1.4140625$
usw.
Man erhält $\sqrt{2} = 1.41421\ldots$.
Die Konvergenz ist relativ langsam, denn z.B. bei einem Ausgangsintervall $[a_0, b_0]$ der Länge 1 erhält man im n-ten Schritt das Intervall $[a_n, b_n]$ der Länge $\dfrac{1}{2^n}$. Dieses Intervall hat die Länge $< 10^{-8} \quad \Leftrightarrow \quad n \ge 27$, also erst nach 27 Schritten.

Komplexe Zahlenfolgen, Vektor-Folgen

In der Anwendung werden nicht nur Folgen aus $\mathbb{R}$ sondern auch Folgen aus anderen Mengen betrachtet, z.B:
(z_n) Folge in $\mathbb{C}$,
$(\vec{x}_n)$ Folge in $\mathbb{R}^k$,
(f_n) Funktionenfolge.
Immer dann, wenn in der entsprechenden Menge der Abstand zwischen zwei Elementen gemessen werden kann, z.B.: $|z_n - z|$ in $\mathbb{C}$ oder $|\vec{x}_n - \vec{x}|$ in $\mathbb{R}^k$, so kann man analog zu Def. 3.2 den Begriff "Konvergenz" definieren. Alle Eigenschaften und Sätze, in denen der Abstand eine Rolle spielt, gelten dann entsprechend.
Die Eigenschaften, wo Elemente der Größe nach verglichen werden (z.B. Monotonie), können dagegen nicht nach $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^k$ übertragen werden. In $\mathbb{R}^k$ fehlt auch die "normale" Multiplikation und die Division.

Definition 3.12 :
a) Eine komplexe Zahlenfolge (z_n) in $\mathbb{C}$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$
$\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{R}$ mit $|z_n - z| < \epsilon \ \ \forall n > N$.
b) Eine Vektorfolge $(\vec{x}_n)$ in $\mathbb{R}^k$ konvergiert gegen $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$
$\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{R}$ mit $|\vec{x}_n - \vec{x}| < \epsilon \ \ \forall n > N$.

Satz 3.13 : Für komplexe Zahlenfolgen $(z_n) = (x_n + iy_n) \in \mathbb{C}$ gilt:
$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = z = (x + iy)$
$\Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} Re(z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = Re(z) \text{ und } \lim\limits_{n\to\infty} Im(z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y = Im(z)$.

Dh.: Eine komplexe Zahlenfolge konvergiert genau dann, wenn die Realteil- Folge und die Imaginärteil-Folge konvergieren.

Beweis :
Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ gilt $|x| \leq |z|$ und $|y| \leq |z|$, also gilt
$|x_n - x| \leq |z_n - z| < \epsilon$ und $|y_n - y| \leq |z_n - z| < \epsilon \quad \forall n > N$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, also auch $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.
$|z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \epsilon$, falls $|x_n - x| < \epsilon'$ und $|y_n - y| < \epsilon'$, also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Satz 3.14 : Für Vektorfolgen $(\vec{x}_n) = (\begin{pmatrix} x_{n1} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix}) \in \mathbb{R}^k$ gilt:
$\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_{ni} = x_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k$.

Dh.: Eine Vektorfolge $(\vec{x}_n)$ konvergiert genau dann gegen $\vec{x}$, wenn alle Koordinaten-Folgen (x_{ni}) gegen (x_i) konvergieren.

Beweis :
Für einen Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ gilt $|x_i| \leq |\vec{x}|$, also gilt
$|x_{ni} - x_i| \leq |\vec{x}_n - \vec{x}| < \epsilon \quad \forall n > N \ , \ \forall i = 1, 2, \ldots, k$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$, also auch $\lim\limits_{n\to\infty} x_{ni} = x_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k$.
$|\vec{x}_n - \vec{x}| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k} (x_{ni} - x_i)^2} < \epsilon$, falls $|x_{ni} - x_i| < \epsilon' \quad \forall i$, also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} x_{ni} = x_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k$.

Für *komplexe Folgen* gilt analog Def.3.5 (Teilfolgen), Satz 3.7 a)b)c) (beschränkt heißt hier: $c_1 \leq |z_n| \leq c_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$), (d) gilt *nicht*), Satz 3.8, Def.3.9 (Cauchy-Konvergenz), Satz 3.10, Satz 3.11 a)b)c)d), (e) gilt *nicht*).

Für *Vektor-Folgen* gilt analog Def.3.5 (Teilfolgen), Satz 3.7 a)b)c) (beschränkt heißt hier: $c_1 \leq |\vec{x}_n| \leq c_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$), (d) gilt *nicht*), Satz 3.8, Def.3.9 (Cauchy-Konvergenz), Satz 3.10, Satz 3.11 a)b), (c)d)e) gelten *nicht*).

Beweis :
(z_n) Cauchy-konvergent $\Leftrightarrow$ (z_n) konvergent.

"$\Rightarrow$": $(z_n) = (x_n + iy_n)$ Cauchy-konvergent $\Rightarrow (x_n), (y_n)$ Cauchy-konvergent
$\Rightarrow x_n \to x$ und $y_n \to y \;\Rightarrow\; z_n = x_n + iy_n \to z = x + iy$.
"$\Leftarrow$": $|z_n - z_m| \le |z_n - z| + |z - z_m| < \epsilon/2 + \epsilon/2 < \epsilon \;\forall n, m > N$.

Beweis :
$(\vec{x}_n)$ Cauchy-konvergent $\Leftrightarrow$ $(\vec{x}_n)$ konvergent.
"$\Rightarrow$": $(\vec{x}_n)$ Cauchy-konvergent $\Rightarrow (x_{ni})$ Cauchy-konvergent $\forall i \;\Rightarrow x_{ni} \to x_i \;\forall i$

$$\Rightarrow \vec{x}_n \to \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} .$$

"$\Leftarrow$": $|\vec{x}_n - \vec{x}_m| \le |\vec{x}_n - \vec{x}| + |\vec{x} - \vec{x}_m| < \epsilon/2 + \epsilon/2 < \epsilon \;\forall n, m > N$.

Beispiele

1. $z_n = \dfrac{2n^2}{1+n^2} + i(1+\dfrac{1}{n})^n \quad \to \quad 2 + ie \quad$ für $n \to \infty$.
2. $z_n = \dfrac{(3+4i)^n}{6^n} \quad \to \quad 0$, denn $|z_n - 0| = \dfrac{|3+4i|^n}{6^n} = (\dfrac{5}{6})^n \quad \to \quad 0$ für $n \to \infty$.
3. $z_n = q^n$, $q \in \mathbb{C}$ fest.
   Gilt $|q| < 1 \;\Rightarrow\; |z_n - 0| = |q^n - 0| = |q|^n \;\to\; 0$ für $n \to \infty$,
   also $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, falls $|q| < 1$.
   Gilt $|q| = 1 \;\Rightarrow z_n = q^n = (|q|e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$ divergent für $0 < \varphi < 2\pi$ (nur konvergent für $q = 1$).
   Gilt $|q| > 1 \;\Rightarrow\; |z_n| = |q|^n \to \infty \;\Rightarrow (z_n)$ divergent.
4. $z_n = \dfrac{n+2i}{3+2in} = \dfrac{1+\frac{2}{n}i}{\frac{3}{n}+2i} \;\to \dfrac{1}{2i} = -\dfrac{i}{2}$ für $n \to \infty$.
5. $\vec{x}_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{n}{n+1} \\ (1+\frac{1}{n})^n \end{pmatrix} \;\to\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ e \end{pmatrix} = \vec{x}$ für $n \to \infty$.

Unendliche Reihen

Ein *Spezialfall für Folgen* sind *unendliche Reihen.*

Definition 3.15 : Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann kann man hieraus eine neue Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgendermaßen bilden: $\quad s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nennt man *unendliche Reihe* und schreibt hierfür $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Besitzt die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert $s \in \mathbb{R}$, so sagt man: die unendliche Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ist *konvergent mit Grenzwert s* , also $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = s$.

Andernfalls heißt die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *divergent.*

Das n-te Folgenglied $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ heißt *n-te Partialsumme*

der unendlichen Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Bemerkung: Diese Definition gilt entsprechend in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^k$.

Beispiele

1. *Geometrische Reihe* , $q \in \mathbb{C}$ fest, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ fest

$$\boxed{\sum_{k=n_0}^{\infty} q^k = \frac{q^{n_0}}{1-q} \quad , \quad \text{falls } |q| < 1}$$

Spezialfall: $n_0 = 0$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q} \quad , \quad \text{falls } |q| < 1}$$

Denn: $s_n = \sum_{k=n_0}^{n} q^k = \frac{q^{n_0} - q^{n+1}}{1-q} \quad \to \quad \frac{q^{n_0}}{1-q}$, falls $|q| < 1$ (vgl. 1.30, S.15).

2.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 \ .$$

Denn: $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$

$= (\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \to \quad 1 \quad \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots = 1 \ .$$

3.
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent (harmonische Reihe).

Denn: $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$,

(s_n) ist monoton wachsend, weil $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{n+1} > s_n$,
(s_n) ist unbeschränkt, denn
$s_1 = 1$, $s_2 - s_1 = \frac{1}{2}$, $s_4 - s_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$,
allgemein: $s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$

$s_{2^n} = s_1 + (s_2 - s_1) + (s_4 - s_2) + \ldots + (s_{2^n} - s_{2^{n-1}}) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$
$s_{2^n} > 1 + \dfrac{n}{2} \quad \to \quad \infty \quad \Rightarrow \quad (s_{2^n})$ ist nicht beschränkt (Teilfolge von (s_n)) $\Rightarrow$
(s_n) ist nicht beschränkt $\Rightarrow$ (s_n) divergent $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.

Bei vielen Reihen ist es schwierig, die Konvergenz direkt über die Konvergenz der Partialsummenfolge nachzuweisen (wenn man für die $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ keinen geschlossenen Ausdruck findet). Um trotzdem Aussagen über Konvergenz oder Divergenz machen zu können, werden *Konvergenzkriterien* benötigt. Die wichtigsten Konvergenzkriterien werden im übernächsten Satz zusammengefaßt. Zunächst zeigen wir aber noch einige wichtige Eigenschaften unendlicher Reihen.

Satz 3.16 : Seien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei unendliche Reihen, und sei $c \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

a) Ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (also (a_n) ist eine Nullfolge).
Diese Eigenschaft gilt nicht umgekehrt. Es ist ein notwendiges aber kein hinreichendes Konvergenzkriterium für unendliche Reihen.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ sind konvergent mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ .$$

Beweis :

a) $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = s \quad \Rightarrow \quad 0 \le |a_n| = |s_n - s_{n-1}| \le |s_n - s| + |s - s_{n-1}| \ \to \ 0.$

b) folgt aus den entsprechenden Eigenschaften für die Folgen (s_n) (Satz 3.11, S.96).

Bemerkung: Daß die Umkehrung von a) nicht gilt, zeigt das Beispiel der harmonischen Reihe: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent, aber $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Satz 3.17 : *Hinreichende Konvergenzkriterien*

Sei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine unendliche Reihe, die auf Konvergenz oder Divergenz untersucht werden soll. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sei eine Vergleichsreihe, von der man weiß, ob sie konvergent oder divergent ist.

a) *Majorantenkriterium*

Gilt

$$\boxed{|a_n| \leq b_n \quad \forall n \geq n_0}$$

und ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so ist auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent.*

Gilt

$$\boxed{0 \leq b_n \leq a_n \quad \forall n \geq n_0}$$

und ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, so ist auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

b) *Quotientenkriterium*

Gilt

$$\boxed{|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q < 1 \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{mit } 0 < q < 1}$$

oder gilt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1}$$

$\Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist *konvergent.*

Gilt $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist *divergent.*

Im Falle $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1 \quad$ ist keine Aussage möglich.

c) *Wurzelkriterium*

Gilt

$$\boxed{\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{mit } 0 < q < 1}$$

oder gilt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1}$$

$\Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist *konvergent.*

Gilt $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist *divergent.*

Im Falle $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \quad$ ist keine Aussage möglich.

Bemerkung 3.18 :

In allen Konvergenzfällen dieses Satzes konvergiert sogar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Falls dies der Fall ist, heißt die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

Es gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent* $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent.*

Die umgekehrte Richtung gilt nicht (Beispiel später).

Denn:

$|a_n| \leq |a_n| \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist konvergent $\Rightarrow$ (nach a)) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent.

Beweis zu Satz 3.17

a) Sei $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \;,\; t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \;,\; t_n \to t \quad \Rightarrow \quad$ für $m > n \geq n_0$

$|s_m - s_n| = |a_m + a_{m-1} + \ldots + a_{n+1}| \leq |a_m| + |a_{m-1}| + \ldots + |a_{n+1}|$

$\leq b_m + b_{m-1} + \ldots + b_{n+1} = t_m - t_n < \epsilon \;\; \forall m, n > N$ (da $t_n \to t$)

$\Rightarrow$ (s_n) ist Cauchy-konvergent $\Rightarrow$ (s_n) ist konvergent (gegen $s \in \mathbb{R}$).

Da $b_n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad t_n = \sum_{k=n_0}^{n} b_k$ ist monoton wachsend. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent $\Rightarrow$

(t_n) ist unbeschränkt für $n \to \infty$. Da $a_n \geq b_n \quad \Rightarrow \quad s_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k \geq t_n$ ist unbeschränkt

für $n \to \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

b) Sei $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q < 1 \;\; \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad$ (für $n > n_0$)

$$|\frac{a_n}{a_{n_0}}| = |\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}| \leq q^{n-n_0} \quad \Rightarrow \quad |a_n| \leq \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} q^n = K q^n \;\; \text{für } n > n_0 \;.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergent für $0 < q < 1 \quad \Rightarrow$ (nach a)) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist (absolut) konvergent.

Ist $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1 \quad \Rightarrow \quad \exists 0 < q < 1$ mit $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q < 1 \;\; \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist (absolut) konvergent.

Ist $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1 \quad \Rightarrow \quad \exists r > 1$ mit $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq r > 1 \;\; \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow$

$|a_{n+1}| > |a_n| \;\; \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad a_n \not\to 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent (nach Satz 3.16 a)).

c) Sei $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \quad \Rightarrow \quad |a_n| \leq q^n \quad \forall n \geq n_0$, da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergent $\Rightarrow$ (nach a))

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist (absolut) konvergent.

Ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \quad \Rightarrow \quad \exists 0 < q < 1$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \quad \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist (absolut) konvergent.

Ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \quad \Rightarrow \quad \exists r > 1$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \geq r \quad \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n| \geq r^n \quad \Rightarrow$

$a_n \not\to 0 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

Beispiele

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergent, denn: $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{n!}{(n+1)!}| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ konvergent, denn: $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$ divergent, denn: $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n}^3} = 3 > 1$.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ konvergent $\Leftrightarrow \quad |q| < 1$, denn: $\sqrt[n]{|q^n|} = |q| \to |q|$, also:

   gilt $\quad |q| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergent (Grenzwert siehe Beispiel 1, S.101),

   gilt $\quad |q| > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ divergent,

   gilt $\quad |q| = 1 \quad \Rightarrow \quad q^n \not\to 0 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ divergent.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ divergent, da $(-1)^n \not\to 0$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konvergent für $k \geq 2$, denn: $\quad |\frac{1}{n^k}| \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} \quad \forall n \geq 2$.

   Da $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} = 1$ (vgl. Beispiel 2, S.101)

   $\Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ ist konvergent für $k \geq 2$.

Wir werden später zeigen, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ sogar konvergent ist für $k > 1$.

Bei diesem Beispiel ist das Wurzel- und Quotientenkriterium nicht anwendbar, denn:

$\sqrt[n]{\frac{1}{n^k}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}^k} \to 1 \quad \Rightarrow$ Wurzel-Kriterium nicht anwendbar.

$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{n^k}{(n+1)^k} = (\frac{n}{n+1})^k \to 1 \quad \Rightarrow$ Quotienten-Kriterium nicht anwendbar.

Um das Majorantenkriterium einfacher anwenden zu können, zeigen wir den folgenden Satz:

Satz 3.19 : *Folgerungen aus dem Majorantenkriterium*

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die zu untersuchende Reihe und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine Vergleichsreihe mit $b_n > 0 \;\; \forall n \in I\!N$.

a) Gilt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = L \quad \text{mit} \;\; 0 \leq L < \infty}$$

dann folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ die

absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Gilt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \quad \text{mit} \;\; 0 < L < \infty}$$

dann folgt aus der Divergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ die *Divergenz* der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis :

a) $L = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{|a_n|}{b_n} \leq 1 \;\; \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n| \leq b_n \;\; \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow$ Majorantenkriterium anwendbar.

$L > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{2} \leq \frac{|a_n|}{b_n} \leq \frac{3}{2} \cdot L \;\; \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow$

$(\frac{L}{2})b_n \leq |a_n| \leq (\frac{3L}{2})b_n \;\; \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow$ Majorantenkriterium anwendbar.

b) analog $\frac{L}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2} \cdot L \;\; \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad (\frac{L}{2})b_n \leq a_n \;\; \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow$ Majorantenkriterium für Divergenz anwendbar.

Beispiele

1. $a_n = \dfrac{2n^2-3n+5}{6n^4+5n+6}$, $b_n = \dfrac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ konvergent,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^4-3n^3+5n^2}{6n^4+5n^2+6} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-3n+5}{6n^4+5n^2+6} \text{ konvergent.}$$

2. $a_n = \dfrac{2n^2-3n+5}{4n^3+6}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ divergent,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-3n^2+5n}{4n^3+6} = \frac{1}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-3n+5}{4n^3+6} \text{ divergent.}$$

Aus den Konvergenzkriterien erhält man nicht den Wert der Reihe. Will man den Reihenwert näherungsweise berechnen, so bestimmt man den Wert einer Partialsumme $s_{n_0} = \sum\limits_{n=1}^{n_0}$ und schätzt den Fehler $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ ab.

Fehlerabschätzung 3.20

a) Gilt $|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q < 1 \;\; \forall n \geq n_0$, so gilt die Fehlerabschätzung

$$\boxed{|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{n_0} a_n| \leq |a_{n_0}| \cdot \frac{q}{1-q}}$$

b) Gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \;\; \forall n \geq n_0$, so gilt die Fehlerabschätzung

$$\boxed{|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{n_0} a_n| \leq q^{n_0} \cdot \frac{q}{1-q}}$$

Beweis :

a) $|\dfrac{a_n}{a_{n_0}}| = |\dfrac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \dfrac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}| \leq q^{n-n_0} \quad \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow$

$|a_n| \leq \dfrac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} q^n \quad \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow$

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{n_0} a_n| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n| \leq \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} q^n = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} \cdot \frac{q^{n_0+1}}{1-q} = |a_{n_0}| \cdot \frac{q}{1-q} \; .$$

b) $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \quad \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n| \leq q^n \quad \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow$

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{n_0} a_n| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} q^n = \frac{q^{n_0+1}}{1-q} = q^{n_0} \cdot \frac{q}{1-q} \; .$$

Beispiele

1. $s = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$, $s = ?$

$$|s-\sum_{n=0}^{n_0}\frac{1}{n!}|\le\frac{1}{n_0!}\cdot\frac{q}{1-q}\quad\text{, mit }|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{n_0+1}=q\quad\forall n\ge n_0\ ,$$

da $1-q=1-\dfrac{1}{n_0+1}=\dfrac{n_0}{n_0+1}$, also $\dfrac{q}{1-q}=\dfrac{1}{n_0}\quad\Rightarrow$

$$|s-\sum_{n=0}^{n_0}\frac{1}{n!}|\le\frac{1}{n_0!n_0}\ .$$

Soll der Fehler $<10^{-8}$ sein, so muß gelten: $\dfrac{1}{n_0!n_0}<10^{-8}\quad\Rightarrow\quad n_0=11\quad\Rightarrow$

$$s=\sum_{n=0}^{11}\frac{1}{n!}+R=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{11!}+R=2.7182818+R\ \text{ mit }|R|<10^{-8}.$$

Wir werden später zeigen, daß $s=e$ (Eulersche Zahl) ist, also gilt $e=2.7182818\ldots$

2. $s=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 4^n}\ ,\ s=?$

$$\sqrt[n]{|\frac{1}{n\cdot 4^n}|}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}\cdot 4}\le\frac{1}{4}=q\quad\forall n\ge 1\quad(\text{da }\sqrt[n]{n}\ge 1)\quad\text{, da }\frac{q}{1-q}=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow$$

$$|s-\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{n\cdot 4^n}|\le(\frac{1}{4})^{n_0}\cdot\frac{1}{3}<10^{-8}\quad\Rightarrow\quad n_0=13\quad\Rightarrow$$

$$s=\sum_{n=1}^{13}\frac{1}{n\cdot 4^n}+R=0.2876821+R\quad\text{mit }|R|<10^{-8}.$$

Wir werden später zeigen, daß $s=-\ln(1-1/4)=-\ln(3/4)=\ln 4-\ln 3$ ist.

Für alternierende Reihen gilt ein spezielles Konvergenzkriterium:

Satz 3.21 : *Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen*

Sei $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n\quad,\quad a_n\ge 0\quad\forall n\in I\!N_0$.

Eine solche Reihe heißt *alternierende Reihe.*

Ist $(a_n)_{n\ge 0}$ eine *monoton fallende Nullfolge* , dh. $a_n\searrow 0$ für $n\to\infty$

$\Rightarrow\quad\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ ist konvergent. Für den Grenzwert $s=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ gilt die *Fehlerabschätzung*

$$\boxed{|s-\sum_{n=0}^{n_0}(-1)^n a_n|\le a_{n_0+1}}$$

Beweis :

$s_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k=a_0-a_1+a_2-\ldots+(-1)^n a_n$, also

$s_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2n} - a_{2n+1}) \geq 0$ (da (a_n) monoton fallend, sind alle Klammerausdrücke ≥ 0),
$s_{2n+3} = s_{2n+1} + (a_{2n+2} - a_{2n+3}) \geq s_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \Rightarrow \quad (s_{2n+1})$ monoton wachsend
$s_{2n} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \ldots - (a_{2n-1} - a_{2n}) \leq a_0$,
$s_{2n+2} = s_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq s_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \Rightarrow \quad (s_{2n})$ monoton fallend.
Da $0 \leq s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n} \leq a_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \Rightarrow \quad (s_{2n})$ und (s_{2n+1}) sind auch beschränkt, also konvergent, also $\exists s, t \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s$ und $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = t$.
Da $|s - t| \leq |s - s_{2n}| + |s_{2n} - s_{2n-1}| + |s_{2n-1} - t| \to 0$ (denn $s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n} \to 0$, da (a_n) Nullfolge), $\Rightarrow \quad s = t$.
Da $0 \leq s_{2n+1} \leq s \leq s_{2n} \leq a_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \Rightarrow$
$0 \leq s_{2n} - s \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1}$ und $0 \leq s - s_{2n+1} \leq s_{2n+2} - s_{2n+1} = a_{2n+2} \quad \Rightarrow$
$|s_{2n} - s| \leq a_{2n+1}$ und $|s - s_{2n+1}| \leq a_{2n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \Rightarrow$
$|s - s_n| \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Beispiele

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ ist konvergent, denn $a_n = \frac{1}{n+1}$ ist monoton fallende Nullfolge. Sei s der Reihenwert, dann gilt für $n_0 \in \mathbb{N}$
$|s - \sum\limits_{n=0}^{n_0} \frac{(-1)^n}{n+1}| \leq \frac{1}{n_0 + 2}$.
Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent, aber *nicht absolut* konvergent, da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ldots$ ist konvergent, denn $a_n = \frac{1}{n!}$ ist monoton fallende Nullfolge. Für den Reihenwert $\frac{1}{e}$ (später) gilt:
$|\frac{1}{e} - \sum\limits_{n=0}^{n_0} \frac{(-1)^n}{n!}| \leq \frac{1}{(n_0+1)!} < 10^{-8} \quad \Rightarrow \quad n_0 = 11$, also:
$\frac{1}{e} = \sum\limits_{n=0}^{11} \frac{(-1)^n}{n!} + R = 0.3678794 + R$ mit $|R| < 10^{-8}$.

Anordnung einer Reihe

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ ist konvergent, aber *nicht absolut* konvergent.
Die Reihe läßt sich nicht anders anordnen, denn z.B.:
$(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots)$ ist divergent, da beide Klammerausdrücke divergent sind.
Es gilt aber:

Eine *absolut konvergente* Reihe läßt sich *beliebig anordnen.*

Diese Eigenschaft benötigen wir bei der Multiplikation von konvergenten Reihen:

Multiplikation von absolut konvergenten Reihen

Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei *absolut konvergente* Reihen. Wir wollen das Produkt $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n)$ untersuchen:

$$
\begin{array}{l}
(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n) = (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots\ldots)(b_0 + b_1 + b_2 + \ldots\ldots) \\
\quad = a_0b_0 + a_0b_1 + a_0b_2 + a_0b_3 + \ldots \\
\qquad\quad \swarrow \quad\ \swarrow \quad\ \swarrow \\
\quad +a_1b_0 + a_1b_1 + a_1b_2 + \ldots\ldots \\
\qquad\quad \swarrow \quad\ \swarrow \\
\quad +a_2b_0 + a_2b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots \\
\quad + \quad \ldots\ldots \\
\quad \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \text{(unendlich ausgedehnt).}
\end{array}
$$

Diagonal aufaddieren ergibt:

$$
\begin{array}{l}
\quad = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \ldots\ldots \\
\quad = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sum\limits_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \quad \text{mit} \quad c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}\ .
\end{array}
$$

Also erhalten wir

Cauchy-Produkt (3.22)

$$\boxed{(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n}$$

Satz 3.23 : Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei *absolut konvergente* Reihen.

Dann ist auch das Cauchy-Produkt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}$ *absolut konvergent* mit

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ .$$

Beweis :

Seien $a = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $b = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ und $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ und $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$ die n-ten Partialsummen.

$s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \ldots + (a_0b_n + \ldots + a_nb_0)$

$= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_n B_0 = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(B_k - b) + b \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \to \quad ab$, denn:

$\sum_{k=0}^{n} a_k \;\to\; a$ und die erste Summe $\to 0$, denn:

$|\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(B_k - b)| \le \sum_{k=0}^{n} |a_{n-k}||B_k - b|$.

Da $B_k \to b$, existiert zu $\epsilon > 0$ ein $N \in I\!N$ mit $|B_k - b| < \epsilon \;\; \forall k > N$,
also gilt für $n > N$:

$$|\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(B_k - b)| \le \sum_{k=0}^{N} |a_{n-k}||B_k - b| + \sum_{k=N+1}^{n} |a_{n-k}||B_k - b|$$

$$\le \max_{0\le k\le N} |B_k - b| \sum_{k=0}^{N} |a_{n-k}| + \epsilon \sum_{k=N+1}^{n} |a_{n-k}|$$

$$\le K_1 \sum_{k=0}^{N} |a_{n-k}| + \epsilon \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \le \epsilon(K_1 + K_2) = \epsilon K \quad \forall n > \tilde{N}$$

(mit $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = K_2$ (wegen absoluter Konvergenz) und $\sum_{k=0}^{N} |a_{n-k}| \to 0$ (da $a_n \to 0$)).

Da $\epsilon > 0$ beliebig, folgt $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(B_k - b) \; = 0$.

Also folgt insgesamt $s_n \to ab$. Wenn man analog mit den Beträgen arbeitet, erhält man auch absolute Konvergenz.

Beispiele

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ mit $x, y \in I\!R$.
   Beide Reihen sind absolut konvergent, denn:
   $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{x^{n+1} n!}{x^n (n+1)!}| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$. Also gilt:
   $$(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!})(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}) \quad \text{(erweitern mit } n!)$$
   $$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \; .$$
   Wir werden später definieren: $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in I\!R)$.
   Also haben wir gezeigt: $\mathrm{e}^x \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}$.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, falls $|x| < 1$ (absolute Konvergenz, geometrische Reihe). Also gilt:

$$(\sum_{n=0}^{\infty} x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} x^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k}) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} x^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \quad , \text{falls } |x| < 1.$$

Also gilt:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \quad , \quad \text{falls } |x| < 1}$$

Hieraus folgt:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad , \text{falls } |x| < 1}$$

Komplexe unendliche Reihen

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ mit $z_n \in \mathbb{C}$, $z_n = x_n + iy_n$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die n-te Partialsumme w_n:

$w_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n}(x_k + iy_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + i\sum_{k=1}^{n} y_k = u_n + iv_n$. Es gilt:

w_n konvergent $\Leftrightarrow$ u_n *und* v_n konvergent. Also gilt:

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *konvergent* $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} Re(z_n)$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} Im(z_n)$ *konvergent.*

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *absolut konvergent* (dh.: $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergent) $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ist konvergent, denn:

$|x_n| = |Re(z_n)| \leq |z_n|$, $|y_n| = |Im(z_n)| \leq |z_n|$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergent.

Die *Konvergenzkriterien*, in denen der *Betrag* vorkommt, gelten analog für komplexe unendliche Reihen, also *Majoranten-, Quotienten- und Wurzelkriterium.* Ebenso gelten die Rechenregeln des Satzes 3.16, S.102 , und der Satz 3.23, S.110 (Cauchy-Produkt).

Beispiele

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist absolut konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$, denn:

   $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{z^{n+1}n!}{z^n(n+1)!}| = \frac{|z|}{n+1} \to 0 < 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + i \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *divergent*, da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent.

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ absolut konvergent, falls $|z| < 1$, denn $\sqrt[n]{|z^n|} = |z| \to |z| < 1$ für $|z| < 1$.
Also gilt (wie im Reellen):

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad , \text{ für } |z| < 1}$$

(Geometrische Reihe).

Beispiel hierzu:
$$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1+i}{2+i})^n = \frac{1}{1 - \frac{1+i}{2+i}} = \frac{2+i}{1} = 2+i \quad , \text{ da } |\frac{1+i}{2+i}| = \frac{|1+i|}{|2+i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} < 1.$$

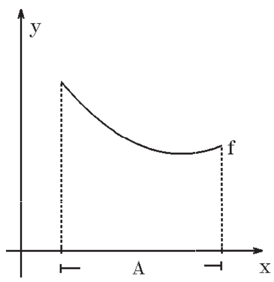
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+2in} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n^3-2in)}{n^6+4n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)n^3}{n^6+4n^2} + i \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(-2n)}{n^6+4n^2}$
konvergent, da Real- und Imaginärteilreihe konvergent.

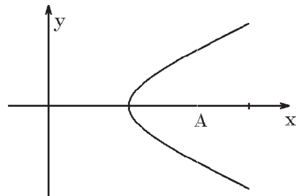
5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{(1+i)^n}$ konvergent, da $\sqrt[n]{\frac{n^3}{|1+i|^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}^3}{\sqrt{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$

IV Elementare Funktionen, Potenzreihen

Zunächst einige Definitionen über Funktionen:

Definition 4.1 : Seien A und B nichtleere Mengen.
a) $f : A \to B$ heißt *Funktion* von A nach B, wenn jedem $a \in A$ *genau* ein $b \in B$ zugeordnet wird: $f : a \in A \mapsto b \in B$.
$b = f(a)$ heißt *Funktionswert* an der Stelle a.
$\left\{\binom{a}{f(a)} \;:\; a \in A\right\}$ heißt *Graph* der Funktion f.

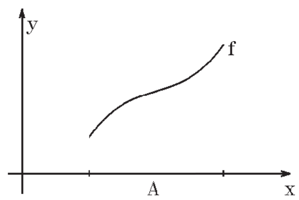




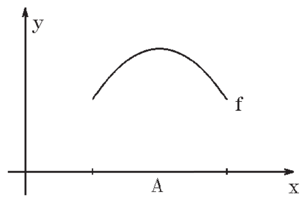
keine Funktion

A heißt *Definitionsbereich* $D(f)$,
$W(f) := f(A) = \{b \in B \;:\; \exists a \in A \text{ mit } f(a) = b\} \subset B$ heißt *Wertebereich* von f.

b) $f : A \to B$ heißt *injektiv* (eineindeutig), wenn $\forall a, b \in A$ mit
$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad a = b$.



injektiv



nicht injektiv

c) $f : A \to B$ heißt *surjektiv* (Abbildung auf), wenn $W(f) = B$.

d) $f : A \to B$ heißt *bijektiv* (eineindeutig auf), wenn f *injektiv und surjektiv.*

Definition 4.2 : Sind $f : A \to B$ und $g : W(f) \to C$ zwei Funktionen, so heißt $h : A \to C$ mit $h(a) = g(f(a)) \;\; \forall a \in A$ die aus f und g *zusammengesetzte Funktion* $h = g \circ f$.

Definition 4.3 : Ist $f : A \to B$ *bijektiv*, so existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$ mit $f^{-1} \circ f = id_A$ und $f \circ f^{-1} = id_B$ (id_A Identitätsabbildung auf A, dh.: $id_A(a) = a \;\; \forall a \in A$).

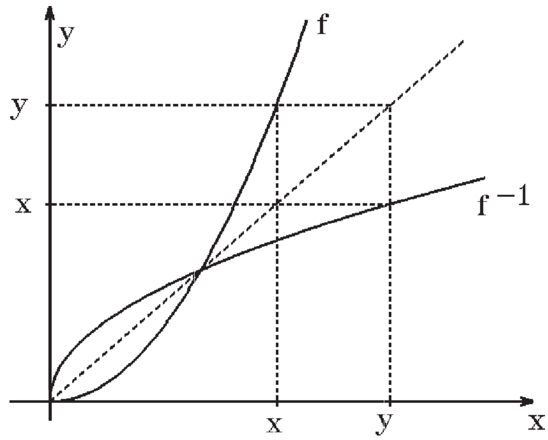
Also gilt: $\quad f^{-1}(f(a)) = a \;\; \forall a \in A \;$ und $\; f(f^{-1}(b)) = b \;\; \forall b \in B.$

Beispiel

$$\begin{array}{rcl} f : [0,\infty) & \to & [0,\infty) \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

f ist bijektiv,

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : [0,\infty) & \to & [0,\infty) \\ y & \mapsto & \sqrt{y} \end{array}$$



Den Graphen der Umkehrfunktion erhält man durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

Die Rechenvorschrift für die Umkehrfunktion erhält man durch Auflösung der Gleichung $y = f(x)$ nach x :

$y = f(x) = x^2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{y}$, (da $x \geq 0$)
$\Rightarrow \;\; f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Definition 4.4 :
a) Eine Menge A heißt *unendlich*, wenn es eine injektive Abbildung von $I\!N$ nach A gibt; sonst heißt A endlich.

b) Eine Menge A heißt *abzählbar*, wenn es eine injektive Abbildung von A nach $I\!N$ gibt (dh.: man kann die Elemente von A durchnumerieren $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$).

Beispiele

1. $G = \{2n : n \in I\!N\} \quad \Rightarrow \quad G$ ist unendlich und abzählbar, denn $f : G \to I\!N$ mit $f(2n) = n$ ist bijektiv.

2. $\mathbb{Q} = \{rationaleZahlen\} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\} \quad \Rightarrow \mathbb{Q}$ ist unendlich und *abzählbar*, denn

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{1} & \to & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \to & \frac{1}{4} \quad \cdots \\ & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\ \frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & \cdots & \\ \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\ \frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & \cdots & & & \\ \vdots & & & & & & \end{array}$$

In dieser Weise durchnumerieren $\;\Rightarrow\;$ $\mathbb{Q}^+$ ist abzählbar mit $g : I\!N \to \mathbb{Q}^+$ (bijektiv); $f : I\!N \to \mathbb{Q}$ mit $f(1) = 0, f(2n) = g(n), f(2n+1) = -g(n)$ (f bijektiv) $\;\Rightarrow\;$ $\mathbb{Q}$ ist unendlich und *abzählbar*.

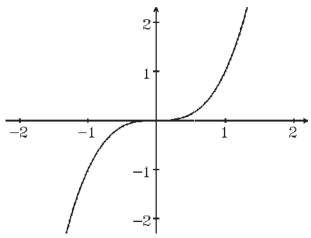
3. $I\!R$ ist *nicht abzählbar*.

Beispiele für Funktionen

1. $f : I\!R \to I\!R$ mit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad , \quad a_i \in I\!R \quad , \; a_n \neq 0$
$\Rightarrow \quad f$ *Polynom* vom grad n.

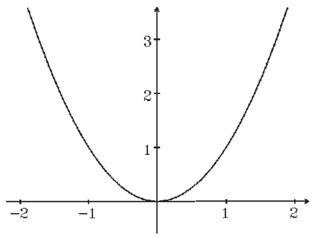
Beispiele hierzu:

a) $f(x) = x^3$



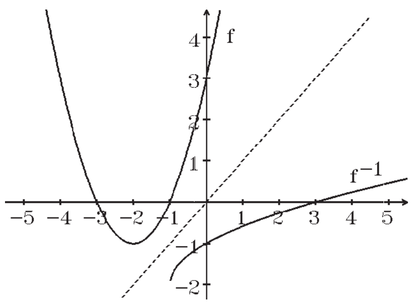
injektiv

b) $f(x) = x^2$



nicht injektiv

c) $f(x) = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1$



Parabel mit Scheitelpunkt $(-2, -1)$,

$f : [-2, \infty) \to [-1, \infty)$ (bijektiv),

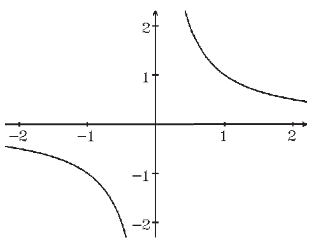
$f^{-1} : [-1, \infty) \to [-2, \infty)$

$f^{-1}(y) = -2 + \sqrt{y+1}$.

2. $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ mit $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, $q(x) = b_m x^m + \ldots + b_0$ (Polynome),
$D(f) = \{x \in I\!R : q(x) \neq 0\}$, also $f : D(f) \to I\!R$, f heißt *rationale* Funktion.

Beispiele hierzu:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (Hyperbel),



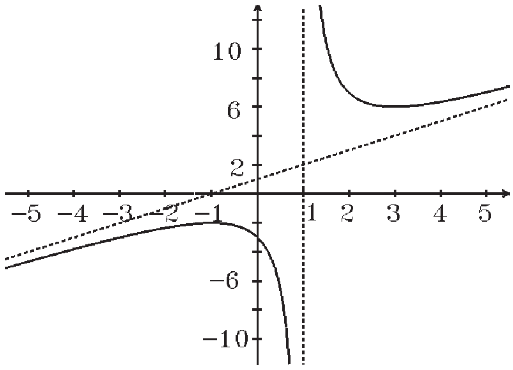
$D(f) = I\!R \backslash \{0\} = W(f)$,

$f^{-1}(y) = \dfrac{1}{y}$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$, $D(f) = I\!R \backslash \{1\}$, Polynomdivision ergibt:

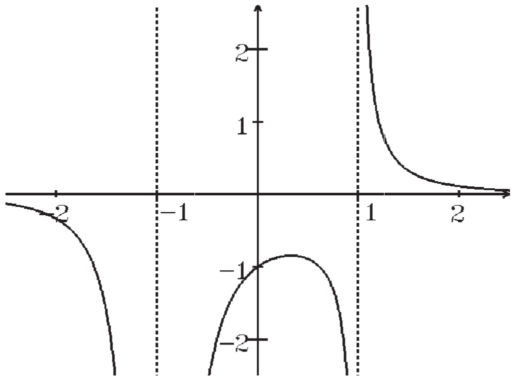
$$\begin{array}{l} x^2 + 3 : x - 1 = x + 1 + \dfrac{4}{x-1} \\ \underline{x^2 - x} \\ \quad\; x + 3 \\ \quad\; \underline{x - 1} \\ \qquad\;\; 4 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Asymptote: $g(x) = x + 1$,
einfacher Pol bei $x = 1$ (einfache Nullstelle des Nenners) $\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel an der Polstelle.



c) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2(x-1)}$

$D(f) = \mathbb{R}\backslash\{1, -1\}$,
einfacher Pol bei $x = 1$ $\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel,
doppelter Pol bei $x = -1$ $\Rightarrow$ kein Vorzeichenwechsel.



3) **Potenzreihen**

Viele in der Anwendung vorkommende Funktionen (z.B.: $\sin x$, $\ln x$, e^x) sind nicht als Polynom oder rationale Funktion darstellbar; aber sehr viele elementare Funktionen lassen sich durch eine unendliche Reihe darstellen, z.B.:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad (\forall x \in \mathbb{R}) , \quad \text{oder}$$

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots \quad (\forall x \in (0, 2]).$$

Solche Reihen heißen Potenzreihen.

Definition 4.5 : Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ (Entwicklungspunkt). Die unendliche Reihe

$$\boxed{f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n}$$

heißt *Potenzreihe* (um x_0). Für alle $x \in \mathbb{R}$, für die diese Reihe konvergent ist, ist damit eine reellwertige Funktion f definiert (Funktionswert $f(x)$ = Wert der Reihe) mit

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ konvergent } \},$$
$$f : D(f) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \text{Reihenwert} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n .$$

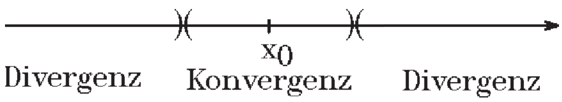
In der Anwendung ist häufig $x_0 = 0$, also $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, falls konvergent.

Beispiele

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ für alle $|x| < 1$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent, also ist f mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion ($f(x) = \mathrm{e}^x$).

Eigenschaften der Potenzreihen

Zu jeder Potenzreihe gibt es ein Intervall (um x_0) (oder ganz $\mathbb{R}$ oder nur $\{x_0\}$), so daß die Potenzreihe für alle x aus dem Innern dieses Intervalls konvergiert und für alle x außerhalb dieses Intervalls divergiert. An den Intervallgrenzen kann Konvergenz oder Divergenz vorliegen.



Satz 4.6 : Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe (um x_0). Dann existiert eindeutig ein r mit $0 \leq r \leq \infty$, so daß gilt:
$\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < r$ *konvergiert* die Reihe absolut,
$\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > r$ *divergiert* die Reihe.
Im Falle $r = 0$ konvergiert die Reihe nur für $x = x_0$.
Im Falle $r = \infty$ konvergiert die Reihe für $\forall x \in \mathbb{R}$ absolut.
r heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

Beweis :
Ich möchte den Beweis nur für den Fall durchführen, daß $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = K$ mit $0 \leq K \leq \infty$ existiert (in der Anwendung häufig der Fall).
Benutzung des Quotientenkriteriums ergibt:
$$|\frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{a_n (x - x_0)^n}| = |\frac{a_{n+1}}{a_n}||x - x_0| \to K|x - x_0| \text{ für } n \to \infty .$$

Falls $K|x-x_0| < 1 \quad \Rightarrow$ Konvergenz, falls $K|x-x_0| > 1 \quad \Rightarrow$ Divergenz; ist $K|x-x_0| = 1$, so kann Konvergenz oder Divergenz vorliegen. Also gilt mit

$$r = \begin{cases} \dfrac{1}{K} & \text{,falls } 0 < K < \infty \\ 0 & \text{,falls } K = \infty \\ \infty & \text{,falls } K = 0 \end{cases}$$

falls $|x-x_0| < r \quad \Rightarrow$ Konvergenz; falls $|x-x_0| > r \quad \Rightarrow$ Divergenz; ist $|x-x_0| = r$ (Rand des Intervalls), so kann Konvergenz oder Divergenz vorliegen.

Analog läßt sich das Wurzelkriterium benutzen, falls $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = K$, denn dann gilt $\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} \to K|x-x_0|$.

Beispiele

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \quad \sqrt[n]{|x^n|} = |x| \to |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad r = 1 \; .$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \quad \left|\frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)!}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1 \quad \Rightarrow \quad r = \infty \; .$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n \quad , \quad \left|\frac{(x-1)^{n+1}n}{(x-1)^n(n+1)}\right| = \frac{n}{n+1}|x-1| \to |x-1| < 1 \quad \Rightarrow \quad r = 1$

$\Rightarrow$ konvergent für $|x-1| < 1$, also für $0 < x < 2$,
divergent für $|x-1| > 1$, also für $x < 0$ oder $x > 2$.

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-1)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent,

$x = 2 \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergent (nach Leibniz- Kriterium).

Rechenregeln für Potenzreihen

Satz 4.7 : Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ mit Konvergenzradius r_1 und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ mit Konvergenzradius r_2, dann gilt:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$ mit Konvergenzradius $r \geq \min\{r_1, r_2\}$

b) $\displaystyle c\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} ca_n(x-x_0)^n$, $(c \in \mathbb{R})$, mit Konvergenzradius $r \geq r_1$

c) $\displaystyle(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big)(x-x_0)^n$ mit Konvergenzradius $r \geq \min\{r_1, r_2\}$.

Beweis : a)und b) folgen aus Satz 3.16 b), S.102 .

c) Potenzreihen sind im Innern des Konvergenzintervalls absolut konvergent (siehe Beweis zu Satz 4.6), also gilt mit dem Cauchy-Produkt

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k b_{n-k}(x-x_0)^{n-k}\Big)$$

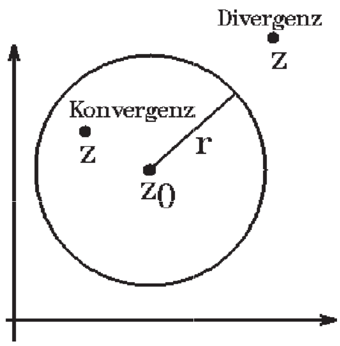
$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big)(x-x_0)^n$, also folgt die Behauptung aus Satz 3.23, S.110 .

Komplexe Potenzreihen

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}$$

mit $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$,

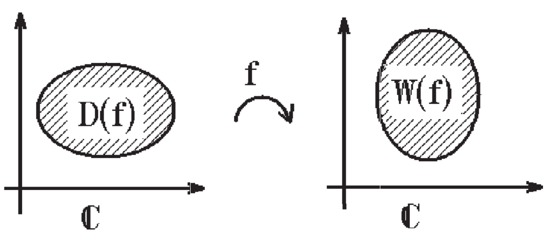
$D(f) = \{z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergent $\}$, also
$f : D(f) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplexwertige Funktion.
Satz 4.6 und Satz 4.7 gelten analog:
Konvergenzbereich $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r\}$,
r ist der *Konvergenzradius*.
Für z aus dem Innern des Kreises $\Rightarrow$ Konvergenz.
Für z außerhalb des Kreises $\Rightarrow$ Divergenz.



Beispiele

1. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ für $|z| < 1$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist (absolut) konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$, denn
   $|\frac{z^{n+1} n!}{z^n (n+1)!}| = \frac{|z|}{n+1} \to 0 < 1 \quad \Rightarrow \quad r = \infty$.

Eine komplexwertige Funktion $f : D(f) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kann sinnvollerweise nur in der Form: "Urbildebene $\to$ Bildebene" dargestellt werden.



4) Elementare Funktionen

a) Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion

Definition 4.8 : Die Funktion $f : I\!R \to I\!R$ mit

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

heißt *Exponentialfunktion oder e-Funktion.*

Schreibweise: $\mathrm{e}^x := f(x)$.
Definitionsbereich: $D(f) = I\!R$ (da Konvergenzradius $r = \infty$).

Eigenschaften:

Da $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$ (vgl.Beispiel 1, S.111), gilt $\forall x, y \in I\!R$ die *Funktionalgleichung*:

$$\boxed{\mathrm{e}^x \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}}$$

Da $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$, folgt:

$$\boxed{\mathrm{e}^x > 1 \quad \forall x > 0}$$

und für $k \in I\!N$ folgt $\mathrm{e}^x > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$, also $\frac{\mathrm{e}^x}{x^k} > \frac{x}{(k+1)!} \to \infty$ für $x \to \infty$,
also gilt: $\mathrm{e}^x \to \infty$ für $x \to \infty$, und zwar:

$$\boxed{\mathrm{e}^x \text{ geht stärker gegen } \infty \text{ als jede Potenz } x^k \quad , \quad k \in I\!N}$$

Weiter gilt:

$$\boxed{\mathrm{e}^0 = 1 \quad , \quad \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} \quad , \quad \mathrm{e}^x > 0 \ \ \forall x \in I\!R}$$

denn: $\mathrm{e}^{-x+x} = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^x = 1$,
da $\mathrm{e}^x > 1 \ \ \forall x > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^x = \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}} > 0 \quad \forall x < 0.$

$$\boxed{\mathrm{e}^x \text{ ist streng monoton wachsend}}$$

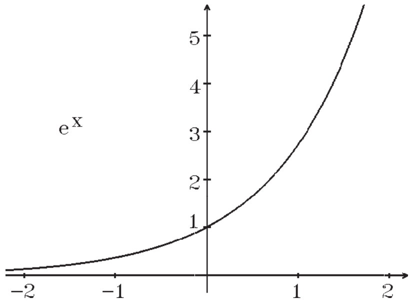
dh.: $\forall x_1, x_2 \in I\!R$ mit $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{x_1} < \mathrm{e}^{x_2}$
denn: $\mathrm{e}^{x_2} = \mathrm{e}^{x_2 - x_1 + x_1} = \mathrm{e}^{x_2 - x_1}\mathrm{e}^{x_1} > \mathrm{e}^{x_1}$, weil $\mathrm{e}^{x_2 - x_1} > 1$ wegen $x_2 - x_1 > 0$.

Da e^x streng monoton $\Rightarrow$ e^x ist *injektiv.*

Da $\mathrm{e}^x \to \infty$ für $x \to \infty$ und $\mathrm{e}^x = \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}} \to 0$ für $x \to -\infty$ und e^x stetig in $I\!R$ (später) $\Rightarrow$ $W(f) = (0, \infty)$, für f mit $f(x) = \mathrm{e}^x$, also

$f : I\!R \to (0, \infty)$ ist *bijektiv.*

Graph der e-Funktion



Berechnung der Funktionswerte e^x

Da $\quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{x^n}{n!} + R \;$, gilt für $|x| \le 1$

$|\frac{x^{n+1} n!}{x^n (n+1)!}| = \frac{|x|}{(n+1)} \le \frac{1}{n_0 + 1} = q \;\; \forall n \ge n_0 \;\;, \quad \frac{q}{1-q} = \frac{\frac{1}{n_0+1}}{1 - \frac{1}{n_0+1}} = \frac{1}{n_0}$, also

$|R| \le \frac{|x|^{n_0}}{n_0!} \cdot \frac{1}{n_0} \le \frac{1}{n_0! n_0} < 10^{-12} \quad \Rightarrow \quad n_0 = 14.$ Also gilt für $|x| \le 1$:

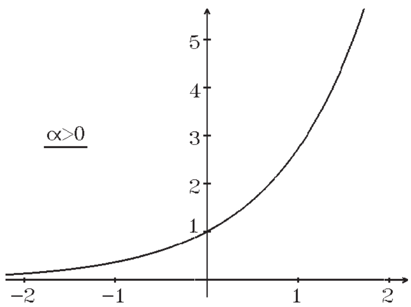
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{14}}{14!} + R \;$ mit $\; |R| < 10^{-12}.$

Numerisch wird diese Summe folgendermaßen ausgewertet:

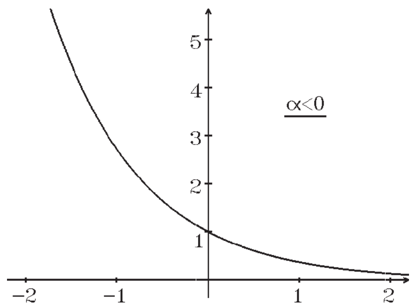
$e^x = (\ldots ((((\frac{x}{14} + 1)\frac{x}{13} + 1)\frac{x}{12} + 1)\frac{x}{11} + 1) \ldots + 1)\frac{x}{1} + 1 \quad + R \; .$

Für $|x| > 1$ wird die Funktionalgleichung benutzt, z.B.:
$e^{10.4} = e^{10} e^{0.4} \quad (e^n = e^{n-1} e$ benutzen).

Graph von $e^{\alpha x}$ für $\alpha > 0$



Graph von $e^{\alpha x}$ für $\alpha < 0$



Da für f mit $f(x) = e^x$ gilt: $\quad f : I\!R \to (0, \infty)$ bijektiv, existiert die *Umkehrfunktion* $f^{-1} : (0, \infty) \to I\!R$ mit $f^{-1}(f(x)) = x \;\; \forall x \in I\!R$ und $f(f^{-1}(y)) = y \;\; \forall y \in (0, \infty)$.

Definition 4.9 : Die Umkehrfunktion der e-Funktion heißt (natürliche) *Logarithmus-Funktion.*

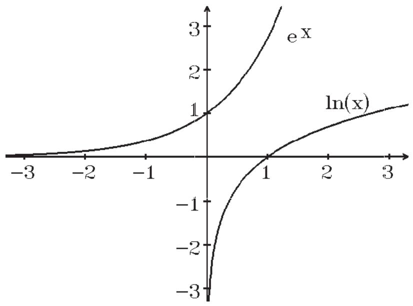
Logarithmus-Funktion

Schreibweise: $\ln x := f^{-1}(x)$,
$\ln : (0, \infty) \to I\!R$.

Es gilt (da Umkehrfunktion von e^x)

$$\boxed{\ln(\mathrm{e}^x) = x \quad \forall x \in I\!R \quad , \quad \mathrm{e}^{\ln x} = x \quad \forall x > 0}$$

Graph der ln-*Funktion*



Eigenschaften

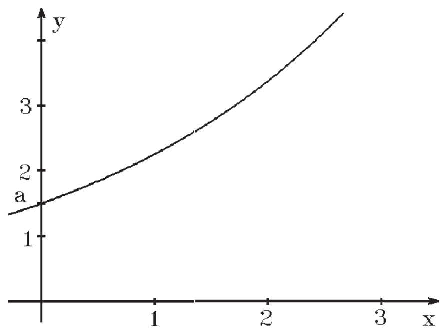
$$\boxed{\begin{array}{l} \ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \forall x, y > 0 \\ \ln \dfrac{1}{x} = -\ln x \quad \forall x > 0 \\ \ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y \quad \forall x, y > 0 \\ \ln 1 = 0 \quad (\textit{einzige Nullstelle}) \\ \ln \quad \textit{ist streng monoton wachsend} \\ \ln(x^y) = y \ln x \quad \forall x > 0, y \in I\!R \end{array}}$$

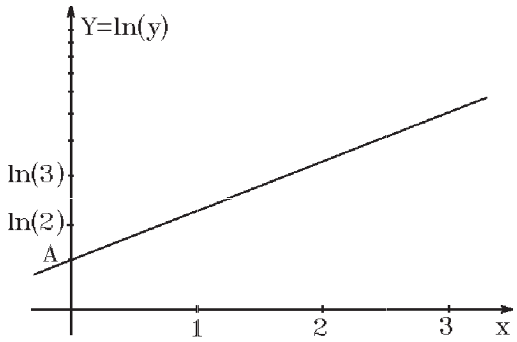
Beweis : Sei $a = \ln x$, $b = \ln y \;\Rightarrow\; \mathrm{e}^a = x$, $\mathrm{e}^b = y \;\Rightarrow$
$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b = xy \;\Rightarrow\; \ln(\mathrm{e}^{a+b}) = \ln(xy) \;\Rightarrow\; a + b = \ln(xy) \;\Rightarrow\; \ln x + \ln y = \ln(xy)$.
$\ln \frac{1}{x} + \ln x = \ln(\frac{1}{x} \cdot x) = \ln 1 = 0$ (da $\mathrm{e}^0 = 1$) $\Rightarrow\; \ln \frac{1}{x} = -\ln x$.
$\ln \frac{x}{y} = \ln(x \cdot \frac{1}{y}) = \ln x + \ln \frac{1}{y} = \ln x - \ln y$. $\ln 1 = 0$, da $\mathrm{e}^0 = 1$.
Da die e-Funktion streng monoton wachsend $\Rightarrow$ (nach folgendem Hilfssatz 4.10) die ln-Funktion ist auch streng monoton wachsend.
Eigenschaft $\ln(x^y) = y \ln x$ zeigen wir später.

Hilfssatz 4.10 : Sei $f : I_1 \subset I\!R \to I_2 \subset I\!R$ bijektiv und *streng monoton wachsend (bzw. fallend)* $\Rightarrow$ $f^{-1} : I_2 \to I_1$ ist ebenfalls *streng monoton wachsend (bzw. fallend)*.

Beweis :
Annahme: Für ein $y_1 < y_2$ gelte $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \;\Rightarrow\; f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$ (da f streng monoton wachsend) $\Rightarrow\; y_1 \geq y_2$ Widerspruch.

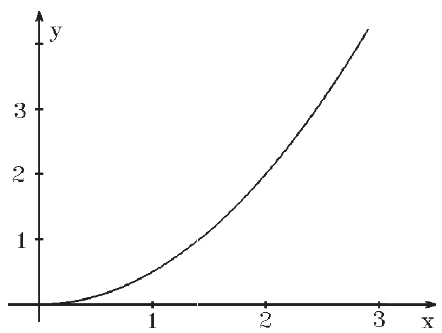
1. $y = aq^x \;\Rightarrow\; \ln y = \ln a + x \ln q$, mit $Y = \ln y$, $A = \ln a$, $B = \ln q \;\Rightarrow$ $Y = A + Bx$ (Gerade).

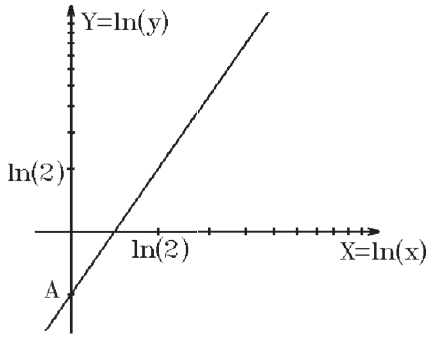




Hochachse: logarithmische Einteilung

2. $y = ax^n \;\Rightarrow\; \ln y = \ln a + n \ln x$, mit $Y = \ln y$, $A = \ln a$, $X = \ln x \;\Rightarrow$ $Y = A + nX$ (Gerade).





beide Achsen: logarithmische Einteilung

Komplexe e-Funktion

Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ auch für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, definiert

$$\boxed{e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte komplexwertige Funktion: die *komplexe* e-*Funktion*.
Genau wie im Reellen gilt $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ die Funktionalgleichung:

$$\boxed{e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}}$$

Insbesonder gilt $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos x + i \sin x \quad \text{(später).} \end{aligned}$$

Also gilt $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

Weiter gilt: $|e^{ix}| = 1$, da $\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{ix}$ liegt auf dem Einheitskreis.
Für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt:
$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = (e^x \cos y) + i(e^x \sin y)$.
Da $|e^z| = e^x > 0$ (da $|e^{iy}| = 1$) $\Rightarrow \quad e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
$e^{z+i2k\pi} = e^{x+i(y+2k\pi)} = e^x(\cos(y+2k\pi) + i \sin(y+2k\pi)) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$
(da cos und sin 2π-periodisch). Also gilt:
$e^{z+i2k\pi} = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, also ist e^z 2π-periodisch bzg. des Imaginärteils von z.

Exponentialfunktion zur Basis a

Definition 4.11 : Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ fest gewählte Basis. Dann heißt die Funktion $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ mit

$$\boxed{f(x) := a^x := e^{x \ln a}}$$

Exponentialfunktion zur Basis a.
Es gilt $\quad a^x = e^{x \ln a} = e^{\ln(a^x)} = a^x$ (später).

Die *Umkehrfunktion* heißt *Logarithmus zur Basis a*,
$f^{-1} :={}^a \log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $(a \neq 1, a > 0)$.

Es gilt:

$$\boxed{a^{{}^a \log x} = x \quad \forall x > 0 \quad , \quad {}^a \log(a^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Eigenschaften:

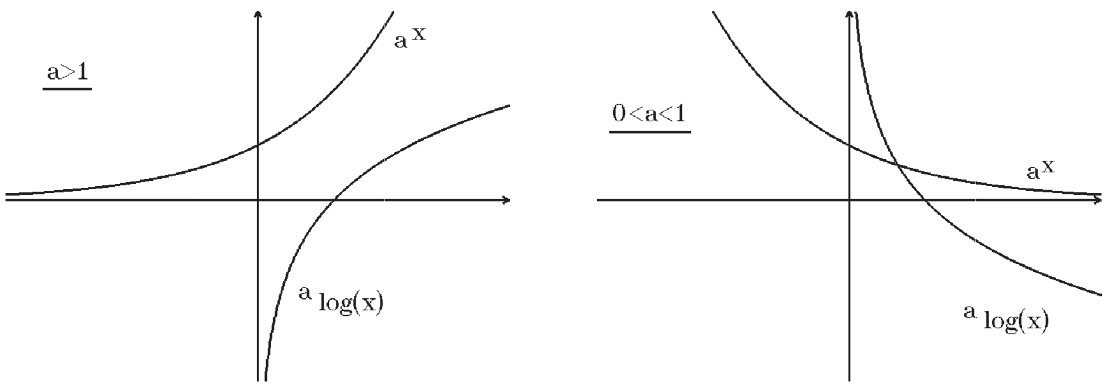
$$\boxed{\begin{aligned} & a^{x+y} = a^x a^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \\ & (a^x)^y = a^{xy} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \\ & {}^a \log(xy) = {}^a \log x + {}^a \log y \quad \forall x, y > 0 \\ & {}^a \log(x^y) = y({}^a \log x) \quad \forall x > 0, y \in \mathbb{R} \\ & a^0 = 1 \quad , \quad {}^a \log 1 = 0 \\ & {}^a \log x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \forall x, a > 0, a \neq 1 \end{aligned}}$$

Beweis : Wir zeigen zunächst die letzte Eigenschaft:
Da $a^{{}^a\log x} = x$ und $a^{{}^a\log x} = \mathrm{e}^{(\ln a)({}^a\log x)}$ (Def. von $a^y = \mathrm{e}^{y\ln a}$) $\Rightarrow$
$a^{{}^a\log x} = \mathrm{e}^{(\ln a)({}^a\log x)} = x \quad \Rightarrow$ (logarithmieren) $(\ln a)({}^a\log x) = \ln x \quad \Rightarrow$
${}^a\log x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.
Nun können wir auch zeigen: $\ln(x^y) = y\ln x$ (vgl. Eigenschaft der ln-Funktion),
denn: $\quad \ln(x^y) = \ln(\mathrm{e}^{y\ln x}) = y\ln x$.
Hieraus folgt: ${}^a\log(x^y) = \dfrac{\ln(x^y)}{\ln a} = \dfrac{y\ln x}{\ln a} = y({}^a\log x)$.
Weiter gilt: ${}^a\log(xy) = \dfrac{\ln(xy)}{\ln a} = \dfrac{\ln x}{\ln a} + \dfrac{\ln y}{\ln a} = {}^a\log x + {}^a\log y$.
$a^{x+y} = \mathrm{e}^{(x+y)\ln a} = \mathrm{e}^{x\ln a + y\ln a} = \mathrm{e}^{x\ln a}\mathrm{e}^{y\ln a} = a^x a^y$,
$(a^x)^y = \mathrm{e}^{y\ln(a^x)} = \mathrm{e}^{xy\ln a} = a^{xy}$,
$a^0 = \mathrm{e}^{0\ln a} = 1 \quad \Rightarrow \quad {}^a\log 1 = 0.$

Es gilt:

a^x ist *streng monoton wachsend für* $a > 1$ und *streng monoton fallend für* $0 < a < 1$.
${}^a\log x$ ist *streng monoton wachsend für* $a > 1$ und *streng monoton fallend für* $0 < a < 1$.

Denn: $a > 1 \;\Rightarrow\; \ln a > 0 \;\Rightarrow\; a^x = \mathrm{e}^{(\ln a)x}$ ist streng monoton wachsend;
$0 < a < 1 \;\Rightarrow\; \ln a < 0 \;\Rightarrow\; a^x = \mathrm{e}^{(\ln a)x}$ ist streng monoton fallend.
Da ${}^a\log x$ die Umkehrfunktion von a^x ist, folgen diese Eigenschaften für ${}^a\log x$ aus Hilfssatz 4.10.



b) **Trigonometrische Funktionen**

Definition 4.12 : Die durch

$$\boxed{\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad , \quad \cos x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen heißen *trigonometrische sin- bzw. cos-Funktion.*

Beide Reihen konvergieren für alle $x \in \mathbb{R}$, denn:

$$\left|\frac{x^{2(n+1)+1}(2n+1)!}{x^{2n+1}(2(n+1)+1)!}\right| = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} \to 0 < 1 \quad (\text{für } n \to \infty).$$

Da $\quad \cos(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(-x)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \cos x \quad$ und

$$\sin(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(-x)^{2n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = -\sin x,$$

gilt also $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos(-x) = \cos x & (gerade Funktion) \\ \sin(-x) = -\sin x & (ungerade Funktion) \end{array}}$$

Wie bei der komplexen e-Funktion gezeigt wurde, gilt $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

Hieraus folgt:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \cos x = Re(\mathrm{e}^{ix}) & , & \sin x = Im(\mathrm{e}^{ix}) \\ \cos x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}) & , & \sin x = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}) \end{array}}$$

Denn: $\mathrm{e}^{-ix} = \mathrm{e}^{i(-x)} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i \sin x = \overline{\mathrm{e}^{ix}}$ und $\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = Re(z)$, $\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = Im(z)$.

Da $\quad \mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x$ und $(\mathrm{e}^{ix})^n = \mathrm{e}^{inx} \quad \Rightarrow$

$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$ und $z^n = (|z|\mathrm{e}^{i\varphi})^n = |z|^n \mathrm{e}^{in\varphi}$ (vgl. Satz 1.37, S.20 (komplexe Zahlen)).

Weitere Eigenschaften der trigonometrischen sin- und cos-Funktion

$$\boxed{\begin{array}{ll}
a) & \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\
b) & \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
 & \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
 & (Additionstheoreme) \\
c) & |\sin x| \le 1 \quad , \quad |\cos x| \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
d) & \cos\frac{\pi}{2} = 0 \ , \ \sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad mit \ \ 0 < \frac{\pi}{2} < \sqrt{6} \\
 & (Existenz\ einer\ Nullstelle\ in\ (0, \sqrt{6})) \\
e) & \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \quad , \quad \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x \\
 & (cos - \ und\ sin - Funktion\ sind\ um\ \frac{\pi}{2}\ phasenverschoben)
\end{array}}$$

$f)$	$\sin(x+2k\pi) = \sin x \quad , \quad \cos(x+2k\pi) = \cos x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ $(2\pi - periodisch)$	
$g)$	$\cos(\frac{\pi}{2}+k\pi) = 0 \quad , \quad \sin(k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (Nullstellen)$	
$h)$	$\cos(k\pi) = (-1)^k \quad , \quad \sin(\frac{\pi}{2}+k\pi) = (-1)^k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$	
$i)$	$\sin(2x) = 2\sin x \cos x \quad , \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$	
$j)$	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)) \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$	

Beweis :
a) $\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{1}{4}(e^{ix}+e^{-ix})^2 + \frac{1}{4i^2}(e^{ix}-e^{-ix})^2$
$= \frac{1}{4}(e^{2ix}+2+e^{-2ix}-e^{2ix}+2-e^{-2ix}) = 1.$

b) $\sin(x+y) = Im(e^{i(x+y)}) = Im(e^{ix}e^{iy}) = Im((\cos x + i\sin x)(\cos y + i \sin y))$
$= \sin x \cos y + \cos x \sin y$,
$\cos(x+y) = Re(e^{i(x+y)}) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

c) $|\sin x| \leq 1$ und $|\cos x| \leq 1$, da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

d) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad \Rightarrow \quad \cos\sqrt{6} = 1 - \frac{6}{2} + \frac{36}{24} + R$ mit $|R| \leq \frac{\sqrt{6}^6}{6!} = \frac{3}{10}$,
(da alternierende Reihe)
$\Rightarrow \quad \cos\sqrt{6} = -0.5 + R$ mit $|R| \leq 0.3 \quad \Rightarrow \quad \cos\sqrt{6} < 0.$
Da $\cos 0 = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists x_0 \in (0,\sqrt{6})$ mit $\cos x_0 = 0$ (nach dem Zwischenwertsatz, da cos-Funktion stetig (später)).

$x_0 = \frac{\pi}{2}$ sei die kleinste positive Nullstelle von $\cos x$.

Damit haben wir die Zahl π definiert.

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = x(1-\frac{x^2}{2\cdot 3}) + \frac{x^5}{5!}(1-\frac{x^2}{6\cdot 7}) + \ldots > (x+\frac{x^5}{5!}+\ldots)(1-\frac{x^2}{2\cdot 3}) > 0$ für $x > 0$ und $x^2 < 6$
$\Rightarrow \quad \sin x > 0 \;\; \forall x \in (0,\sqrt{6}) \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{\pi}{2} = +\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{2}} = +1 \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1.$

e) $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \sin x \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \sin\frac{\pi}{2} = \cos x$,
$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} - \sin x \sin\frac{\pi}{2} = -\sin x$.

f) $\sin(x+\pi) = \sin((x+\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}) = \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$, $\sin(x+2\pi) = \sin((x+\pi)+\pi)$
$= -\sin(x+\pi) = \sin x$.
Analog für cos .

g) $\sin 0 = 0$, da $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots = 0$ für $x = 0$,
$\sin\pi = \sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin(-\pi) = -\sin\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(k\pi) = 0$, da 2π-periodisch.
$\cos(\frac{\pi}{2}+k\pi) = -\sin(k\pi) = 0.$

h) $\sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = 1$, $\sin\frac{3\pi}{2} = \sin(\pi+\frac{\pi}{2}) = \cos\pi = \cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})$
$= -\sin\frac{\pi}{2} = -1$
$\Rightarrow \quad \sin(\frac{3\pi}{2}+2k\pi) = \sin(\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi) = -1 \quad \Rightarrow \quad \sin(\frac{\pi}{2}+l\pi) = (-1)^l,$
$\cos(k\pi) = \sin(k\pi+\frac{\pi}{2}) = (-1)^k.$

i) $\sin(2x) = Im(\mathrm{e}^{2ix}) = Im(\mathrm{e}^{ix})^2 = Im(\cos x + i\sin x)^2$
$= Im(\cos^2 x + 2i\sin x\cos x - \sin^2 x) = 2\sin x\cos x$,
$\cos(2x) = Re(\mathrm{e}^{2ix}) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

j) $\sin^2 x = \frac{-1}{4}(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix})^2 = \frac{-1}{4}(\mathrm{e}^{2ix} - 2 + \mathrm{e}^{-2ix}) = \frac{1}{4}(2 - 2\cos(2x)) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$,
$\cos^2 x = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2ix} + 2 + \mathrm{e}^{-2ix}) = \frac{1}{4}(2 + 2\cos(2x)) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$.

Allgemein kann man:
a) $\sin(nx)$ und $\cos(nx)$ durch eine Summe von Produkten aus $\cos x$ und $\sin x$ audrücken,
b) $\sin^n x$ und $\cos^n x$ durch eine Summe von $\sin(kx)$ und $\cos(kx)$ ausdrücken.

Beispiel

$\sin(3x) = Im(\cos x + i\sin x)^3 = Im(\cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x)$
$= 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x$,
$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$.

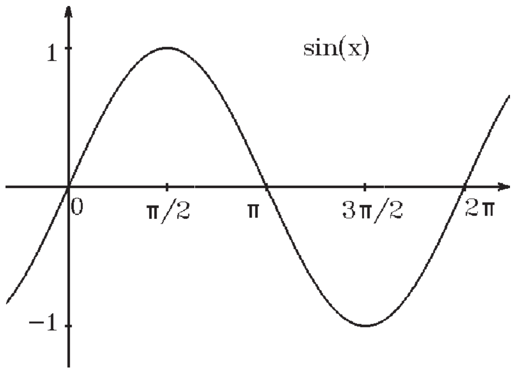
$$\sin^3 x = \frac{1}{8i^3}(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix})^3 = \frac{-1}{8i}(\mathrm{e}^{3ix} - 3\mathrm{e}^{ix} + 3\mathrm{e}^{-ix} - \mathrm{e}^{-3ix})$$
$$= \frac{-1}{8i}((\mathrm{e}^{3ix} - \mathrm{e}^{-3ix}) - 3(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix})) = \frac{-1}{8i}(2i\sin(3x) - 3\cdot 2i\sin x) = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin(3x)),$$
$$\cos^3 x = \frac{1}{8}(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})^3 = \frac{1}{8}(\mathrm{e}^{3ix} + 3\mathrm{e}^{ix} + 3\mathrm{e}^{-ix} + \mathrm{e}^{-3ix})$$
$$= \frac{1}{8}((\mathrm{e}^{3ix} + \mathrm{e}^{-3ix}) + 3(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})) = \frac{1}{8}(2\cos(3x) + 3\cdot 2\cos x) = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos(3x)).$$

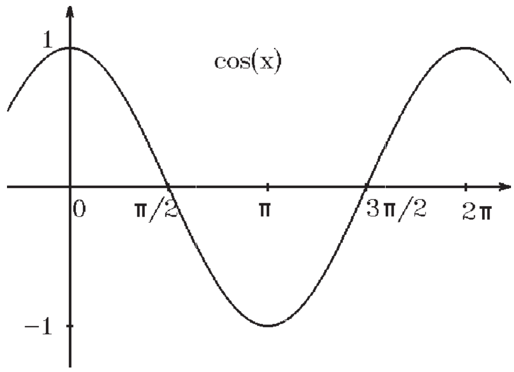
Häufig kann man auch folgende Additions-Theoreme benutzen

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x\cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \\ \sin x\sin y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \sin x\cos y &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)) \end{aligned}}$$

Denn:
$\cos(x-y) + \cos(x+y) = (\cos x\cos y + \sin x\sin y) + (\cos x\cos y - \sin x\sin y) = 2\cos x\cos y$
(analog die anderen Additions-Theoreme).

Graphen der cos- und sin-Funktion





Es gelten folgende spezielle Werte:

Bogenmaß	sin	cos	tan	cot
0	0	1	0	-
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	-	0

Denn z.B.:
$\cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4} = 1$,
$\cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$
$\Rightarrow \quad \cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Berechnung von $\sin x$ *für* $0 < x < \frac{\pi}{4}$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R \ \text{ mit } \quad |R| \le \frac{x^{2n_0+3}}{(2n_0+3)!} < \frac{1}{(2n_0+3)!} < 10^{-12}$$

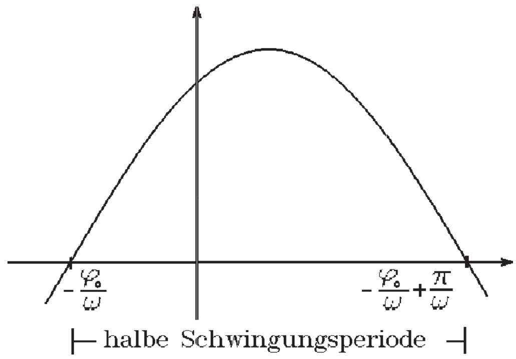
(da alternierende Reihe) $\Rightarrow \quad n_0 = 6 \quad \Rightarrow$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^{13}}{13!} + R \ \text{ mit } \ |R| < 10^{-12},$$

$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ für $0 < x < \frac{\pi}{4}$,
$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ für $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$.
Alle anderen Werte erhält man mit Hilfe der Periodizität.

Allgemeine sin-*Schwingung*

$$\boxed{f(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)}$$



A Amplitude,
ω Frequenz,
φ_0 Phasenverschiebung.

Nullstellen: $\omega t_k + \varphi_0 = k\pi$

$\Rightarrow \quad t_k = \dfrac{k\pi - \varphi_0}{\omega}$,

$t_0 = -\dfrac{\varphi_0}{\omega}$, $t_1 = -\dfrac{\varphi_0}{\omega} + \dfrac{\pi}{\omega}$.

Schwingungsdauer: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

tan- und cot-Funktionen

Definition 4.13 : Die durch

$$\boxed{\begin{array}{l} \tan x := \dfrac{\sin x}{\cos x} \quad , \; falls\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \cot x := \dfrac{\cos x}{\sin x} \quad , \; falls\ x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{array}}$$

definierten Funktionen heißen tan- *bzw.* cot-*Funktion.*
$D(\tan) = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\}$, $D(\cot) = \mathbb{R}\backslash\{k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\}$.

Eigenschaften

$$\boxed{\begin{array}{l} \tan(x+\pi) = \tan x \quad , \quad \cot(x+\pi) = \cot x \quad (\pi - periodisch) \\ \tan(x+\dfrac{\pi}{2}) = -\cot x \quad , \quad \cot(x+\dfrac{\pi}{2}) = -\tan x \\ \tan(-x) = -\tan x \quad , \quad \cot(-x) = -\cot x \quad (ungerade\ Funktionen) \\ \tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \quad , \quad \cot(x+y) = \dfrac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y} \end{array}}$$

Beweis : Alle Eigenschaften folgen sofort aus den entsprechenden Eigenschaften der sin- und cos-Funktion.

Z.B.: $\tan(x+\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(x+\frac{\pi}{2})}{\cos(x+\frac{\pi}{2})} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x$,

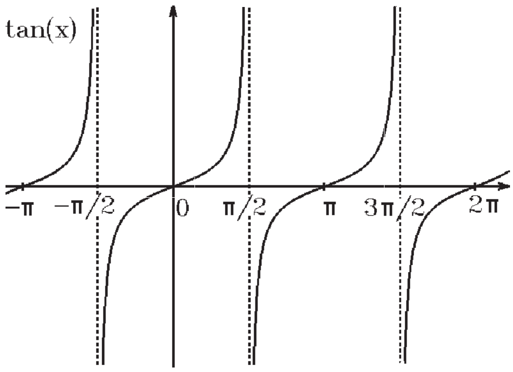
$\tan(x+\pi) = -\cot(x+\frac{\pi}{2}) = \tan x$,

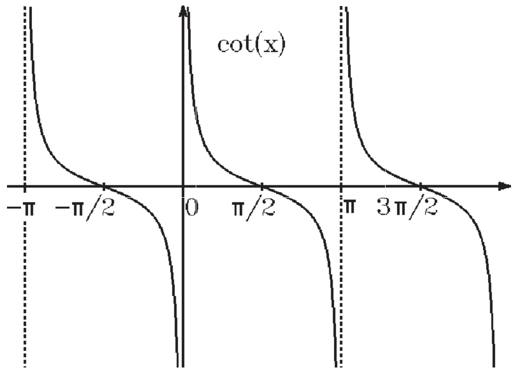
$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$,

$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$

$$= \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{1 - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \ .$$

Graphen der tan- *und* cot-*Funktion*





Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

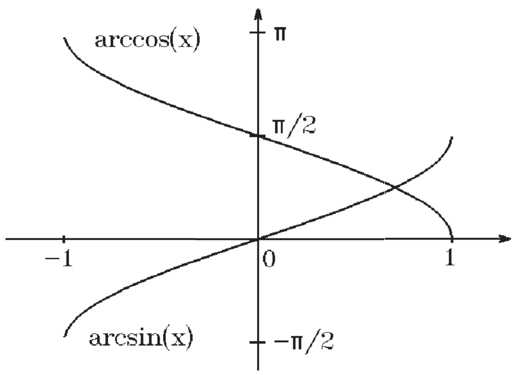
Da die trigonometrischen Funktionen nicht injektiv sind, existieren die Umkehrfunktionen nicht global, sondern nur lokal. Man muß sich jeweils auf Intervalle beschränken, auf denen die Funktionen streng monoton sind. Es ist üblich, die folgenden Intervalle zu wählen (die entsprechenden Umkehrfunktionen heißen dann *Hauptwerte*) :

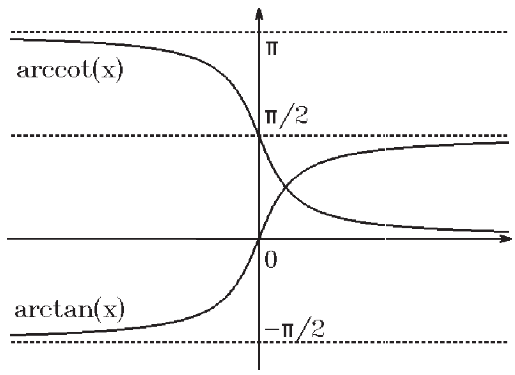
$\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$, $\sin : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$,
$\tan : (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to I\!R$, $\cot : (0,\pi) \to I\!R$.

Definition 4.14 : *Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen (Hauptwerte)*

$$\boxed{\begin{aligned} \arccos &: [-1,1] \to [0,\pi] \\ \arcsin &: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ \arctan &: I\!R \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \\ \mathrm{arccot} &: I\!R \to (0,\pi) \end{aligned}}$$

Graphen der trigonometrischen Umkehrfunktionen





Bemerkung

Ist $z = x + iy = |z|e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$, so gilt für $x \neq 0$: $\frac{y}{x} = \tan\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$. Da $\arctan x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, erhält man nur Winkel im 1. und 4.Quadranten. Liegt z im 2. oder 3.Quadranten, so muß der tan-Ast zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ umgekehrt werden. Da $\tan(x+\pi) = \tan x$, gilt dann $\varphi = \pi + \arctan\frac{y}{x}$, falls z im 2. oder 3.Quadranten liegt. Also gilt:

$z = x + iy$ mit $x > 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$,

$z = x + iy$ mit $x < 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pi + \arctan\frac{y}{x}$.

Bemerkung

Bei den meisten Programmiersprachen kann man nur die Funktion arctan benutzen. Alle anderen arc-Funktionen lassen sich aber durch den arctan ausdrücken, z.B.:

$$\boxed{\arcsin x = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad |x| < 1}$$

Denn:

$\arcsin x = a \;\Rightarrow\; x = \sin a \;\Rightarrow\; |\cos a| = \sqrt{1-x^2}$,

da $\quad \arcsin x = a \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \;\Rightarrow\; \cos a \geq 0 \;\Rightarrow\; \cos a = \sqrt{1-x^2} \;\Rightarrow$

$$\tan a = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \;\Rightarrow\; \arcsin x = a = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \;.$$

Es gilt (Beweis: Übungsaufgabe):

$$\boxed{\arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x \quad (x > 0)}$$

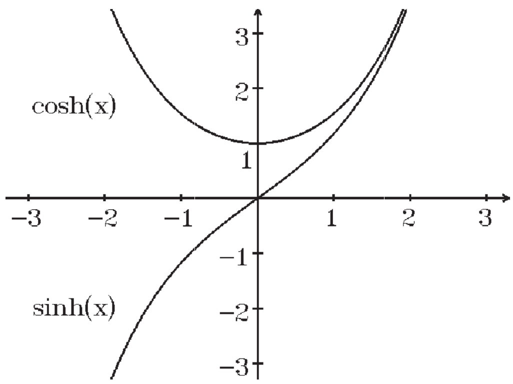
c) **Hyperbolische Funktionen**

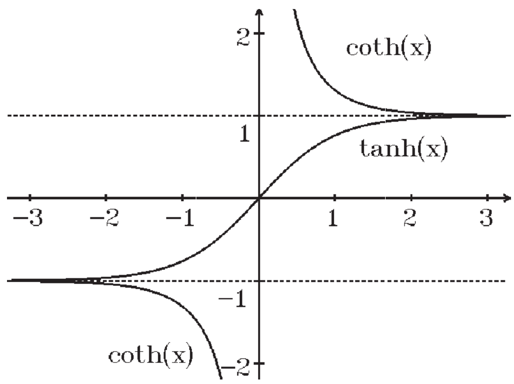
Definition 4.15 : Die für alle $x \in I\!R$ definierten Funktionen

$$\boxed{\begin{array}{l} \sinh x := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) \quad , \quad \cosh x := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \\ \tanh x := \dfrac{\sinh x}{\cosh x} \quad , \quad \coth x := \dfrac{\cosh x}{\sinh x} \quad (x \neq 0) \end{array}}$$

heißen *hyperbolische Funktionen* (sinus-hyperbolicus, usw.).

Graphen der hyperbolischen Funktionen





Eigenschaften

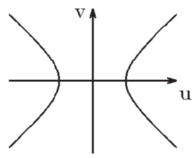
$$\boxed{\begin{array}{l} \sinh x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad , \quad \cosh x \geq 1 \\ \cosh(-x) = \cosh x \quad (gerade\ Funktion) \\ \sinh(-x) = -\sinh x \quad (ungerade\ Funktion) \\ \tanh(-x) = -\tanh x \quad , \quad \coth(-x) = -\coth x \quad (ungeradeFunktionen) \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \\ \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} \end{array}}$$

Beweis :
$\sinh x = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-x} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{2x} = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 0$,

$\sinh(-x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}) = -\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}) = -\sinh x$,
$\sinh(x+y) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^{-(x+y)}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}))$
$\quad = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}) + \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y})$
$\quad = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$,
$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})^2 - \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$
Alle anderen Beweise analog.

Für $x \to \infty \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-x} \to 0 \quad \Rightarrow$
$\sinh x \approx \cosh x \approx \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}$ für $x \to \infty$.

Da $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, gilt für
$u = \cosh x \ , \ v = \sinh x$
$u^2 - v^2 = 1$ (*Hyperbel*).



Hyperbel

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt die *Reihendarstellung*:

$$\boxed{\begin{aligned} \sinh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \\ \cosh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \end{aligned}}$$

Beweis :

$$\mathrm{e}^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \quad \mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad \Rightarrow$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n!} x^n = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!} \ ,$$

$$\cosh x = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n!} x^n = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l}}{(2l)!} \ ,$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \geq 1 \quad , \quad \cosh 0 = 1.$$

Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen

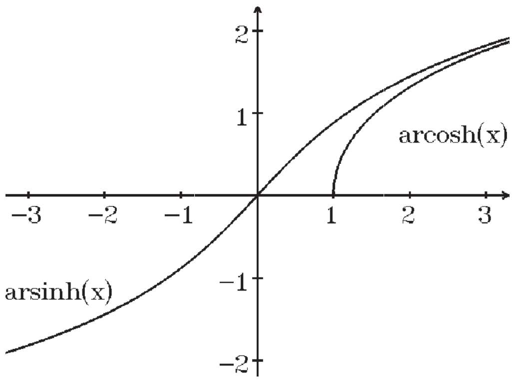
Bei cosh beschränken wir uns auf das Intervall $[0, \infty)$, alle anderen hyperbolischen Funktionen sind streng monoton.

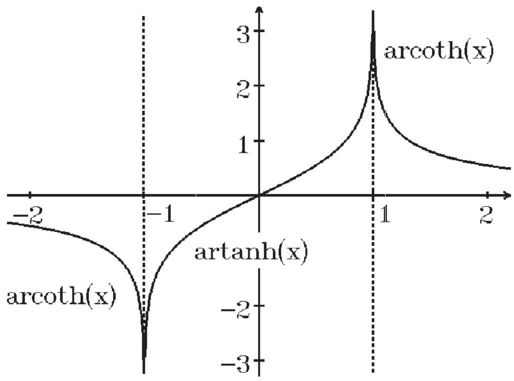
Definition 4.16 :

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad \text{arcosh} : [1, \infty) \to [0, \infty) \\ &\text{artanh} : (-1, 1) \to \mathbb{R} \quad , \quad \text{arcoth} : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R}\backslash\{0\} \end{aligned}}$$

(area-sinus-hyperbolicus, usw.)

Graphen der hyperbolischen Umkehrfunktionen





Die hyperbolischen Funktionen lassen sich durch e-Funktionen ausdrücken, also lassen sich die hyperbolischen Umkehrfunktionen durch ln ausdrücken:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \quad , & \operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad , \; x \geq 1 \\ \operatorname{artanh} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x} \quad , \; |x| < 1 \quad , & \operatorname{arcoth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1} \quad , \; x > 1 \end{array}}$$

Beweis :
z.B.: $\operatorname{arcosh} x = \ln a \geq 0 \;\Rightarrow\; a \geq 1 \;,\; a = ?$
$\Rightarrow\; x = \cosh(\ln a) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\ln a} + \mathrm{e}^{-\ln a}) = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a}) \;\Rightarrow\; x = \frac{a^2+1}{2a}$
$\Rightarrow\; a^2 - 2ax + 1 = 0 \;\Rightarrow\; a = x \pm \sqrt{x^2-1} \;\Rightarrow$ (da $a \geq 1$) $\quad a = x + \sqrt{x^2-1}$.
Alle anderen Aussagen analog.

Komplexe sin-, cos-, sinh-, cosh-Funktion

Da die Potenzreihen von $\sin x, \cos x, \sinh x, \cosh x$ auch für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergieren (jeweils Konvergenzradius ∞), lassen sich hierdurch auch die folgenden komplexwertigen Funktionen definieren:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad , \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \; ,$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad , \quad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \; .$$

Es gelten für alle $z \in \mathbb{C}$ die folgenden Beziehungen:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \sin(iz) = i\sinh(z) & , & \sinh(iz) = i\sin z \\ \cos(iz) = \cosh z & , & \cosh(iz) = \cos z \end{array}}$$

Denn:

$$sin(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1} = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} = i \sinh z \ ,$$

$$\cos(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^{2n}}{(2n)!} z^{2n} = \cosh z \ .$$

$$i \sin z = i \sin(i(-iz)) = i^2 \sinh(-iz) = \sinh(iz) \ ,$$

$$\cos z = \cos(i(-iz)) = \cosh(-iz) = \cosh(iz) \ .$$

Weiter gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \cos z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}) & , & \sin z = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}) \\ \cosh z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}) & , & \sinh z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}) \end{array}}$$

Denn:

$$\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n) \frac{i^n z^n}{n!} = \sum_{l=0}^{\infty} 2 \frac{i^{2l} z^{2l}}{(2l)!} = 2 \cos z \ .$$

Alle anderen Beziehungen analog.

Auch in $\mathbb{C}$ gelten die *Additionstheoreme*:

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \ ,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \ .$$

Insbesondere gilt:

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \ ,$$

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \ ,$$

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y} = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$$

(da $\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$ und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

Analog folgt

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y} \ .$$

Beispiele

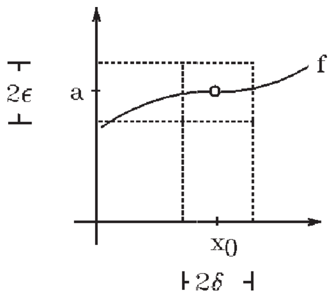
1. $\cos z = 0 \ \Leftrightarrow \ |\cos z| = 0 \ \Leftrightarrow \ \cos x = 0$ und $\sinh y = 0$
   $\Leftrightarrow \ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$ und $y = 0 \ \Leftrightarrow \ z = \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$ (also nicht mehr Nullstellen als im Reellen).

2. $\sin z = i \ \Leftrightarrow \ \sin x \cosh y = 0$ und $\cos x \sinh y = 1$
   $\Leftrightarrow \ x = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$ und $\sinh y = (-1)^k \ \Leftrightarrow \ z = k\pi + i \ \mathrm{arsinh}(-1)^k \ , \ k \in \mathbb{Z} \ .$

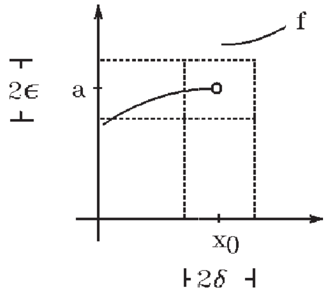
V Grenzwerte, Stetigkeit, Differentialrechnung

Definition 5.1 : Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$.
Sei $f : I \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion.

f besitzt in x_0 einen *Grenzwert* $a \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta(\epsilon) > 0$ mit: $\forall x \in I\backslash\{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - a| < \epsilon$.



a ist Grenzwert



a ist *kein* Grenzwert

Satz 5.2 : Sei $f : I\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$.
a ist *Grenzwert von f in x_0* $\Leftrightarrow$ Für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $I\backslash\{x_0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

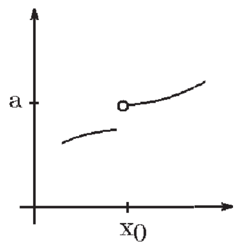
Beweis :
"$\Rightarrow$" Sei $\epsilon > 0 \;\Rightarrow\; \exists \delta > 0$ mit $|f(x) - a| < \epsilon \; \forall |x - x_0| < \delta$.
Sei (x_n) Folge aus $I\backslash\{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$, dann existiert zu $\delta > 0$ ein $N > 0$ mit $|x_n - x_0| < \delta \; \forall n > N \;\Rightarrow\; |f(x_n) - a| < \epsilon \; \forall n > N \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.
"$\Leftarrow$" Für alle Folgen (x_n) aus $I\backslash\{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gelte $f(x_n) \to a$.
Annahme: f hat in x_0 keinen Grenzwert a, dh.: $\exists \epsilon > 0$ mit $\forall \delta > 0 \; \exists x$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - a| \geq \epsilon$.
Wählen wir $\delta = \frac{1}{n}$ und ein x_n mit $|x_n - x_0| < \delta$ und $|f(x_n) - a| \geq \epsilon$, so haben wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruiert, für die $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt, aber nicht $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.
Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Betrachten wir nur Folgen, die *von einer Seite gegen x_0* konvergieren, so sprechen wir von *einseitigen (links- bzw. rechtsseitigen) Grenzwerten*:

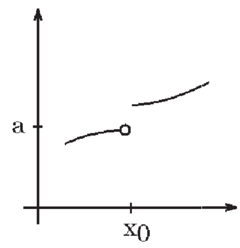
Definition 5.3 : Gilt für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $I\backslash\{x_0\}$ mit $x_n > x_0$ (bzw. $x_n < x_0$) und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ auch $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$, so heißt a *rechtsseitiger* (bzw. *linksseitiger*) *Grenzwert* von f in x_0.

Schreibweise:

$\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = a$ (rechtsseitiger Grenzwert),
$\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = a$ (linksseitiger Grenzwert).



rechtsseitiger Grenzwert



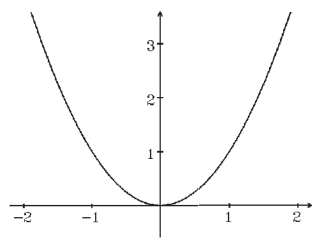
linksseitiger Grenzwert

Definition 5.4 :
a) Gilt für alle Folgen $(x_n)_{n \in I\!N}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$ (bzw. $-\infty$)
$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$, so heißt *a Grenzwert von f in* ∞ *(bzw.* $-\infty$*)*.
b) Gilt für alle Folgen $(x_n)_{n \in I\!N}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ ($x_0 \in I\!R$ oder $x_0 = \pm\infty$)
$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$ (bzw. $-\infty$), so sagt man: f besitzt in x_0 den *uneigentlichen Grenzwert* ∞ (bzw. $-\infty$).

Beispiele

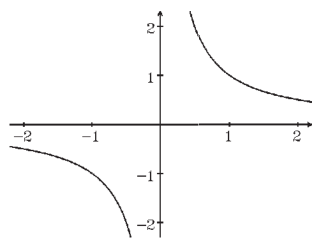
1. $f(x) = x^2$

   $x_n \to \pm\infty \;\Rightarrow\; f(x_n) = x_n^2 \to \infty$.



2. $f(x) = \frac{1}{x}$

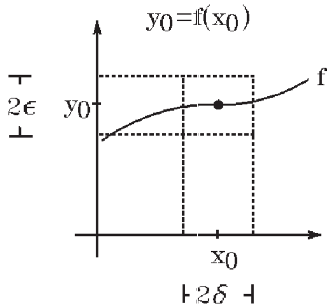
   $x_n \to \pm\infty \;\Rightarrow\; f(x_n) = \frac{1}{x_n} \to 0$
   $x_n \to 0+ \;\Rightarrow\; f(x_n) = \frac{1}{x_n} \to \infty$
   $x_n \to 0- \;\Rightarrow\; f(x_n) = \frac{1}{x_n} \to -\infty$.



Stetigkeit

Definition 5.5 : Sei $I \subset I\!R$ ein Intervall, $x_0 \in I$, $f : I \to I\!R$ rellwertige Funktion.

f heißt *stetig in* x_0 $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) > 0$ mit: $\forall x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.



Satz 5.6 : f ist stetig in x_0
$\Leftrightarrow$ $f(x_0)$ ist Grenzwert in x_0, dh.: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
$\Leftrightarrow$ Für alle Folgen $(x_n)_{n\in I\!N}$ aus I mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Beweis : Folgt sofort aus Def. 5.1 und Satz 5.2.

Analog zum rechts- und linksseitigen Grenzwert spricht man von rechts- und linksseitiger Stetigkeit:

Definition 5.7 : f heißt in x_0 *rechtsseitig (bzw. linksseitig) stetig*, wenn $f(x_0)$ rechtsseitiger (bzw. linksseitiger) Grenzwert von f in x_0 ist.

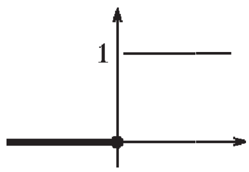
Satz 5.8 : Sei $f : I\backslash\{x_0\} \to I\!R$.
Existiert $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ und gilt $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$, so ist f in x_0 *stetig ergänzbar* mit $f(x_0) := \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$.

Beispiele

1. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{,falls } x \le 0 \\ 1 & \text{,falls } x > 0 \end{cases}$

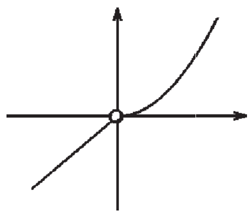
   $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0 = f(0)$ (linksseitiger Grenzwert),
   $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$ (rechtsseitiger Grenzwert),

   f ist linkseitig stetig in $x_0 = 0$,
   aber f ist nicht stetig in $x_0 = 0$.

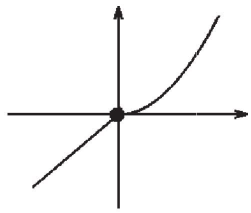
2. $f(x) = \begin{cases} x & \text{,falls } x < 0 \\ x^2 & \text{,falls } x > 0 \end{cases}$

   $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0$ (linksseitiger Grenzwert),
   $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$ (rechtsseitiger Grenzwert),
   $\Rightarrow$ linksseitiger Grenzwert = rechtsseitiger Grenzwert
   $\Rightarrow$ f ist stetig ergänzbar in $x_0 = 0$ mit $f(0) = 0$.

Satz 5.9 : Sei $f : I \to I\!R$, $x_0 \in I$.
f ist stetig in x_0 $\Leftrightarrow$ f ist rechts- und linksseitig stetig in x_0.

Beispiel

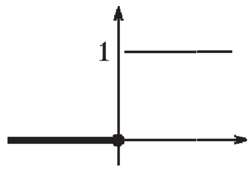


$$f(x) = \begin{cases} x & \text{,falls } x \leq 0 \\ x^2 & \text{,falls } x > 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f$ ist stetig in $x_0 = 0$.

Definition 5.10 : Besitzt f in x_0 rechts- und linksseitige endliche Grenzwerte mit $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$, so heißt x_0 *Sprungstelle* von f (f ist dann natürlich nicht stetig in x_0).

Beispiel



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{,falls } x \leq 0 \\ 1 & \text{,falls } x > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f hat in $x_0 = 0$ eine Sprungstelle.

Definition 5.11 : Sei $f : I \to I\!R$.
f heißt *stetig in I* $\Leftrightarrow$ f ist stetig für alle $x \in I$.

Beispiel

$f(x) = x^k$, $(k \in I\!N_0)$, ist stetig in $I\!R$, denn:
$\lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n) = \lim\limits_{x_n \to x_0} {x_n}^k = \lim\limits_{n \to \infty} {x_n}^k = {x_0}^k = f(x_0) \quad \forall x_0 \in I\!R$.

Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 5.12 : Seien $f : I_1 \to I\!R$, $g : I_2 \to I\!R$, $x_0 \in I_1 \cap I_2$, f und g stetig in x_0. Dann gilt:
a) $h := f + g$ ist stetig in x_0
b) $h := fg$ ist stetig in x_0
c) $h := \dfrac{f}{g}$ ist stetig in x_0, falls $g(x_0) \neq 0$
Ist g stetig in x_0 und f stetig in $g(x_0)$, so gilt:
d) $h := f \circ g$ ist stetig in x_0 .

Hierbei ist
$h = f + g$ definiert durch $h(x) = f(x) + g(x)$, $h = fg$ definiert durch $h(x) = f(x)g(x)$, $h = \dfrac{f}{g}$ definiert durch $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ und $h = f \circ g$ definiert durch $h(x) = f(g(x))$.

Beweis :
a)b)c) Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to x_0$. Dann gilt:
$f(x_n) \to f(x_0)$ und $g(x_n) \to g(x_0)$ (da f und g stetig in x_0)
$\Rightarrow \quad f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0)$ und $f(x_n)g(x_n) \to f(x_0)g(x_0)$ und
$\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$, falls $g(x_n), g(x_0) \neq 0$, also $f+g$, fg , $\dfrac{f}{g}$ stetig in x_0.
(vgl. Eigenschaften von Folgen, S.96).
d) Gilt $x_n \to x_0 \quad \Rightarrow \quad g(x_n) \to g(x_0)$ (da g stetig in x_0) $\quad \Rightarrow \quad f(g(x_n)) \to f(g(x_0))$ (da f stetig in $g(x_0)$) $\quad \Rightarrow \quad h = f \circ g$ stetig in x_0.

Beispiele

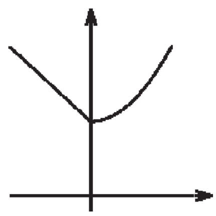
1. $p(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ (Polynom),

   p ist stetig in $\mathbb{R}$ als Summe stetiger Funktionen, denn $g(x) = x^k$ ist stetig in $\mathbb{R}$ $(\forall k \in \mathbb{N}_0)$, also auch $f(x) = a_k x^k$.

2. $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ (rationale Funktion , p, q Polynome),

   r ist stetig in $\mathbb{R} \setminus \{$ Nullstellen von q $\}$ (als Quotient stetiger Funktionen mit Nenner $\neq 0$).

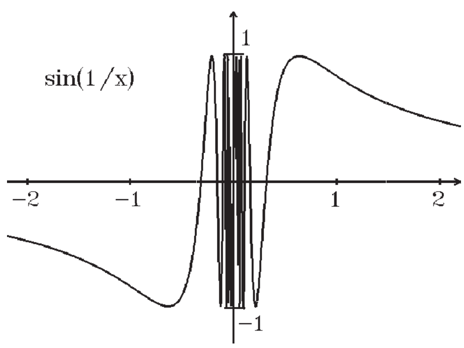
3. $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{,falls } x < 0 \\ 1+x^2 & \text{,falls } x \geq 0 \end{cases}$

   f ist stetig in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$,
   da jeweils Polynom in $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$.
   f ist stetig in 0, da $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = f(0) = 1$,

   $\Rightarrow \quad f$ ist stetig in $\mathbb{R}$.

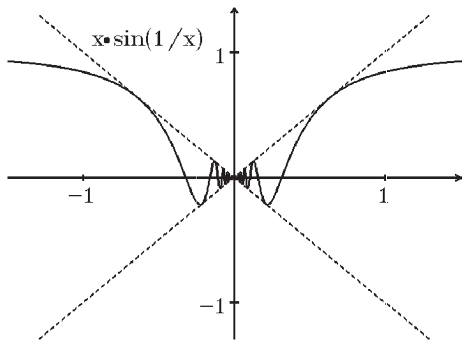
4. $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{,falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{,falls } x = 0 \end{cases}$

   f ist stetig in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (zusammengesetzte Funktion) , da sin-Funktion stetig in $\mathbb{R}$ (später) und $g(x) = \frac{1}{x}$ stetig in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

   f ist nicht stetig in 0, denn sei (x_n) die Folge mit $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ und $f(x_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi) = (-1)^n$ divergent, also $f(x_n) \not\to f(0) = 0$.

5. $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{,falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{,falls } x = 0 \end{cases}$



f ist stetig in $I\!R \backslash \{0\}$
(zusammengesetzt aus stetigen Funktionen) ,
(Begründung wie in Beispiel 4)).

f ist auch stetig in 0, denn
sei (x_n) eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
$\Rightarrow \quad |f(x_n)| = |x_n||\sin \frac{1}{x_n}| \leq |x_n| \to 0$
$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(0) = 0.$
Also ist f stetig in $I\!R$.

Frage: Sind die Funktionen $\sin x$, e^x , usw. stetig ?
Da $\sin x$, e^x , usw. durch *Potenzreihen* definiert sind, ist also die Frage:

Ist $\quad f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ stetig ?

Diese Frage wollen wir nun (etwas allgemeiner) untersuchen. Dazu betrachten wir zunächst **Folgen von Funktionen**:

Definition 5.13 : Sei $(f_n)_{n\in I\!N}$ eine Folge reellwertiger Funktionen $f_n : I \subset I\!R \to I\!R$, und sei $f : I \to I\!R$ ebenfalls eine reellwertige Funktion.

a) Die Funktionenfolge (f_n) heißt *punktweise konvergent in I* gegen f
$\Leftrightarrow \ \forall x \in I$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$
$\Leftrightarrow \ \forall x \in I \ , \ \forall \epsilon > 0 \ \exists N(\epsilon, x) > 0$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \ \ \forall n > N.$

b) Die Funktionenfolge (f_n) heißt *gleichmäßig konvergent in I* gegen f
$\Leftrightarrow \ \forall \epsilon > 0 \ \exists N(\epsilon) > 0$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \ \ \forall n > N$ und $\forall x \in I.$

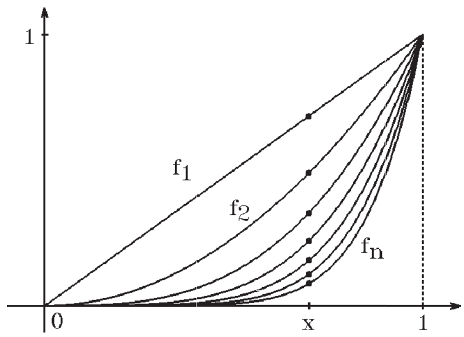
Satz 5.14 : Sind f_n und f definiert in I und gilt

$$\boxed{\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \ \text{ für } n \to \infty}$$

$\Leftrightarrow \quad$ *(f_n) konvergiert gleichmäßig in I* gegen f.

Beweis : klar.

Beispiele

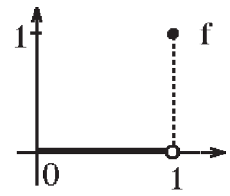


1. $f_n : [0,1] \to I\!R$ mit $f_n(x) = x^n$

   a) *punktweise Konvergenz* in $[0,1]$

   Sei $x \in [0,1) \ \Rightarrow \ f_n(x) = x^n \to 0$
   für $n \to \infty$ (da $|x| < 1$),
   sei $x = 1 \ \Rightarrow \ f_n(1) = 1 \to 1.$

Also insgesamt konvergiert (f_n) punktweise in $[0,1]$
gegen die Grenzfunktion $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{,falls } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{,falls } x = 1\ . \end{cases}$



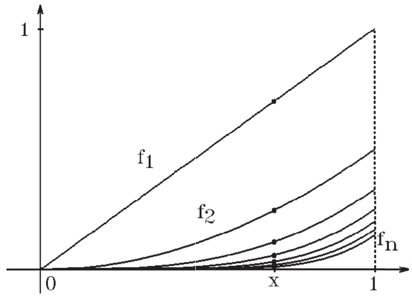
b) *gleichmäßige Konvergenz*

keine gleichmäßige Konvergenz in $[0,1]$, denn
$\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\to 0$ für $n \to \infty$,
aber gleichmäßige Konvergenz in $[0,q]$ mit $0 < q < 1$ (fest), denn
$\sup\limits_{x\in[0,q]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,q]} |x^n - 0| = \sup\limits_{x\in[0,q]} |x^n| = q^n \to 0$ für $n \to \infty$ (da $0 < q < 1$).

2. $f_n : [0,1] \to I\!R$ mit $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$

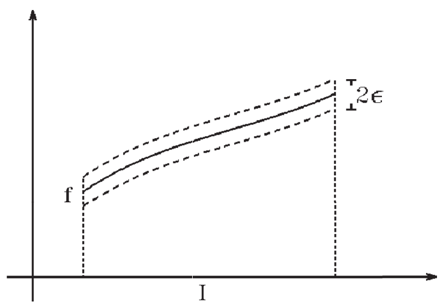
   (f_n) konvergiert gleichmäßig in $[0,1]$
   gegen $f : [0,1] \to I\!R$ mit $f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$,
   denn

   $$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |\frac{x^n}{n} - 0|$$
   $$= \sup_{x\in[0,1]} |\frac{x^n}{n}| \leq \frac{1}{n} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$



   Aus folgendem Satz folgt damit auch die
   punktweise Konvergenz in $[0,1]$.

   Gleichmäßige Konvergenz besagt, daß ab einem N alle f_n in einem ϵ-Streifen um die Grenzfunktion f liegen müssen (für alle $\epsilon > 0$):



Satz 5.15 :
(f_n) konvergiert *gleichmäßig* in I gegen f
$\Rightarrow \quad (f_n)$ konvergiert *punktweise* in I gegen f.
Die Umkehrung gilt nicht.

Beweis :
$\sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| \to 0 \;\; \forall x \in I.$

Weitere Beispiele

3. $f_n : [0,\infty) \to I\!R$ mit $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

a) *punktweise Konvergenz*

sei $x \in [0,\infty) \;\Rightarrow\; f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2} \to 0 =: f(x)$ für $n \to \infty$

$\Rightarrow$ (f_n) konvergiert punktweise in $[0,\infty)$ gegen f mit $f(x) = 0 \;\forall x \in [0,\infty)$.

b) *gleichmäßige Konvergenz*

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)| \geq f_n(\frac{1}{n}) = \frac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot(\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{2}$$

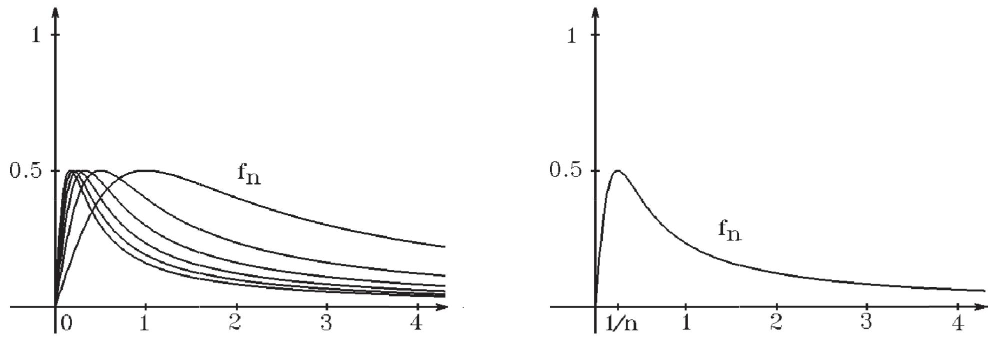
$\Rightarrow \displaystyle\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2} \not\to 0$ für $n \to \infty$

$\Rightarrow$ keine gleichmäßige Konvergenz in $[0,\infty)$.

Aber gleichmäßige Konvergenz in $[q,\infty)$ $\forall q > 0$ fest, denn:

$$\sup_{x\in[q,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[q,\infty)} |f_n(x)| = f_n(q) = \frac{nq}{1+n^2q^2} \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

(für $n > \frac{1}{q}$) , (f_n ist monoton fallend für $x > \frac{1}{n}$).



4. $f_n : [0,\infty) \to I\!R$ mit $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2+x^2}$

a) *punktweise Konvergenz*

sei $x \in [0,\infty) \;\Rightarrow\; f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2+x^2} \to 0 =: f(x)$ für $n \to \infty$

$\Rightarrow$ (f_n) konvergiert punktweise in $[0,\infty))$ gegen f mit $f(x) = 0 \;\forall x \in [0,\infty)$.

b) *gleichmäßige Konvergenz*

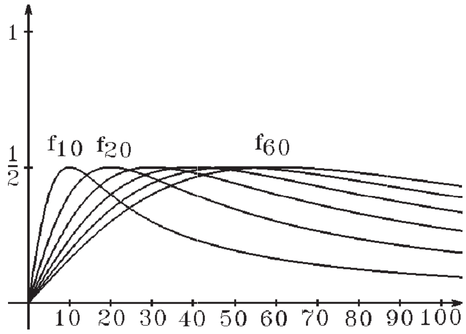
$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)| \geq f_n(n) = \frac{n^2}{n^2+n^2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \displaystyle\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2} \not\to 0$ für $n \to \infty$

$\Rightarrow$ keine gleichmäßige Konvergenz in $[0,\infty)$.

Aber gleichmäßige Konvergenz in $[0,q]$ $\forall q > 0$ fest, denn:

$\sup\limits_{x\in[0,q]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,q]} |f_n(x)| = f_n(q) = \dfrac{nq}{n^2+q^2} \leq \dfrac{nq}{n^2} = \dfrac{q}{n} \to 0$ für $n \to \infty$ (für $n > q$) , (f_n ist monoton wachsend für $x < n$).



5. $f_n : (-1,1) \to I\!R$ mit $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

a) *punktweise Konvergenz*

$f_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} \to \dfrac{1}{1-x} =: f(x)$ für $n \to \infty$

$\Rightarrow$ (f_n) konvergiert punktweise in $(-1,1)$ gegen f mit $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

b) *gleichmäßige Konvergenz*

$\sup\limits_{x\in(-1,1)} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(1-\dfrac{1}{n}) - f(1-\dfrac{1}{n})| = |\dfrac{1-(1-\frac{1}{n})^{n+1}}{1-(1-\frac{1}{n})} - \dfrac{1}{1-(1-\frac{1}{n})}|$

$= n(1-\frac{1}{n})^{n+1} \not\to 0$ (da $(1-\frac{1}{n})^{n+1} \to \frac{1}{e}$)

$\Rightarrow$ keine gleichmäßige Konvergenz in $(-1,1)$.

Aber gleichmäßige Konvergenz in $[-q,q]$ $\forall 0 < q < 1$ fest, denn

$\sup\limits_{x\in[-q,q]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[-q,q]} |\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} - \dfrac{1}{1-x}| = \sup\limits_{x\in[-q,q]} \dfrac{|x|^{n+1}}{|1-x|} \leq \dfrac{q^{n+1}}{1-q} \to 0$ für $n \to \infty$ (da $|1-x| = 1-x \geq 1-q$ $\forall x \in [-q,q]$).

Konvergenz unendlicher Funktionenreihen

Seien $(f_k)_{k\in I\!N_0}$ mit $f_k : I \subset I\!R \to I\!R$ und $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ die *n-te Partialsumme* der *unendlichen Funktionenreihe* $s := \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$. Sind alle f_k stetig in I, so ist auch jede Partialsumme s_n stetig in I (als endliche Summe stetiger Funktionen). Wir wollen nun untersuchen, ob dann auch die unendliche Funktionenreihe s stetig in I ist. Zu diesem Zweck müssen wir zunächst auch für Funktionenreihen den Begriff "punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz" definieren:

Definition 5.16 : Die unendliche Funktionenreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ der Funktionen $f_k : I \to I\!R$ heißt *punktweise (bzw. gleichmäßig) konvergent* in I, wenn die Folge der Partialsummen $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ punktweise (bzw. gleichmäßig) in I gegen eine Grenzfunktion $s : I \to I\!R$ konvergiert. In diesem Fall schreiben wir: $s = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ mit $s(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$.

Beispiel :

$f_k : (-1,1) \to I\!R$ mit $f_k(x) = x^k$, $s_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \Rightarrow$

$s_n(x) \to s(x) = \dfrac{1}{1-x}$ punktweise in $(-1,1)$ und
gleichmäßig in $[-q,q]$ $\forall 0 < q < 1$ (vgl. voriges Beispiel 5)) $\Rightarrow$

$$\boxed{s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } x \in (-1,1)}$$

Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen

Satz 5.17 : Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ eine unendliche Reihe von Funktionen $f_k : I \to I\!R$.

Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen mit $b_k > 0$.

Gilt $|f_k(x)| \le b_k \;\; \forall k \ge n_0 \in I\!N_0$ und $\forall x \in I \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ *konvergiert gleichmäßig* in I.

Beweis :

Da $|f_k(x)| \le b_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert punktweise in I (Majorantenkriterium für unendliche Zahlenreihen). Sei $s(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ der Grenzwert für jedes $x \in I$, also $s_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x) \to s(x)$ punktweise in I, sei $t_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$ (n-te Partialsumme der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$), dann gilt für $m > n \ge n_0$

$$|s_m(x) - s_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{m} b_k = t_m - t_n \ .$$

Da $|t_m - t_n| = t_m - t_n < \epsilon\ \forall n, m > N$ (da (t_n) konvergent)
$\Rightarrow\ |s_m(x) - s_n(x)| < \epsilon\ \forall n, m > N$ und $\forall x \in I$.
Da $s_m(x) \to s(x)$ für $m \to \infty$, gilt (da Betragsfunktion stetig)
$|s(x) - s_n(x)| \leq \epsilon\ \forall n > N$ und $\forall x \in I\ \Rightarrow\ (s_n)$ konvergiert gleichmäßig in I gegen s.

Beispiele

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$ konvergiert gleichmäßig in $I\!R$, denn:
   $\displaystyle|\frac{\sin kx}{k^2}| \leq \frac{1}{k^2}\quad \forall x \in I\!R\ ,\ \forall k \in I\!N$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent.

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + x^2}$ konvergiert gleichmäßig in $I\!R$, denn:
   $\displaystyle|\frac{(-1)^k}{k^2 + x^2}| \leq \frac{1}{k^2}\quad \forall x \in I\!R\ ,\ \forall k \in I\!N$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent.

3. *Potenzreihen*
   $\displaystyle f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ sei eine Potenzreihe um x_0 mit Konvergenzradius $r > 0$, dann gilt:
   Die Potenzreihe konvergiert gleichmäßig in jedem Intevall $I_q = \{x \in I\!R : |x - x_0| \leq q\}$ mit $0 < q < r$, denn:
   $\displaystyle|a_k(x - x_0)^k| \leq |a_k q^k|\quad \forall x$ mit $|x - x_0| \leq q\ ,\ \forall k \in I\!N_0$ und $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |a_k q^k|$ ist konvergent,
   da $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k q^k$ absolut konvergent ist für $0 < q < r$ (weil r der Konvergenzradius ist).
   Etwas allgemeiner gilt der folgende Satz:

Satz 5.18 : Eine Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ *konvergiert gleichmäßig* in jedem *abgeschlossenen Teilintervall* des Konvergenzintervalls $I = \{x \in I\!R\ :\ |x - x_0| < r\}$.

Wir werden nun zeigen, daß bei *gleichmäßiger* Konvergenz die Stetigkeit auf die Grenzfunktion übertragen wird, bei *punktweiser* Konvergenz aber i.A. nicht.

Satz 5.19 :
a) Sind alle Funktionen $f_n : I \to I\!R$ einer Funktionenfolge (f_n) *stetig* in I, und konvergiert die Folge (f_n) *gleichmäßig* in I gegen die Grenzfunktion $f : I \to I\!R$
$\Rightarrow\ f$ ist *stetig* in I. Also gilt für alle $x_0 \in I$:
$\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$
(Grenzwerte dürfen vertauscht werden).

b) Sind alle Funktionen $f_k : I \to I\!R$ einer unendlichen Funktionenreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ *stetig* in I und konvergiert die Funktionenreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ *gleichmäßig* in I

$\Rightarrow \quad f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ ist *stetig* in I. Also gilt für alle $x_0 \in I$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_0) = f(x_0)$$

(Grenzwert und unendliche Summe dürfen vertauscht werden).

c) Eine *Potenzreihe* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ mit Konvergenzradius $r > 0$ ist *stetig* in ihrem Konvergenzintervall $I = \{x \in I\!R \ : \ |x - x_0| < r\}$.

Beweis :
a) Sei $x \in I$, $\epsilon > 0 \ \Rightarrow \ \exists N(\epsilon) \in I\!N$ mit $|f_n(y) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3} \ \forall n \geq N$, $\forall y \in I$ (wegen der gleichmäßigen Konvergenz). Wählen wir f_N, so gilt wegen der Stetigkeit von f_N in I: $\exists \delta > 0$ mit $|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\epsilon}{3} \ \forall y \in I$ mit $|x - y| < \delta$. Also gilt:
$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N(y)-f(y)| < \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} = \epsilon \ \forall y \in I$ mit $|x - y| < \delta \ \Rightarrow \ f$ ist stetig in x.

b) Die Partialsummen $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ sind stetig in I (als endliche Summe von stetigen Funktionen), und (s_n) konvergiert gleichmäßig in I gegen $s = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$, also ist nach a) $s = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ stetig in I.

c) Sei $x \in I = \{x \in I\!R \ : \ |x - x_0| < r\} \ \Rightarrow \ \exists q$ mit $0 < q < r$ und $x \in I_q = \{x \in I\!R \ : \ |x - x_0| \leq q\}$. In I_q gilt nach Satz 5.18 gleichmäßige Konvergenz, $f_k(x) = a_k(x - x_0)^k$ sind stetig in $I_q \ \forall k \in I\!N_0 \quad \Rightarrow$ Grenzfunktion $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ ist stetig in x. Da $x \in I$ beliebig $\Rightarrow \ f$ ist stetig in I.

Beispiele

1. Beispiel 1. von S.143 : $\quad f_n(x) = x^n$ stetig in $[0, 1]$, aber Grenzfunktion $f(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{falls } 0 \leq x < 1 \\ 1 & ,\text{falls } x = 1 \end{cases}$ nicht stetig in $[0, 1] \quad \Rightarrow$ *keine* gleichmäßige Konvergenz in $[0, 1]$.

2. Beispiel 2. von S.144 : $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$ stetig in $[0,1]$, gleichmäßige Konvergenz in $[0,1]$ gegen $f(x) = 0\ \forall x \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad f$ ist stetig in $[0,1]$.

3. Beispiel 5. von S.146 : $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$ ist stetig in $(-1,1)$.

4. Beispiel 1. von S.148 : $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k^2}$ ist stetig in $I\!R$.

5. Beispiel 2. von S.148 : $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2+x^2}$ ist stetig in $I\!R$.

6. $\sin x, \cos x, \mathrm{e}^x$ sind stetig in $I\!R$, da ihre Potenzreihen alle den Konvergenzradius $r = \infty$ haben.

   Also sind alle *trigonometrischen Funktionen* und alle *hyperbolischen Funktionen* jeweils *stetig* in ihren Definitionsbereichen (als Summe bzw. Quotient stetiger Funktionen mit Nenner $\neq 0$).

   Weitere Beispiele

1. $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$ ist stetig in $I\!R$ (da zusammengesetzt aus stetigen Funktionen).

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & ,\text{falls } x \neq 0 \\ 1 & ,\text{falls } x = 0 \end{cases}$

   f ist stetig in $I\!R$, denn:
   f ist stetig in $I\!R\backslash\{0\}$ (da Quotient stetiger Funktionen mit Nenner $\neq 0$).
   Da $\quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \forall x \in I\!R\ (r = \infty)$

   $$\Rightarrow \quad \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots \quad \forall x \in I\!R\backslash\{0\} \text{ mit}$$

   Konvergenzradius $r = \infty$

   $$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \Rightarrow$$

   $$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \qquad \forall x \in I\!R}$$

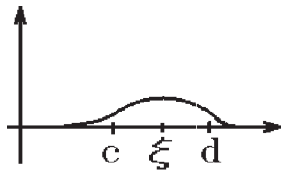
   mit Konvergenzradius $r = \infty \quad \Rightarrow \quad f$ ist stetig in $I\!R$.

Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 5.20 : Sei $f : [a,b] \to I\!R$ stetig in $[a,b]$ und sei $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) \neq 0$.
$\Rightarrow \quad \exists [c,d] \subset [a,b]$ mit $c < \xi < d$ (Umgebung von ξ) und $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in [c,d]$.

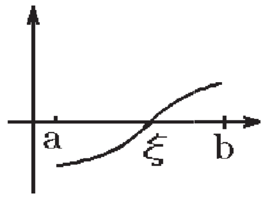
Beweis :

Sei etwa $f(\xi) > 0$.
Annahme: In jeder Umgebung von ξ gibt es einen Punkt x mit $f(x) \leq 0$.
Also $\exists x_n \in (\xi - \frac{1}{n}, \xi + \frac{1}{n})$ mit $f(x_n) \leq 0$.
Da $x_n \to \xi$ (für $n \to \infty$) $\Rightarrow$ $f(x_n) \to f(\xi)$ (Stetigkeit von f).
Da $f(x_n) \leq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $f(\xi) \leq 0$
$\Rightarrow$ Widerspruch zu $f(\xi) > 0$.



Satz 5.21 : Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a,b]$ und sei $f(a)f(b) < 0$ (dh. Vorzeichenwechsel)
$\Rightarrow$ $\exists \xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = 0$.

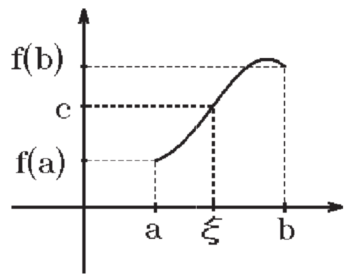
Beweis :
Sei etwa $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.
Sei $M = \{x \in [a,b]\ :\ f(x) < 0\}$.
Da $a \in M$ $\Rightarrow$ $M \neq \emptyset$,
b ist obere Schranke von M.
Sei $\xi = \sup M$ (kleinste obere Schranke).
Wäre $f(\xi) > 0$ $\Rightarrow$ $\exists [c,d] \subset [a,b]$ mit $c < \xi < d$ und $f(x) > 0\ \ \forall x \in [c,d]$
$\Rightarrow$ ξ ist nicht kleinste obere Schranke
(anlog für $f(\xi) < 0$) $\Rightarrow$ $f(\xi) = 0$.



Satz 5.22 : *Zwischenwertsatz*

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a,b]$
$\Rightarrow$ f nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal in $[a,b]$ an.

Beweis :
a) $f(a) = f(b)$ $\Rightarrow$ nichts zu zeigen.
b) Sei $f(a) \neq f(b)$
und sei c eine beliebige Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$
$\Rightarrow$ $(f(a) - c)(f(b) - c) < 0$
$\Rightarrow$ $\exists \xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) - c = 0$ $\Rightarrow$ $f(\xi) = c$
(da $(f - c)$ stetig in [a,b]).

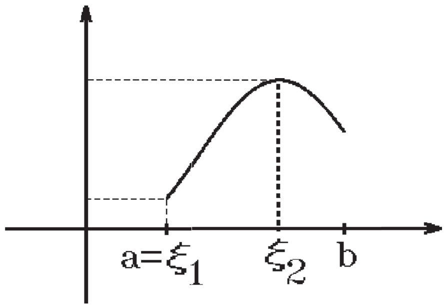


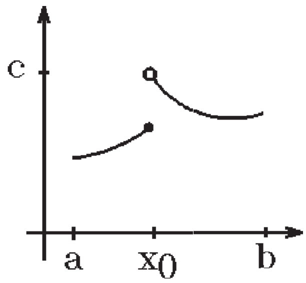
Satz 5.23 : Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a,b]$. Dann gilt:

a) f ist *beschränkt* in $[a,b]$, dh.: $\exists K > 0$ mit $|f(x)| \leq K\ \ \forall x \in [a,b]$.

b) f nimmt in $[a,b]$ ihr absolutes *Maximum* und *Minimum* an, dh.: $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a,b]$ mit $f(\xi_1) = \inf\{f(x)\ :\ x \in [a,b]\} = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$
und $f(\xi_2) = \sup\{f(x)\ :\ x \in [a,b]\} = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Beweis : anschaulich klar, ausführlicher Beweis siehe Literatur.





$f(a) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$, $f(\xi_2) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$
(absolute Extrema)

$c = \sup\{f(x) \; : \; x \in [a,b]\}$
$\nexists \; \xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = c$
$\Rightarrow$ sup wird nicht angenommen

Hierbei gilt für die *absoluten Extrema*:

Definition 5.24 :
$f(\xi_1) = \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq f(\xi_1) \quad \forall x \in [a,b]$ (absolutes Minimum),
$f(\xi_2) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq f(\xi_2) \quad \forall x \in [a,b]$ (absolutes Maximum).

Nach Hilfssatz 4.10, S.123 , gilt:
Sei $f : [a,b] \to I\!R$ *streng monoton wachsend (bzw. fallend)*
$\Rightarrow \quad f^{-1} : f([a,b]) \to [a,b]$ ist ebenfalls *streng monoton wachsend (bzw. fallend)*.

Für stetige Funktionen gilt nun:

Satz 5.25 : Sei $f : [a,b] \to I\!R$ *stetig* in $[a,b]$ und sei f streng monoton wachsend (bzw. fallend)
$\Rightarrow$ Die *Umkehrfunktion* f^{-1} ist auch *stetig* in $f([a,b])$.

Beweis : Sei f streng monoton wachsend, $y_0 \in [f(a), f(b)] \;\; \Rightarrow \;\; f^{-1}$ ist auch streng monoton wachsend in $[f(a), f(b)]$.
Sei (y_n) eine Folge aus $[f(a), f(b)]$ mit $y_n \nearrow y_0$ (streng monoton wachsend gegen y_0)
$\Rightarrow$ für $x_n := f^{-1}(y_n)$, $x_0 := f^{-1}(y_0)$: (x_n) ist streng monoton wachsend (weil f^{-1} streng monoton wachsend).
Annahme: $x_n \not\to x_0$, also $x_n \to x_1 \neq x_0$ ((x_n) ist konvergent, da monoton und beschränkt ($x_n \in [a,b]$)).
Da f stetig in $[a,b] \;\; \Rightarrow \;\; f(x_n) \to f(x_1) \neq f(x_0)$ (da f streng monoton)
$\Rightarrow \;\; y_n = f(x_n) \not\to y_0 = f(x_0) \;\; \Rightarrow$ Widerspruch zu $y_n \to y_0$.
Also ist f^{-1} linksseitig stetig in y_0. Analog zeigt man, daß f^{-1} rechtsseitig stetig in $y_0 \;\; \Rightarrow \;\; f^{-1}$ ist stetig in y_0. Da $y_0 \in [f(a), f(b)]$ beliebig $\Rightarrow \;\; f^{-1}$ ist stetig in $[f(a), f(b)]$.

Damit sind auch folgende Funktionen stetig:

ln ist stetig in $(0, \infty)$,
a^x ist stetig in $I\!R$ (für $a > 0$),
${}^a\log$ ist stetig in $(0, \infty)$,
arc-Funktionen sind stetig in ihren Definitionsbereichen,
area-Funktionen sind stetig in ihren Definitionsbereichen.

Differentialrechnung

Definition 5.26 : Sei $f : I \subset I\!R \to I\!R$ (I Intervall in $I\!R$), sei $x_0 \in I$.
Existiert der Grenzwert

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad , \quad (x \in I \backslash \{x_0\})}$$

so heißt f in x_0 *differenzierbar*, und der Grenzwert heißt die *Ableitung* der Funktion f in x_0.

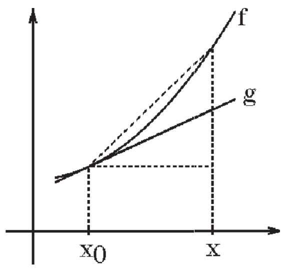
Schreibweise:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad .$$

Betrachten wir beim Grenzübergang $x \to x_0$ nur $x > x_0$ (bzw. $x < x_0$), so heißt f in x_0 *rechtsseitig (bzw. linksseitig) differenzierbar*, und der Grenzwert heißt die *rechtsseitige (bzw. linksseitige) Ableitung* von f in x_0.

$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ist die Steigung der Sekante durch die Punkte $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$.

$f'(x_0)$ ist die *Steigung der Tangente* an f im Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$.



Die Gerade g mit

$$\boxed{g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

heißt *Tangente* an die Funktion f im Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$.

Beispiele

1. $f(x) = c \;\; \forall x \in I\!R \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \;\; \forall x \in I\!R$
   denn: $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$

2. $f(x) = x \ \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$

denn: $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{,falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{,falls } x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad f$ ist in $x_0 = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$

denn: $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$, da

$\displaystyle \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin x - x}{x^2} = -\frac{x}{3!} + \frac{x^3}{5!} - \ldots \to 0$ für $x \to 0$

(Potenzreihe mit Konvergenzradius $r = \infty$).

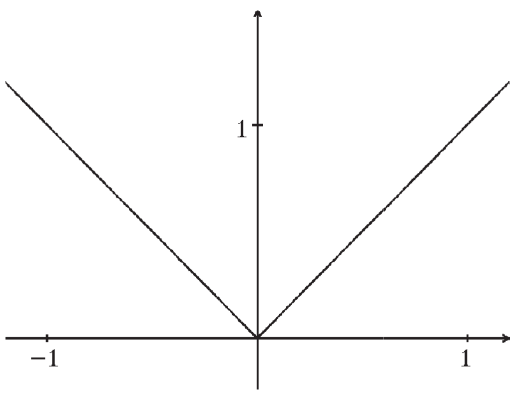
4. $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{,falls } x \geq 0 \\ -x & \text{,falls } x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad f$ ist differenzierbar in $\mathbb{R} \backslash \{0\}$, aber f ist *nicht differenzierbar* in $x_0 = 0$

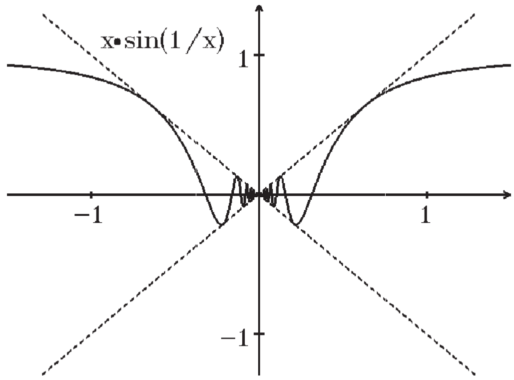
denn: $\displaystyle \lim_{x \to 0-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x} = -1$ (linksseitige Ableitung),

$\displaystyle \lim_{x \to 0+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = 1$ (rechtsseitige Ableitung).

Da in $x_0 = 0$ rechtsseitige Ableitung $\neq$ linksseitige Ableitung $\quad \Rightarrow \quad f$ ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.



$f(x) = |x|$



$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$

5. $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{,falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{,falls } x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad f$ ist stetig in $x_0 = 0$, aber f ist *nicht differenzierbar* in $x_0 = 0$

denn: (Stetigkeit vgl. Beispiel 5, S.143),

$\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ existiert nicht.

Es gilt aber:

Satz 5.27 : Ist $f : I \to I\!R$ *differenzierbar* in $x_0 \in I$
$\Rightarrow \quad f$ ist *stetig* in x_0 (Die Umkehrung gilt nicht).

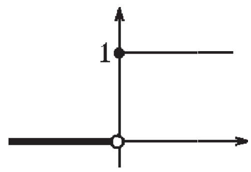
Beweis :
$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to 0 \cdot f'(x_0) = 0 \quad \text{für } x \to x_0 \ , \ (x \neq x_0) \ .$$

Satz 5.28 : Sei $f : I \to I\!R$, $x_0 \in I$.
Existiert die *linksseitige* und *rechtsseitige Ableitung* in x_0 und sind diese gleich, also
$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \in I\!R$$
$\Rightarrow \quad f$ ist *differenzierbar* in x_0 mit $f'(x_0) = a$.

Beweis : klar.

Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{falls } x < 0 \\ 1 & ,\text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{0 - 1}{x - 0} \quad \text{existiert nicht}$$
$\Rightarrow \quad f$ ist *nicht* linksseitig differenzierbar in $x_0 = 0$.
$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{1 - 1}{x - 0} = 0$$
$\Rightarrow \quad f$ ist rechtsseitig differenzierbar in $x_0 = 0$, aber f ist *nicht* differenzierbar in $x_0 = 0$.
Das hätte man auch einfacher sehen können, denn f ist in $x_0 = 0$ nicht stetig $\Rightarrow$ f ist auch in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

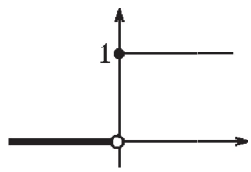
Satz 5.29 : Sei $f : I \to I\!R$ *stetig* in $x_0 \in I$.
Existiert die *linksseitige* und *rechtsseitige verallgemeinerte Ableitung* in x_0 und sind diese gleich, also
$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0-)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0+)}{x - x_0} = a \in I\!R$$
$\Rightarrow \quad f$ ist *differenzierbar* in x_0 mit $f'(x_0) = a$.

Hiebei ist $f(x_0-)$ der linksseitige- und $f(x_0+)$ der rechtsseitige Grenzwert von f in x_0, also $f(x_0-) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$, $f(x_0+) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$.

Beweis : Da f stetig in $x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0-) = f(x_0+) = f(x_0)$, also folgt aus Satz 5.28 die Behauptung.

Auf die Stetigkeit in x_0 kann in diesem Satz nicht verzichtet werden,
wie das folgende Beispiel zeigt

Beispiel



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{,falls } x < 0 \\ 1 & \text{,falls } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0-)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0 \ ,$$
$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0+)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{1 - 1}{x - 0} = 0$$

$\Rightarrow$ beide Werte sind gleich, aber f ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

Rechenregeln

Satz 5.30 : Seien f und g in x_0 differenzierbar.

a) Dann sind auch Summe, Produkt und Quotient (falls $g(x_0) \neq 0$) in x_0 differenzierbar mit

$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

$(cf)'(x_0) = cf'(x_0) \quad (c \in \mathbb{R})$

$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (*Produktregel*)

$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ (*Quotientenregel* , falls $g(x_0) \neq 0$).

b) Ist g in x_0 und f in $g(x_0)$ differenzierbar, so ist auch $h = f \circ g$ in x_0 differenzierbar mit

$h'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$ (*Kettenregel*).

c) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton in I, und sei f in $x_0 \in I$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ f^{-1} ist in $f(x_0)$ differenzierbar mit $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$ oder mit $y_0 = f(x_0)$

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}}$$

Beweis :

a) $\frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0) + g'(x_0)$.

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$
$$= g(x)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \to \frac{1}{g^2(x_0)}(-g'(x_0)) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{(\frac{1}{g})'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad , \text{ falls } g(x_0) \neq 0}$$

$(\frac{f}{g})'(x_0) = (f \cdot \frac{1}{g})'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$
(nach der Produktregel).

b) $\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$
(falls $g(x) \neq g(x_0)$ in einer Umgebung von $g(x_0)$).
Ist $g(x) = g(x_0) \; \forall x \in U(x_0) \; \Rightarrow \; f(g(x)) = f(g(x_0)) \; \forall x \in U(x_0) \; \Rightarrow \; g'(x_0) = 0$ und $(f \circ g)'(x_0) = 0 \; \Rightarrow (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

c) $f^{-1}(f(x)) = x \;\; \forall x \in I$, f^{-1} ist auch stetig und streng monoton.
Sei $y = f(x) \neq f(x_0) = y_0 \; \Rightarrow \; x = f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0) = x_0 \; \Rightarrow$
$\lim\limits_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

Beispiele

1. $f(x) = x^k \;\; , \; k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = kx^{k-1}$
   denn: $k = 0, k = 1$ früheres Beispiel,
   $k > 0 \; , \; k \to k+1 : \quad (x^{k+1})' = (x \cdot x^k)' = 1 \cdot x^k + x \cdot kx^{k-1} = (k+1)x^k$,
   $k < 0 \; \Rightarrow \; (-k) > 0 \; \Rightarrow \; f(x) = x^k = \frac{1}{x^{-k}} \; \Rightarrow \; f'(x) = \frac{-(-kx^{-k-1})}{x^{-2k}} = kx^{k-1}$.

2. $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ (Polynom) $\Rightarrow \quad f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$
   (differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R}$).

3. $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, p, q Polynome , also f rationale Funktion $\Rightarrow$ f ist differenzierbar in $\mathbb{R} \backslash \{$Nullstellen von $q\}$ mit $\quad f'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}$.

4. $g(x) = \sqrt{x} \;\; , \; x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad g$ ist differenzierbar für alle $x > 0$ mit $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
   denn: g ist Umkehrfunktion von $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad g = f^{-1}$ mit $g'(y_0) = (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{2f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{2g(y_0)} = \frac{1}{2\sqrt{y}_0}$.

5. $f(x) = \begin{cases} x^3 & ,\text{falls } x < 0 \\ x^2 & ,\text{falls } x \geq 0 \end{cases}$
   f ist differenzierbar für $x < 0$ mit $f'(x) = 3x^2$,
   f ist differenzierbar für $x > 0$ mit $f'(x) = 2x$,
   $\lim\limits_{x \to 0-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0-} 3x^2 = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x \to 0+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0+} 2x = 0$,

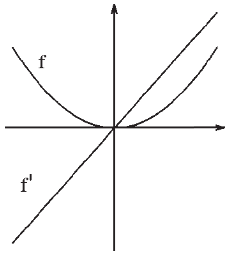
f stetig in $x_0 = 0$, da $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = f(0) = 0$,
(nach Satz 5.40, S.167 (später))
$\Rightarrow$ f ist differenzierbar in $x_0 = 0$ mit $f'(0) = 0$ $\Rightarrow$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{,falls } x < 0 \\ 0 & \text{,falls } x = 0 \\ 2x & \text{,falls } x > 0 \ . \end{cases}$$

Definition 5.31 : Sei $f : I \to \mathbb{R}$.
f heißt *differenzierbar* in I, wenn f differenzierbar ist für alle $x \in I$. In diesem Fall heißt $f' : I \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ die *Ableitungsfunktion* von f.
Ist f' stetig in I, so heißt f in I *stetig differenzierbar*.

Beispiel

$f(x) = x^2$,
$f'(x) = 2x$.
Da $f'(x) = 2x$ stetig in $\mathbb{R}$
$\Rightarrow$ $f(x) = x^2$ ist
stetig differenzierbar in $\mathbb{R}$.



Folgende *Fragen* wollen wir nun behandeln:
Wann überträgt sich die Differenzierbarkeit einer Folge von differenzierbaren Funktionen auf die Grenzfunktion ? Wann ist eine unendliche Reihe von differenzierbaren Funktionen differenzierbar ? Ist eine Potenzreihe in ihrem Konvergenzintervall differenzierbar ?

Satz 5.32 : Seien $f_n : I \to \mathbb{R}$ *differenzierbar* in I $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$, I ein beschränktes Intervall aus $\mathbb{R}$.
Die Folge (f_n) konvergiere an einer Stelle $x_0 \in I$.
Die Folge der Ableitungen (f_n') konvergiere *gleichmäßig* in I.

Dann gilt:
a) (f_n) konvergiert *gleichmäßig* in I gegen die Grenzfunktion $f : I \to \mathbb{R}$.
b) Die *Grenzfunktion* f mit $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ ist *differenzierbar* in I mit
$f'(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n'(x)$, also $\dfrac{d}{dx}(\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)) = \lim\limits_{n \to \infty} (\dfrac{d}{dx} f_n(x))$
(Limes und Differentiation dürfen vertauscht werden).

Beweis :
a) Sei $x \in I$, $\epsilon > 0$ $\Rightarrow$ $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \epsilon/2$ $\forall n, m > N_1$ $\Rightarrow$
$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$
$< |x - x_0| |\frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))}{x - x_0}| + \epsilon/2 = |x - x_0| |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| + \epsilon/2$
(folgt aus dem Mittelwertsatz (später, S.165))
$< \epsilon/2 + \epsilon/2 \quad = \epsilon$ $\forall m, n > N_2$ $\forall x \in I$ (wegen gleichmäßiger Konvergenz von (f_n'))

$\Rightarrow$ (f_n) gleichmäßig konvergent in I. Sei f die Grenzfunktion.

b) h sei die Grenzfunktion von (f_n') , $x_1 \in I$ $\Rightarrow$
$|\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} - h(x_1)| \leq \frac{1}{|x-x_1|}|(f(x)-f(x_1)) - (f_m(x) - f_m(x_1))|$
$+|\frac{(f_m(x)-f_n(x))-(f_m(x_1)-f_n(x_1))}{x-x_1}| + |\frac{f_n(x)-f_n(x_1)}{x-x_1} - h(x_1)|$
$\leq \frac{1}{|x-x_1|}(|f(x)-f_m(x)|+|f(x_1))-f_m(x_1)|)+|f_m'(\xi)-f_n'(\xi)|+|\frac{f_n(x)-f_n(x_1)}{x-x_1} - f_n'(x_1)|$
$+|f_n'(x_1) - h(x_1)|$ (Mittelwertsatz (später, S.165))
$< \epsilon/4 + \epsilon/4 + \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon \quad \forall |x-x_1| < \delta$
(da $f_m \to f$ gleichmäßig, (f_n') gleichmäßig konvergent, f_n differenzierbar in x_1 und $f_n' \to h$ gleichmäßig).

Beispiele

1. $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^2}$, $f_n'(x) = \dfrac{\cos nx}{n} \to 0 = h(x)$ (für $n \to \infty$) $\forall x \in \mathbb{R}$,
f_n differenzierbar in $\mathbb{R}$ (später), $f_n(0) = 0 \to 0$,
da $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |\dfrac{\cos nx}{n} - h(x)| \leq \dfrac{1}{n} \to 0$ $\Rightarrow$ $f_n' \to h$ gleichmäßig konvergent in $\mathbb{R}$ mit $h(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Also gilt:
$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx}(\frac{\sin nx}{n^2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos nx}{n} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. $f_n(x) = \dfrac{\sin n^2 x}{n}$, $f_n'(x) = n \cos n^2 x$ divergent. Es gilt:
$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n^2 x}{n} \neq \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx}(\frac{\sin n^2 x}{n}),$$
denn: $\dfrac{d}{dx} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n^2 x}{n} = \dfrac{d}{dx}(0) = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d}{dx}(\dfrac{\sin n^2 x}{n})$ divergent.

Satz 5.33 : Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ eine unendliche Reihe von in I *differenzierbaren* Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiere für ein $x_0 \in I$. Die Reihe der Ableitungen (kurz "*Ableitungsreihe*") $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'$ konvergiere *gleichmäßig* in I.
Dann gilt:
f mit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ ist *differenzierbar* in I mit $f'(x) = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x))' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$
(man darf gliedweise differenzieren, Differentiation und Summation dürfen vertauscht werden).

Beweis : Mit den Partialsummen $s_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$ folgt die Behauptung sofort aus Satz 5.32.

Beispiele

1. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ $\quad (f_n$ differenzierbar in $I\!R$ (später)).

   Ableitungsreihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ ist gleichmäßig konvergent in $I\!R$, denn:

   $|\frac{\cos nx}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in I\!R$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent,

   $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n0}{n^3} = 0$ ist konvergent für $x_0 = 0 \quad \Rightarrow$

   f ist differenzierbar in $I\!R$ mit

   $$f'(x) = (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3})' = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\sin nx}{n^3})' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \qquad \forall x \in I\!R.$$

2. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ gleichmäßig konvergent in $I\!R$, da $|\frac{\sin nx}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in I\!R.$

   Ableitungsreihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ divergent für $x = 0$ $(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent) , also

   f ist in $x_0 = 0$ *nicht* (gliedweise) differenzierbar.

3. *Potenzreihen*: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ mit Konvergenzradius $r > 0$, also konvergent in $I = \{x \in I\!R \;:\; |x - x_0| < r\}$.

   Ableitungsreihe: $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$ ist wieder eine Potenzreihe mit *gleichem Konvergenzradius* r, *denn:*

   ist z.B. für die Potenzreihe das Quotientenkriterium erfüllt, also

   $$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{a_n(x - x_0)^n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}||x - x_0| = K|x - x_0| < 1 \;\Rightarrow\; r = \frac{1}{K}$$

   (falls $K > 0$), dann folgt für die Ableitungsreihe:

   $$\lim_{n\to\infty} |\frac{(n + 1)a_{n+1}(x - x_0)^n}{na_n(x - x_0)^{n-1}}| = \lim_{n\to\infty} \frac{n + 1}{n} \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}||x - x_0| = K|x - x_0| < 1$$

   $$\Rightarrow\; r = \frac{1}{K}\;.$$

   Da eine Potenzreihe in jedem abgeschlossenen Teilintervall des Konvergenzintervalls I gleichmäßig konvergiert (vgl. Satz 5.18, S.148), ist also die Ableitungsreihe gleichmäßig konvergent in allen abgeschlossenen Teilintervallen von I.

   Also gilt der folgende Satz für Potenzreihen:

Satz 5.34 : Eine Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ist in ihrem Konvergenzintervall $I = \{x \in I\!R \ : \ |x-x_0| < r\}$ *stetig differenzierbar* mit
$f'(x) = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ (mit gleichem Konvergenzradius r).

Beispiele

1. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x} \quad , \ |x| < 1$

   $\Rightarrow \quad f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \dfrac{1}{(1-x)^2} \quad , \ |x| < 1 \quad \Rightarrow$

   $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad , \ |x| < 1}$$

   Analog kann man durch mehrmalige Differentiation geschlossene Audrücke für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k x^n$ für $|x| < 1$ und $k \in I\!N$ erhalten.

2. $f(x) = \mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} \quad , \ x \in I\!R$

   $\Rightarrow \quad f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x \quad \forall x \in I\!R \quad \Rightarrow$

   e^x ist stetig differenzierbar in $I\!R$ mit

   $$\boxed{(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \quad \forall x \in I\!R}$$

3. $\sin' x = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1})' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos x$,

   $\cos' x = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n})' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = -\sin x$.

   Also sind $\sin x$ und $\cos x$ stetig differenzierbar in $I\!R$ mit

   $$\boxed{\sin' x = \cos x \quad , \quad \cos' x = -\sin x \quad \forall x \in I\!R}$$

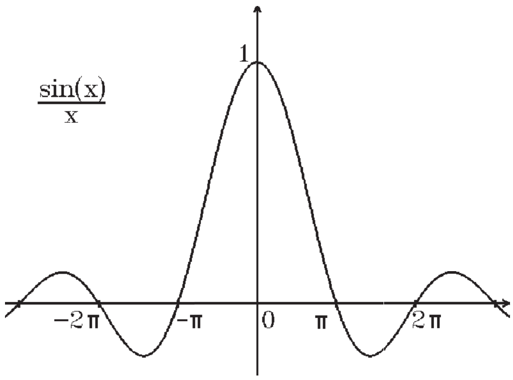
4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{,falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{,falls } x = 0 \end{cases}$

   Potenzreihe von f: $\quad f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$ mit $r = \infty$ (vgl. S.150))

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(2n+1)!} x^{2n-1} = -\frac{2}{3!}x + \frac{4}{5!}x^3 - \ldots \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0.$$

Analog gilt: $\quad f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n(2n-1)}{(2n+1)!} x^{2n-2} = -\frac{2}{3!} + \frac{12}{5!}x^2 - \ldots$

$\Rightarrow \quad f''(0) = -\frac{2}{3!} < 0 \quad \Rightarrow$ relatives Maximum in $x_0 = 0$ (später).



Weitere Ableitungen mit Hilfe der Rechenregeln:

$$\boxed{\begin{aligned} &\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad , \quad x \neq \pi/2 + k\pi \\ &\cot' x = -1 - \cot^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad , \quad x \neq k\pi \end{aligned}}$$

Denn: $\tan' x = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$,

$\cot' x = (\frac{\cos x}{\sin x})' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

$$\boxed{\sinh' x = \cosh x \quad , \quad \cosh' x = \sinh x \quad , \quad x \in \mathbb{R}}$$

Denn: $\sinh' x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})' = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = \cosh x$,

$\cosh' x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})' = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = \sinh x$.

Analog wie bei $\tan x$ und $\cot x$ gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} &\tanh' x = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \\ &\coth' x = 1 - \coth^2 x = -\frac{1}{\sinh^2 x} \quad , \quad x \neq 0 \end{aligned}}$$

Weiter gilt für $a > 0$:

$$\boxed{(a^x)' = (e^{x \ln a})' = (\ln a) a^x \quad , \quad x \in I\!R}$$

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1} \quad , \quad \alpha \in I\!R \, , \; x > 0}$$

Denn: $(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = \dfrac{\alpha}{x} \cdot x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}$.

$$\boxed{\ln' x = \frac{1}{x} \quad , \quad x > 0 \quad , \qquad \ln' |x| = \frac{1}{x} \quad , \quad x \neq 0}$$

Denn: $\ln' x = \dfrac{1}{(e^y)'_{|y=\ln x}} = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$,

$$\ln|x| = \begin{Bmatrix} \ln x & \text{,falls } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{,falls } x < 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \ln' |x| = \begin{Bmatrix} \frac{1}{x} & \text{,falls } x > 0 \\ \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} & \text{,falls } x < 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{x} \; .$$

$$\boxed{{}^a\log' x = \frac{1}{(\ln a) x} \quad , \quad x > 0}$$

Denn: ${}^a\log' x = (\dfrac{\ln x}{\ln a})' = \dfrac{1}{(\ln a) x}$.

Für die arc-Funktionen gelten folgende Ableitungen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad , \; |x| < 1 \quad , & \arccos' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad , \; |x| < 1 \\ \arctan' x = \dfrac{1}{1 + x^2} \quad , \; x \in I\!R \quad , & \operatorname{arccot}' x = -\dfrac{1}{1 + x^2} \quad , \; x \in I\!R \end{array}}$$

Denn: $\arcsin' x = \dfrac{1}{\sin' y_{|y=\arcsin x}} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

(da $|x| < 1$, also $-\pi/2 < \arcsin x < \pi/2$, also $\cos(\arcsin x) > 0$),

$\arctan' x = \dfrac{1}{\tan' y_{|y=\arctan x}} = \dfrac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Die anderen arc-Funktionen analog.

Analog zeigt man für die area-Funktionen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{arsinh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \quad , \; x \in I\!R \quad , & \operatorname{arcosh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad , \; x > 1 \\ \operatorname{artanh}' x = \dfrac{1}{1 - x^2} \quad , \; |x| < 1 \quad , & \operatorname{arcoth}' x = \dfrac{1}{1 - x^2} \quad , \; |x| > 1 \end{array}}$$

Ist f differenzierbar und $f(x) \neq 0$, so gilt:

$$\boxed{(\ln |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

Denn: $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$, also gilt nach der Kettenregel $(\ln|f(x)|)' = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$.

Beispiel (für Kettenregel)

$$f(x) = \mathrm{e}^{\sin\sqrt{x^2+1}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \mathrm{e}^{\sin\sqrt{x^2+1}}(\cos\sqrt{x^2+1}) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \; .$$

Produktregel bei 3 Faktoren

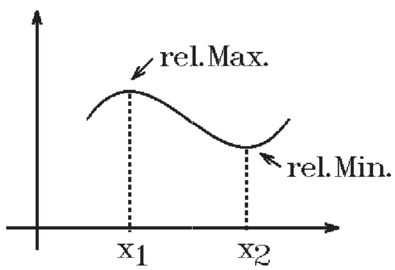
$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$ (falls f, g, h differenzierbar).

Denn: $(fgh)' = (f(gh))' = f'(gh) + f(gh)' = f'gh + f(g'h + gh') = f'gh + fg'h + fgh'$.

Z.B.: $(x \sin x \, \mathrm{e}^{2x})' = \sin x \, \mathrm{e}^{2x} + x \cos x \, \mathrm{e}^{2x} + 2x \sin x \, \mathrm{e}^{2x}$.

Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Definition 5.35 : Sei $f : I \to I\!R$, $x_0 \in I$.
f hat in x_0 ein *relatives Extremum (Maximum bzw. Minimum)*
$\Leftrightarrow \quad \exists [a,b] \subset I$ mit $x_0 \in (a,b)$ und $f(x) \le f(x_0) \;\; \forall x \in [a,b]$ (bzw. $f(x) \ge f(x_0)$).



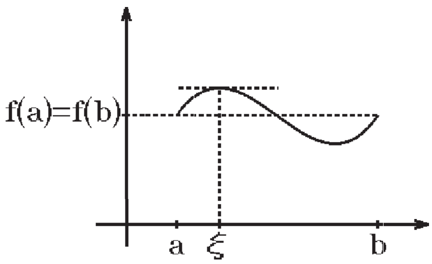
Satz 5.36 : *Notwendige Bedingung für Extremum*
Hat $f : I \to I\!R$ in $x_0 \in I$ ein relatives Extremum, und ist f in x_0 differenzierbar $\Rightarrow \quad f'(x_0) = 0$.

Beweis : f habe in x_0 ein relatives Maximum $\Rightarrow \; f(x_0 \pm \frac{1}{n}) \le f(x_0) \;\; \forall n > N \;\; \Rightarrow$

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} \le 0 \;\; \text{und}$$

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 - \frac{1}{n}) - f(x_0)}{-\frac{1}{n}} \ge 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0.$$

Satz 5.37 : *Satz von Rolle*
Sei $f : [a,b] \to I\!R$ *stetig* in $[a,b]$ und *differenzierbar* in (a,b), und es gelte $f(a) = f(b)$.
$\Rightarrow \quad \exists \xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

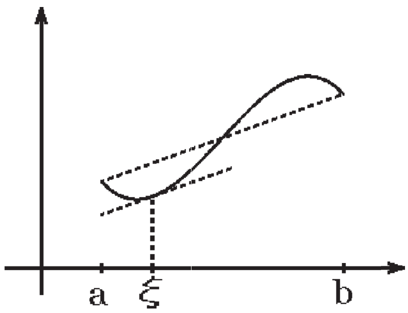


Beweis :
Gilt $\forall x \in [a,b] \;\; f(x) = f(a) \;\Rightarrow\; f$ ist konstant $\Rightarrow \; f'(x) = 0 \;\forall x \in [a,b]$.
f nimmt als stetige Funktion in $[a,b]$ ihr absolutes Minimum und Maximum an (vgl. Satz 5.23, S.151). Ist f nicht konstant, so muß mindestens einer der beiden Werte im Innern von (a,b) liegen (da $f(a) = f(b)$), also ein relatives Extremum sein. Also gilt nach Satz 5.36 an dieser Stelle $f'(\xi) = 0$.

Satz 5.38 : *Mittelwertsatz*
Sei $f : [a,b] \to I\!R$ *stetig* in $[a,b]$ und *differenzierbar* in (a,b).
$\Rightarrow \quad \exists \xi \in (a,b)$ mit

$$\boxed{f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Dh.: Die Steigung der Tangente an der Stelle $\binom{\xi}{f(\xi)}$ ist gleich der Steigung der Sekante durch $\binom{a}{f(a)}$ und $\binom{b}{f(b)}$.



Beweis :
Sei $h : [a,b] \to I\!R$ mit $h(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad \Rightarrow$
$h(a) = f(a) = h(b)$, h erfüllt die Vor. des Satzes 5.37 (Rolle) $\Rightarrow \;\exists \xi \in (a,b)$ mit
$h'(\xi) = 0 = f'(\xi) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Rightarrow$ Behauptung.

Bemerkung : Setzen wir für $b = x$ und für $a = x_0$, so lautet die Aussage des Mittelwertsatzes folgendermaßen:
$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$ mit $x < \xi < x_0$ oder $x_0 < \xi < x$ oder

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \delta(x - x_0))(x - x_0) \quad \text{mit } 0 < \delta < 1}$$

Folgerungen aus dem Mittelwertsatz

Satz 5.39 :
a) Sei $f : [a,b] \to I\!R$ *stetig* in $[a,b]$ und *differenzierbar* in (a,b).
Gilt $f'(x) = 0 \;\; \forall x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad f$ ist *konstant.*

b) Seien $f, g : [a,b] \to I\!R$ *stetig* in $[a,b]$ und *differenzierbar* in (a,b).
Gilt $f'(x) = g'(x) \;\; \forall x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x) + c \;\; \forall x \in (a,b)$ mit $c \in I\!R$,
dh.: f und g unterscheiden sich nur durch eine Konstante c.

c) Sei $f : [a,b] \to I\!R$ *stetig* in $[a,b]$ und *differenzierbar* in (a,b).
Gilt $f'(x) > 0$ (bzw. < 0) $\forall x \in (a,b)$
$\Rightarrow$ f ist *streng monoton wachsend (bzw. fallend)* in $[a,b]$.

Beweis :
a) Sei $x_0 \in (a,b] \;\Rightarrow\; \exists \xi \in (a,x_0)$ mit $f(a) = f(x_0) + f'(\xi)(a - x_0) = f(x_0)$
$\Rightarrow \; f(x_0) = f(a) \; \forall x_0 \in (a,b] \;\Rightarrow\; f$ ist konstant.
b) Für $h = f - g$ gilt a) $\Rightarrow$ h ist konstant $\Rightarrow$ $f = g+$konst.
c) Sei $f'(x) > 0 \; \forall x \in (a,b)$, und sei $a \le x_1 < x_2 \le b$
$\Rightarrow \; f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0$ (da $f'(\xi) > 0$ und $(x_2 - x_1) > 0$)
$\Rightarrow \; f(x_2) > f(x_1)$ (für $f'(x) < 0$ analog).

Beispiele

1. e^x ist streng monoton wachsend in $I\!R$, da $(e^x)' = e^x > 0 \;\; \forall x \in I\!R$.
2. $\ln x$ ist ebenfalls streng monoton wachsend für $x > 0$ (als Umkehrfunktion von e^x).
3. $\sin x$ ist streng monoton wachsend (bzw. fallend) in den Intervallen, in denen $\cos x > 0$ (bzw. < 0), z.B.: streng monoton wachsend in $(-\pi/2, \pi/2)$.
4. $$\boxed{\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \qquad \forall x \in I\!R}$$
   Denn: $\operatorname{arsinh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ und
   $$\ln'(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
   $\Rightarrow \;\; \operatorname{arsinh}' x = \ln'(x + \sqrt{1+x^2}) \;\; \forall x \in I\!R$
   $\Rightarrow \;\; \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c \;\; \forall x \in I\!R$
   $x = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 0 + c \;\Rightarrow\; c = 0 \;\Rightarrow$ Behauptung.
5. $$\boxed{\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} \quad \forall x > 0}$$
   Denn: $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\dfrac{d}{dx}\Big(\arctan \dfrac{1}{x}\Big) = \dfrac{1}{1 + (\frac{1}{x})^2}(\dfrac{-1}{x^2}) = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(\arctan x + \arctan \frac{1}{x}) = 0 \quad \forall x > 0$$
$$\Rightarrow \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = c \quad \forall x > 0,$$
$$x = 1 \;\Rightarrow\; \pi/4 + \pi/4 = \pi/2 = c \;\Rightarrow\; c = \pi/2.$$

6.

$$\boxed{\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad , \ |x| < 1}$$

Denn: $\ln'(1-x) = \dfrac{-1}{1-x} \quad , \quad (-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n})' = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = -\dfrac{1}{1-x}$

$$\Rightarrow \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + c \ , \ x = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 0 + c \;\Rightarrow\; c = 0.$$

Hieraus folgt

$$\ln(1+x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad , \ |x| < 1,$$
$$\ln x = \ln(1 + (x-1)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n \quad , \ |x-1| < 1 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n \quad , \ 0 < x < 2}$$

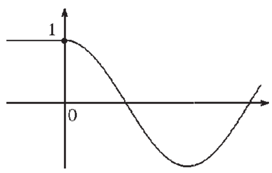
Mit Hilfe dieser Reihe lassen sich die Werte von $\ln x$ für x in der Nähe von $x_0 = 1$ berechnen. Bei der Berechnung anderer Werte benutzt man die Eigenschaften der ln-Funktion.

Satz 5.40 : Sei f *stetig* in $U(x_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$ mit $h > 0$ und *differenzierbar* in $U(x_0)\backslash\{x_0\}$. Es existiere $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = a \in I\!R$.
$\Rightarrow \quad f$ ist *differenzierbar* in x_0 mit $f'(x_0) = a$.

Beweis :
$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$, $x \in U(x_0)$, ξ zwischen x und x_0 $\Rightarrow$
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi) \ , \ x \in U(x_0)\backslash\{x_0\} \quad \Rightarrow$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\xi \to x_0} f'(\xi) = a = f'(x_0).$$

Beispiele

1.
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{,falls } x \le 0 \\ \cos x & \text{,falls } x > 0 \end{cases}$$



$$f'(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{falls } x < 0 \\ -\sin x & ,\text{falls } x > 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$

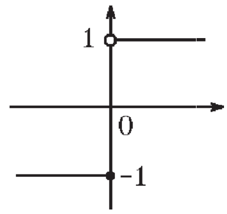
$\Rightarrow \quad f$ stetig in $x_0 = 0$,

$\lim\limits_{x \to 0-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0+} f'(x) = 0$

$\Rightarrow \quad f$ differenzierbar in $x_0 = 0$ mit $f'(0) = 0$.

2.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ,\text{falls } x \leq 0 \\ 1 & ,\text{falls } x > 0 \end{cases}$$

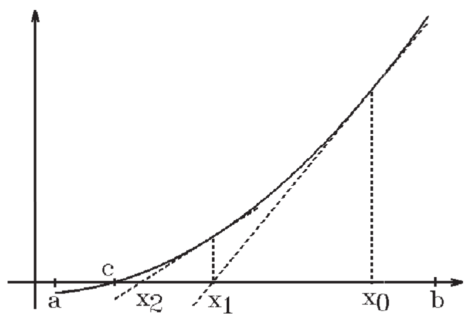


$$f'(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{falls } x < 0 \\ 0 & ,\text{falls } x > 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0+} f'(x) = 0.$

Aber f nicht differenzierbar in $x_0 = 0$,
da f nicht stetig in $x_0 = 0$.

Newton Verfahren



Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
stetig differenzierbar in $[a, b]$
mit
$f(a)f(b) < 0$ (Vorzeichenwechsel)

$\Rightarrow \quad \exists c \in (a, b)$ mit $f(c) = 0$.

Gesucht: c Nullstelle von f in (a, b).

Näherungsverfahren (Newton-Verfahren) zur Berechnung von c

Wähle $x_0 \in [a, b]$ Startwert (Anfangsnäherung),

$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ Tangente an f im Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$

(*Linearisierung* der Funktion f).

Bestimme x_1 als Nullstelle von $T(x)$, also

$T(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$

$\Leftrightarrow x_1 - x_0 = -\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ (falls $f'(x_0) \neq 0$) $\Leftrightarrow x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ (nächste Näherung).

Allgemein für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \text{ falls } f'(x_n) \neq 0}$$

Es gilt: Falls x_0 "nahe genug" bei c $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$.

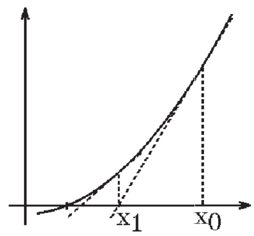
Beweis : später.

Fehlerabschätzung für $|x_n - c|$:

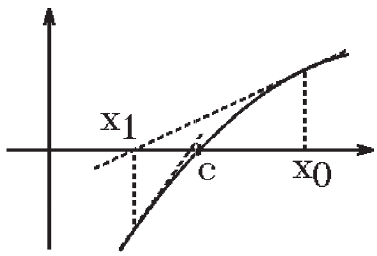
Es gilt nach dem Mittelwertsatz: $0 = f(c) = f(x_n) + f'(\xi_n)(c - x_n) \quad \Rightarrow$

$$\boxed{|x_n - c| = |\frac{f(x_n)}{f'(\xi_n)}| \leq \frac{1}{M}|f(x_n)| \quad \text{mit} \quad M = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|}$$

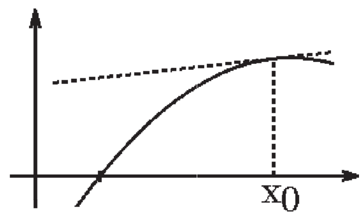
Beispiele für Konvergenz bzw. Divergenz



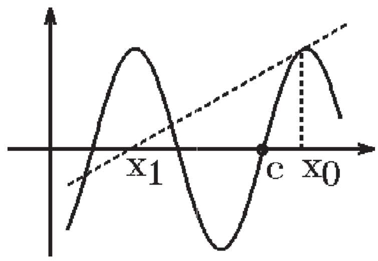
Konvergenz



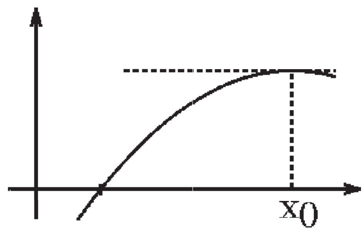
Konvergenz



keine oder schlechte Konvergenz



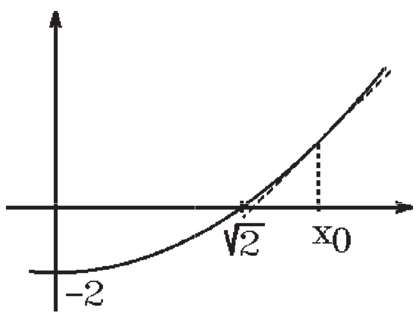
Konvergenz gegen andere Nullstelle



$f'(x_0) = 0$, Verfahren geht nicht

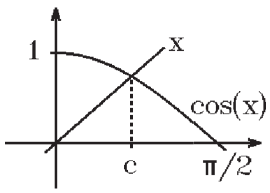
Beispiele

1. $f(x) = x^2 - 2$.
   Gesucht: positive Nullstelle $c = \sqrt{2}$.
   $[a, b] = [1, 2]$, $f(1) < 0$, $f(2) > 0$
   $\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel,
   $f'(x) = 2x$, $M = \min_{x\in[1,2]} |f'(x)| = 2$,
   $$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$
   $\Rightarrow \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ (Heron-Verfahren).



Fehlerabschätzung: $|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|f(x_n)|$.
Wähle z.B. $x_0 = 2 \;\Rightarrow\; x_1 = 0.5(2 + 2/2) = 1.5$
$\Rightarrow\; x_2 = 0.5(1.5 + 2/1.5) = 1.41666666\ldots \quad \Rightarrow\; x_3 = 1.4142157\ldots$
$\Rightarrow\; x_4 = 1.4142136\ldots$
$|x_4 - \sqrt{2}| \leq 0.5|f(x_4)| \leq 1.5 \cdot 10^{-10}$.
Man sieht bei diesem Beispiel, daß die Konvergenz sehr schnell ist (quadratische Konvergenz (später)).

2. $f(x) = \cos x - x$.
   Gesucht: $c \in [0, \pi/2]$.
   $f(0) > 0\;,\; f(\pi/2) < 0$
   $\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel,
   $f'(x) = -\sin x - 1$,
   $\min\limits_{x\in[0,\pi/2]} |f'(x)| = 1$,



$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\sin x_n - 1} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{\sin x_n + 1} \;.$$

Fehlerabschätzung: $|x_n - c| \leq \frac{1}{1}|f(x_n)|$.
Wähle z.B. $x_0 = 1 \;\Rightarrow\; x_1 = 0.7503\ldots \;\Rightarrow\; x_2 = 0.7391129\ldots \;\Rightarrow\; x_3 = 0.7390851\ldots$
$|x_3 - c| \leq |f(x_3)| \leq 9.4 \cdot 10^{-10}$,
oder andere Fehlerabschätzung (die letzten Stellen leicht variieren bis Vorzeichenwechsel eintritt):
$f(0.7390851) > 0 \;\;,\;\; f(0.7390852) < 0 \quad\Rightarrow\quad 0.7390851 < c < 0.7390852.$

Höhere Ableitungen

Definition 5.41 : Ist $f : I \to I\!R$ in I differenzierbar mit der Ableitungsfunktion $f' : I \to I\!R$, und ist f' in $x_0 \in I$ differenzierbar , so heißt f in x_0 *2 mal differenzierbar* mit $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = \frac{df'}{dx}(x_0) = f''(x_0)$.
Existieren analog alle Ableitungen bis zur Ordnung $(n-1)$ in I, und ist $f^{(n-1)} : I \to I\!R$ (die $(n-1)$-te Ableitungsfunktion) in x_0 differenzierbar, so heißt f in x_0 *n-mal differenzierbar* mit $\frac{d^n f}{dx^n}(x_0) = \frac{df^{(n-1)}}{dx}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$.

Existiert $f^{(n)}$ in I und ist $f^{(n)} : I \to I\!R$ stetig in I, so heißt f *n-mal stetig differenzierbar* in I.

Schreibweise:

$$\boxed{C^n(I) = \{f : I \to I\!R \;:\; f \text{ n-mal stetig differenzierbar in } I\}}$$

Spezialfälle für $n = 0$ bzw. $n = \infty$:

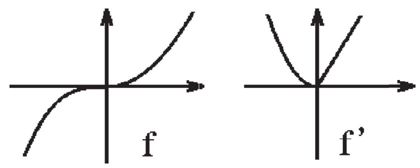
$C(I) = \{f : I \to I\!R \;:\; f \text{ stetig in } I\}$,
$C^\infty(I) = \{f : I \to I\!R \;:\; f \text{ beliebig oft stetig differenzierbar in } I\}$.

Beispiele

1. $f(x) = \mathrm{e}^x$, $f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \;\; f \in C^\infty(\mathbb{R})$.
2. $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, usw $\Rightarrow \;\; f \in C^\infty(\mathbb{R})$.
3. $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{,falls } x < 0 \\ x^2 & \text{,falls } x \geq 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{,falls } x < 0 \\ 2x & \text{,falls } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{,falls } x < 0 \\ 2 & \text{,falls } x > 0 \end{cases}$$



$f''(0)$ existiert nicht $\Rightarrow \;\; f \in C^1(\mathbb{R})$, aber $f \notin C^2(\mathbb{R})$.

4. $f(x) = |x|$, $f'(0)$ existiert nicht $\Rightarrow \;\; f \in C(\mathbb{R})$, aber $f \notin C^1(\mathbb{R})$.

Satz 5.42 : *Taylor-Polynom*
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar in $[a,b]$, sei $x_0 \in (a,b)$. Dann läßt sich f darstellen durch das Taylorpolynom T_{n,x_0} vom Grad $\leq n$ und das Restglied R_{n,x_0}, also $f(x) = T_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x)$ mit

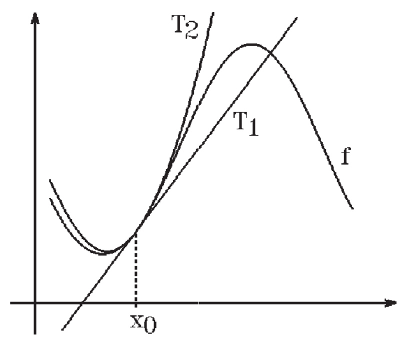
$$\boxed{T_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad , \quad R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

mit $\xi = x_0 + \delta(x - x_0)$, $0 < \delta < 1$, also ξ zwischen x_0 und x.

Ohne Summenzeichen lautet das Taylorpolynom:

$$T_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \; .$$

Beispiele



$n = 1$:
$T_{1,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$,

Tangente in $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$,

f wird durch T_{1,x_0} *linearisiert.*

$n = 2$:
$T_{2,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$,

Parabel durch $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ mit gleicher 1. und 2. Ableitung an der Stelle x_0 wie f.

In der Nähe von x_0 ist $|R_{n,x_0}|$ "klein", also T_{n,x_0} eine *"gute Annäherung" an* f, also $f(x) \approx T_{n,x_0}(x)$ für $|x - x_0| < \epsilon$.

Denn: Für $|x - x_0| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |R_{n,x_0}(x)| \leq \dfrac{1}{(n+1)!} \max\limits_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \cdot \epsilon^{n+1}$.

Beweis des Satzes 5.42

$n = 0: \ \Rightarrow$ Mittelwertsatz.

$n > 0$: Sei für $t \in [a, b]$, $x \neq x_0$ fest,

$$g(t) := f(x) - T_{n,t}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \quad \Rightarrow$$

$$g(x) = 0 \quad , \quad g(x_0) = f(x) - T_{n,x_0}(x) = R_{n,x_0}(x) \ ,$$

$$g'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

$$\Rightarrow \quad g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Sei $\quad G(t) := g(t) - g(x_0)(\dfrac{x-t}{x-x_0})^{n+1} \quad , \ (x \neq x_0)$

$\Rightarrow \quad G(x_0) = 0 \quad , \quad G(x) = g(x) = 0$. Da G in $[a, b]$ differenzierbar und damit auch stetig, folgt aus Satz 5.37 (Satz von Rolle):

$$\exists \xi \in (a,b) \text{ mit } G'(\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad G'(\xi) = g'(\xi) + g(x_0)\frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(x-x_0)^{n+1}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad g(x_0)\frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(x-x_0)^{n+1}} = -g'(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$$

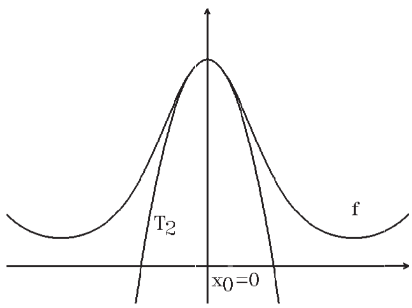
$$\Rightarrow \quad g(x_0) = R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Beispiele

1. $f(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$.
   Sei $x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \Rightarrow$
   $$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \quad , \ \xi = 0 + \delta(x - 0) = \delta x, \quad (0 < \delta < 1).$$
   Für $x \in [0,1]$ gilt also:
   $$|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}| = |R_{n,0}(x)| = \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} \quad (\text{da } \xi = \delta x \in [0,1])$$
   $$\Rightarrow \quad \max_{x \in [0,1]} |\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}| = \max_{x \in [0,1]} |R_{n,0}(x)| \leq \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} \ .$$
   Z.B.: $n = 7 \quad \Rightarrow \quad \max\limits_{x \in [0,1]} |\mathrm{e}^x - \sum\limits_{k=0}^{7} \dfrac{x^k}{k!}| = \max\limits_{x \in [0,1]} |R_{7,0}(x)| \leq \dfrac{3}{8!} \leq 0.000075$.

Z.B.: $x = 1 \quad \Rightarrow \quad |\mathrm{e} - (1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{7!})| \leq 0.000075 \quad \Rightarrow$
$|\mathrm{e} - 2.718253| \leq 0.000075$.

2. $f(x) = \mathrm{e}^{\cos x} \;\Rightarrow\; f(0) = \mathrm{e}$,
$f'(x) = -\sin x\, \mathrm{e}^{\cos x} \;\Rightarrow\; f'(0) = 0$,
$f''(x) = (-\cos x + \sin^2 x)\mathrm{e}^{\cos x}$
$\Rightarrow\; f''(0) = -\mathrm{e}$,
$f'''(x) = (\sin x + 3\sin x\cos x - \sin^3 x)\mathrm{e}^{\cos x}$
$= \sin x(1 + 3\cos x - \sin^2 x)\mathrm{e}^{\cos x}$
$= \sin x(\cos^2 x + 3\cos x)\mathrm{e}^{\cos x}$
$= \sin x\cos x(\cos x + 3)\mathrm{e}^{\cos x}$
$= \frac{1}{2}\sin 2x(\cos x + 3)\mathrm{e}^{\cos x}$.



$T_{2,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{2}x^2$,

$$\max_{|x|\leq\pi/8} |\mathrm{e}^{\cos x} - (\mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x^2)| = \max_{|x|\leq\pi/8} |R_{2,0}(x)| \leq \frac{1}{3!}|\frac{1}{2}\sin(\pi/4)(1+3)\mathrm{e}|(\pi/8)^3$$
$$\leq \frac{\mathrm{e}}{3\sqrt{2}}(\pi/8)^3 \leq 0.04 \,.$$

Also $\displaystyle\max_{|x|\leq\pi/8} |\mathrm{e}^{\cos x} - (\mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x^2)| \leq 0.04$.

Allgemein gilt für $\displaystyle\max_{x\in[a,b]} |f(x) - T_{n,x_0}(x)| = \max_{x\in[a,b]} |R_{n,x_0}(x)|$

$$\boxed{\max_{x\in[a,b]} |R_{n,x_0}(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}\max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \max_{x\in[a,b]} |x - x_0|^{n+1}}$$

Satz 5.43 : *Taylorentwicklung um x_0*
Sei $f : [a,b] \to I\!R$ beliebig oft differenzierbar in $[a,b]$, also $f \in C^\infty([a,b])$, und sei $x_0 \in (a,b)$.
Gilt für das Restglied R_{n,x_0} : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_{n,x_0}(x) = 0 \quad (x \in [a,b]) \quad \Rightarrow$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}$$

Taylorreihe von f um x_0, dh.: f läßt sich um x_0 *in eine Potenzreihe entwickeln.*

Beweis : Die Partialsummen der Taylorreihe sind die Taylorpolynome $T_{n,x_0}(x)$.
Da $f(x) = T_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x)$ und $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_{n,x_0}(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty} T_{n,x_0}(x) = f(x)$.

Beispiele

1. $f(x) = \mathrm{e}^x \quad , \quad |R_{n,0}(x)| = \dfrac{\mathrm{e}^{\delta x}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq K \cdot \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad$ für $n \to \infty$
mit $K = \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{e}^x & \text{,falls } x \geq 0 \\ 1 & \text{,falls } x < 0 \end{array}\right\}$, da $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ konvergent $\Rightarrow \quad \dfrac{|x|^n}{n!} \to 0 \quad$ für $n \to \infty$

$$\Rightarrow \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in I\!R \quad \text{(vgl. Definition der e-Funktion).}$$

2. $f(x) = \ln(1-x) \ , \ x_0 = 0 \ ,$
   $f'(x) = \dfrac{-1}{1-x} \ , \ f''(x) = \dfrac{-1}{(1-x)^2} \ , \ \ldots \ , \ f^{(k)}(x) = \dfrac{-(k-1)!}{(1-x)^k}$
   $\Rightarrow \quad \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = -\dfrac{1}{k} \quad , \quad f(0) = 0 \ .$
   $|R_{n,0}(x)| = \dfrac{n!}{(1-\xi)^{n+1}} \cdot \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ für $n \to \infty$ und $|x| < 1$ (ohne Beweis) $\Rightarrow$
   $$\boxed{\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \quad , \quad |x| < 1}$$

3. $f(x) = (1+x)^\alpha \quad , \quad \alpha \in I\!R$ fest , $x > -1 \quad , \quad x_0 = 0 \ ,$
   $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \quad , \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \ , \ \ldots$
   $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \ ,$
   da $\dbinom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{f^{(k)}(x)}{k!} = \dbinom{\alpha}{k}(1+x)^{\alpha-k} \quad \Rightarrow$
   $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = \dbinom{\alpha}{k} \ .$
   $R_{n,0}(x) = \dbinom{\alpha}{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1} \to 0$ für $n \to \infty \quad , \quad |x| < 1$ (ohne Beweis) $\Rightarrow$
   $$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad , \quad |x| < 1}$$

   Z.B.: $$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^k = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \ldots \quad , \quad |x| < 1.$$

   Z.B.: $$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^{2k} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{5}{16}x^6 + \ldots \quad , \quad |x| < 1.$$

   Denn: $$\binom{-1/2}{k} = \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{k!} \ .$$

4. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{,falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{,falls } x = 0 \end{cases}$
   $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0) \quad \Rightarrow \quad f$ ist stetig in $I\!R$.
   Für $x \neq 0$ gilt: $\quad f'(x) = \dfrac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$, also folgt:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x^3}}{\mathrm{e}^{1/x^2}} = \lim_{u\to\pm\infty} \frac{2u^3}{\mathrm{e}^{u^2}} = 0$$

(da die e-Funktion stärker wächst als jede Potenz).

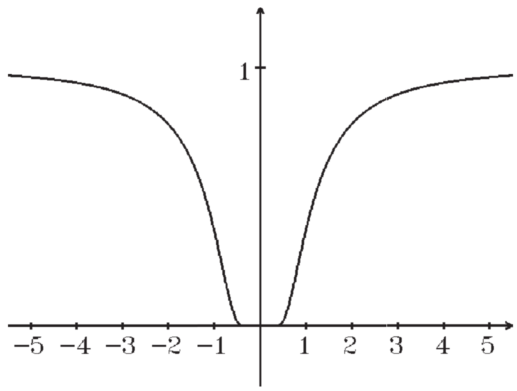
Allgemein gilt für $x \neq 0$:

$$\lim_{x\to 0} f^{(k)}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{p_k(1/x)}{\mathrm{e}^{(1/x)^2}} = \lim_{u\to\pm\infty} \frac{p_k(u)}{\mathrm{e}^{u^2}} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$, wobei p_k ein Polynom ist

$\Rightarrow \quad f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$.

Für die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$ gilt also: $\quad T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!}x^k = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad f$ wird nur in $x = 0$ durch die Taylorreihe dargestellt.



Graph von $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$

Zusammenhang zwischen Taylorreihe und Potenzreihe

Ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ mit Konvergenzradius $r > 0$, so ist f als Potenzreihe im Innern des Konvergenzintervalls $I = \{x \in \mathbb{R} \;:\; |x - x_0| < r\}$ differenzierbar mit $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1}$ und gleichem Konvergenzradius r. f' ist also wieder eine Potenzreihe mit gleichem Konvergenzintervall I, also auch in I differenzierbar mit $f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k(x-x_0)^{k-2}$ und gleichem r.

Also folgt allgemein: $\quad f \in C^\infty(I)$ (dh. f beliebig oft differenzierbar in I) mit

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1)a_k(x-x_0)^{k-n} = \sum_{k=n}^{\infty} n!\binom{k}{n}a_k(x-x_0)^{k-n}$$

$$= n!a_n + n!(n+1)a_{n+1}(x-x_0) + \ldots \quad \Rightarrow \quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = a_n \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

Also stimmt die Taylorreihe um x_0 mit der ursprünglichen Potenzreihe überein. Die Koeffizienten der Potenz- bzw. Taylorreihe sind also eindeutig bestimmt. Also kann man die Taylorreihe einer Funktion nicht nur über ihre Ableitungen im Punkt x_0, sondern oft auch durch bekannte Potenzreihen (z.B. durch Addition, Multiplikation, Division, Differentiation oder einfache Substitution) bestimmen.

Beispiele

1. $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \ |x| < 1 \quad ,$ einfache Substitution ergibt:

   $$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \quad , \ |x| < 1.$$

2. $\dfrac{1}{2+3x}$ um $x_0 = 1$ entwicken:

   $$\frac{1}{2+3x} = \frac{1}{2+3(x-1)+3} = \frac{1}{5+3(x-1)} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\frac{3(x-1)}{5}} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{3(x-1)}{5})^n$$

   $$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{5^{n+1}}(x-1)^n \quad , \ |\frac{3(x-1)}{5}| < 1 \text{ , also } |x-1| < 5/3 = r.$$

3. e^x um $x_0 = 2$ entwickeln:

   $$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{x-2+2} = \mathrm{e}^2\mathrm{e}^{x-2} = \mathrm{e}^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. $f(x) = \operatorname{artanh} x$ um $x_0 = 0$ entwickeln (Addition von Potenzreihen):

   $$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}x^k)$$

   $$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}+1}{k}x^k = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad , \quad |x| < 1 \quad \Rightarrow$$

   $$\boxed{\operatorname{artanh} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad , \ |x| < 1}$$

5. $f(x) = \dfrac{4}{3+2x-x^2}$ um $x_0 = 0$ entwickeln (Partialbruchzerlegung):

   $$\frac{4}{3+2x-x^2} = \frac{4}{(1+x)(3-x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{3-x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}$$

   $$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{x}{3})^k \quad (|x| < 1 \text{ , bzw. } |x| < 3)$$

   $$= \sum_{k=0}^{\infty}((-1)^k + \frac{1}{3^{k+1}})x^k \quad , \text{ falls } |x| < 1.$$

6. $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ um $x_0 = 0$ entwickeln:

$$\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x = Re(\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}) = Re(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+i\beta)^k x^k}{k!}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{Re(\alpha+i\beta)^k}{k!}x^k \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mit $\alpha+i\beta = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\mathrm{e}^{i\varphi}$, $\varphi = arg(\alpha+i\beta) \quad \Rightarrow \quad Re(\alpha+i\beta)^k = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}^k \cos k\varphi$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}^k\cos k\varphi}{k!}x^k \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Z.B.: $\alpha = \beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = arg(1+i) = \pi/4 \quad \Rightarrow$

$$\mathrm{e}^x \cos x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}^k\cos(k\pi/4)}{k!}x^k \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

7. Multiplikation von Potenzreihen:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x} = (\sum_{k=0}^{\infty}x^k)(\sum_{k=0}^{\infty}x^k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{l=0}^{k}x^l x^{k-l}) = \sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{l=0}^{k}x^k) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k \quad , \quad |x| < 1.$$

8. Differentiation von Potenzreihen:

Das Ergebnis des vorigen Beispiels erhält man einfacher, indem man die Potenzreihe von $\dfrac{1}{1-x}$ differenziert:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty}x^k \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \text{differenzieren auf beiden Seiten ergibt:}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k \quad , \quad |x| < 1.$$

9. *Division von Potenzreihen*:

Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$, $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-x_0)^k$ mit Konvergenzradien $r_1, r_2 > 0$, und es existiere $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Dann läßt sich $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ in einer gewissen Umgebung von x_0 in eine Taylorreihe um x_0 entwickeln mit $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k$.

(Beweis siehe Literatur).

Berechnung der c_k:
Es muß gelten:

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k = (\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k)(\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-x_0)^k) = \sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{k}c_j b_{k-j})(x-x_0)^k \quad \Rightarrow$$

$$a_k = \sum_{j=0}^{k} c_j b_{k-j} = c_0 k_k + c_1 b_{k-1} + \ldots + c_k b_0 \quad \text{(Koeffizientenvergleich)} \Rightarrow$$

$$a_0 = c_0 b_0 \quad , \quad a_1 = c_0 b_1 + c_1 b_0 \quad , \quad \ldots \quad , \quad a_k = c_0 b_k + \ldots + c_k b_0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{b_0} \quad , \quad \text{falls} \;\; b_0 \neq 0 \\ c_1 &= \frac{1}{b_0}(a_1 - c_0 b_1) \\ &\vdots \\ c_k &= \frac{1}{b_0}(a_k - c_0 b_k - c_1 b_{k-1} - \ldots - c_{k-1} b_1) \end{aligned}}$$

Beispiel

$f(x) = 1 \quad , \quad g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \quad , \quad \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ um $x_0 = 0$ entwickeln:

$$g(x) = \frac{1}{x}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \ldots .$$

Mit $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ gilt dann: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ und

$$1 = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}\Big) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 1 &= (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots)\Big(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \ldots\Big) \\ &= c_0 + \Big(\frac{c_0}{2} + c_1\Big)x + \Big(\frac{c_0}{6} + \frac{c_1}{2} + c_2\Big)x^2 + \Big(\frac{c_0}{24} + \frac{c_1}{6} + \frac{c_2}{2} + c_3\Big)x^3 + \ldots \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$c_0 = 1 \quad , \quad c_1 = -\frac{c_0}{2} = -\frac{1}{2} \quad , \quad c_2 = -\frac{c_0}{6} - \frac{c_1}{2} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \; ,$$

$$c_3 = -\frac{c_0}{24} - \frac{c_1}{6} - \frac{c_2}{2} = -\frac{1}{24} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = 0 \text{ , usw.} \;\Rightarrow$$

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}x^2 + 0 \cdot x^3 + c_4 x^4 + \ldots \quad , \quad x \in U(0).$$

Weitere Anwendungen der Differentialrechnung

a) **Kurvendiskussion**

Sei $f : [a,b] \to I\!R$ 3-mal differenzierbar in $[a,b]$, so erhalten wir mit Hilfe der Nullstellen von f' und f'' Aussagen über Extrema und Wendepunkte von f.

Als *notwendige Bedingung* für ein *relatives Extremum* in x_0 einer differenzierbaren Funktion f hatten wir bereits:

$\boxed{f'(x_0) = 0}$ (vgl. Satz 5.36, S.164).

Ebenfalls hatten wir bereits die Aussagen:

$f'(x) > 0$ in $(a, b) \quad \Rightarrow \quad f$ ist streng monoton wachsend,
$f'(x) < 0$ in $(a, b) \quad \Rightarrow \quad f$ ist streng monoton fallend.

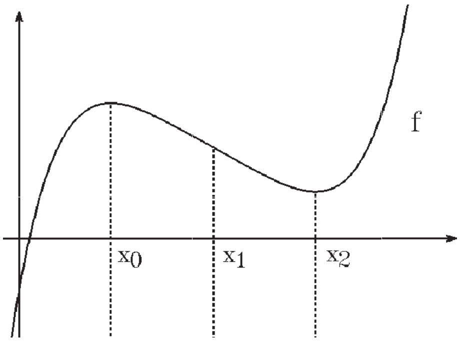
Beispiel

x_0 *relatives Maximum*

$f'(x_0) = 0$,

$f''(x_0) < 0$,

f' hat Vorzeichenwechsel
bei x_0 von $(+ \to -)$.

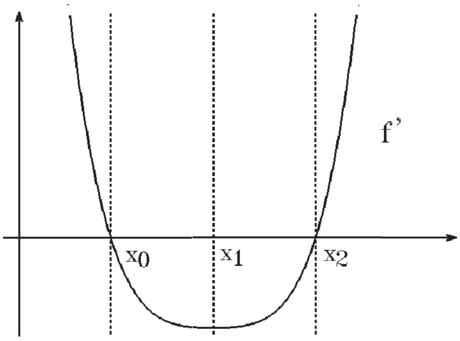


x_2 *relatives Minimum*

$f'(x_2) = 0$,

$f''(x_2) > 0$,

f' hat Vorzeichenwechsel
bei x_2 von $(- \to +)$.

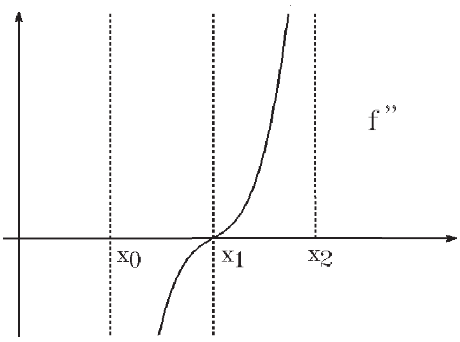


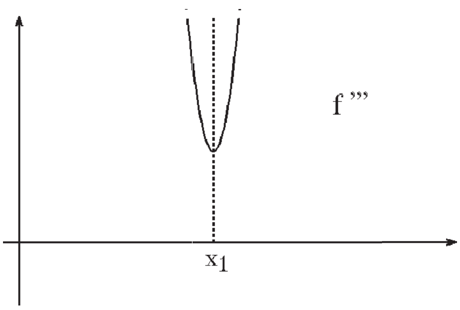
x_1 *Wendepunkt*

$f''(x_1) = 0$,

$f'''(x_1) \neq 0$,

f'' hat Vorzeichenwechsel
bei x_1 .





Im folgenden Satz geben wir für n-mal stetig differenzierbare Funktionen hinreichende Kriterien für relative Extrema an:

Satz 5.44 : *Hinreichende Kriterien für relative Extrema*

Sei $f : [a,b] \to I\!R$ in $[a,b]$ n-mal stetig differenzierbar.

a) Es gelte für ein $x_0 \in (a,b)$

$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad , \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$

Ist n *gerade* $\Rightarrow$ f hat in x_0 ein *relatives Extremum*, und zwar

$$\begin{cases} \text{ein } \textit{relatives Maximum}, \text{ falls } f^{(n)}(x_0) < 0 \,, \\ \text{ein } \textit{relatives Minimum}, \text{ falls } f^{(n)}(x_0) > 0 \,. \end{cases}$$

Ist n *ungerade* $\Rightarrow$ f hat in x_0 *kein* Extremum.

b) Gilt $f'(x_0) = 0$ und hat f' bei x_0 einen *Vorzeichenwechsel*

$$\begin{cases} \text{von } (+ \to -) \;\Rightarrow\; f \text{ hat in } x_0 \text{ ein } \textit{relatives Maximum}, \\ \text{von } (- \to +) \;\Rightarrow\; f \text{ hat in } x_0 \text{ ein } \textit{relatives Minimum}. \end{cases}$$

Beweis :

a) Nach Satz 5.42 (Taylorpolynom) existiert $\xi = x_0 + \delta(x - x_0)$ mit $0 < \delta < 1$ und

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,$$

da $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \Rightarrow$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists U_\delta(x_0)$ mit $f^{(n)}(x) > 0 \;\; \forall x \in U_\delta(x_0)$

(da $f^{(n)}$ stetig in $[a,b]$)

$\Rightarrow \quad f(x) > f(x_0) \;\; \forall x \in U_\delta(x_0) \backslash \{x_0\}$

$\Rightarrow \quad f$ hat in x_0 ein relatives Minimum (analog für $f^{(n)}(x_0) < 0$).

Ist n ungerade $\Rightarrow$ $(x - x_0)^n$ nimmt rechts und links von x_0 verschiedene Vorzeichen an $\Rightarrow$ kein Extremum in x_0.

b) $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$ (Mittelwertsatz)

f' habe Vorzeichenwechsel von $(+ \to -) \;\Rightarrow$

für $x < x_0 \;\Rightarrow\; \xi < x_0 \;\Rightarrow\; f'(\xi)(x-x_0) < 0 \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_0)$

(da $f'(\xi) > 0 \,,\; (x - x_0) < 0$),

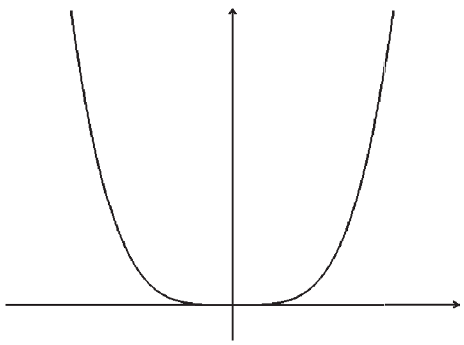
für $x > x_0 \;\Rightarrow\; \xi > x_0 \;\Rightarrow\; f'(\xi)(x-x_0) < 0 \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_0)$

(da $f'(\xi) < 0 \,,\; (x - x_0) > 0$)

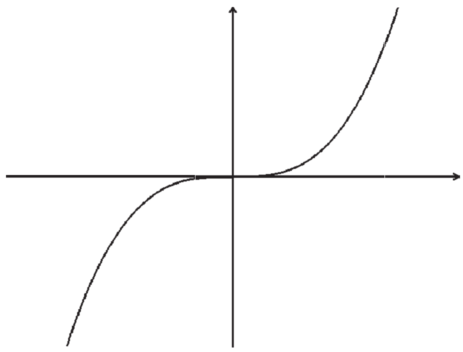
$\Rightarrow$ f hat in x_0 ein relatives Maximum (analog für Minimum).

Beispiele

1. $f(x) = x^4 \quad , \quad f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0 \quad , \quad f^{(4)}(0) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ hat in $x_0 = 0$ ein relatives Minimum,
   oder: $f'(x) = 4x^3$ hat Vorzeichenwechsel bei $x_0 = 0$ von $(- \to +) \quad \Rightarrow \quad f$ hat in $x_0 = 0$ ein relatives Minimum.
2. $f(x) = x^3 \quad , \quad f'(0) = f''(0) = 0 \quad , \quad f'''(0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f$ hat in $x_0 = 0$ kein Extremum,
   oder: $f'(x) = 3x^2$ hat keinen Vorzeichenwechsel bei $x_0 = 0 \;\Rightarrow\; f$ hat kein Extremum bei $x_0 = 0$.



$f(x) = x^4$



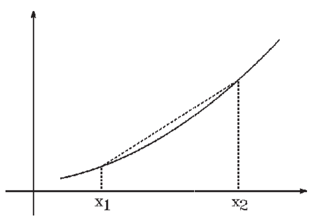
$f(x) = x^3$

Definition 5.45 : Sei $f : I \to I\!R$.
f heißt *konvex* (bzw. *konkav*) in $I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt

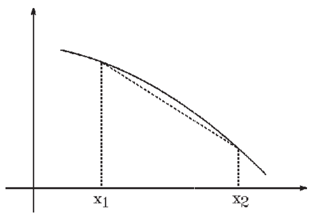
$$f(x) \leq f(x_1)\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \forall x \in I \text{ mit } x_1 \leq x \leq x_2 \ .$$

(bzw. $\geq$)

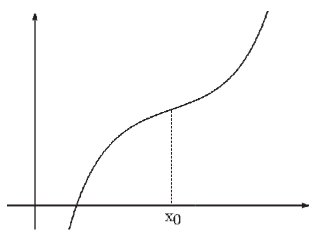
Dh.: Für je 2 Punkte $x_1 < x_2$ aus I verläuft der Graph von f zwischen x_1 und x_2 unterhalb (bzw. oberhalb) der Sehne zwischen $\begin{pmatrix} x_1 \\ f(x_1) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_2 \\ f(x_2) \end{pmatrix}$.



konvex



konkav



Wendepunkt

Definition 5.46 : Sei $f : [a, b] \to I\!R$ und $x_0 \in (a, b)$.
An der Stelle x_0 besitzt f einen *Wendepunkt* $\Leftrightarrow$ der Graph von f wechselt zwischen konvexem und konkavem Verhalten.

Satz 5.47 : Sei $f : I \to I\!R$ 2-mal differenzierbar in I.
Gilt $f''(x) \geq 0$ (bzw. $\leq$) $\forall x \in I \quad \Rightarrow \quad f$ ist *konvex* (bzw. *konkav*) in I.

Beweis :
Sei $f''(x) \geq 0 \ \ \forall x \in I \ \Rightarrow \ f'$ ist monoton wachsend $\Rightarrow$ für $\xi < \eta$ gilt $f'(\xi) \leq f'(\eta)$.
Nach dem Mittelwertsatz gilt:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi) \ \ , \ \ \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\eta) \ \text{ mit } x_1 < \xi < x < \eta < x_2$$

$$\Rightarrow \ \ \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

$$\Rightarrow \ \ f(x) \leq f(x_1)\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \ \ \forall x \in I \text{ mit } x_1 \leq x \leq x_2 \ .$$

Analog für $f''(x) \leq 0$.

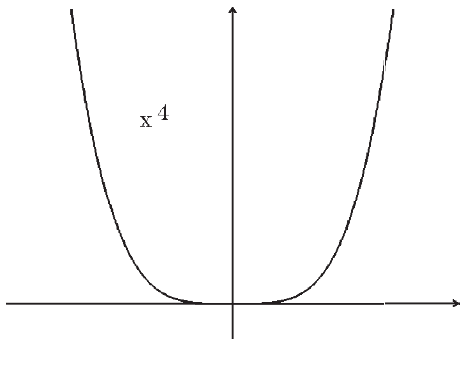
Bemerkung : f konvex in $I \ \ \Leftrightarrow \ \ (-f)$ konkav in I.

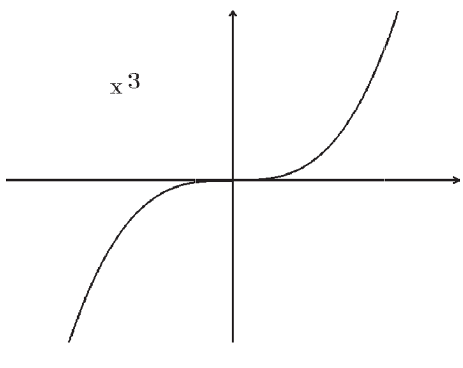
Satz 5.48 : Sei $f : [a,b] \to I\!R$ 3-mal differenzierbar in $[a,b]$ und $x_0 \in (a,b)$.
Gilt $f''(x) = 0$ und $\{ \ f''$ hat Vorzeichenwechsel bei x_0 oder $f'''(x_0) \neq 0 \ \}$
$\Rightarrow \ \ f$ hat in x_0 einen *Wendepunkt*.

Beweis :
$f''(x_0) = 0$ und f'' hat Vorzeichenwechsel bei $x_0 \ \Rightarrow$ Wechsel zwischen konvex und konkav $\Rightarrow$ in x_0 Wendepunkt.
$f''(x_0) = 0 \ , \ f'''(x_0) \neq 0 \ \Rightarrow \ f''$ hat einfache Nullstelle bei $x_0 \ \Rightarrow \ f''$ hat Vorzeichenwechsel bei x_0.

Beispiele

1. $f(x) = x^4 \ \ , \ \ f''(x) = 12x^2 \ \Rightarrow \ f''(0) = 0 \ , \ f''$ hat keinen Vorzeichenwechsel bei $x_0 = 0 \ \Rightarrow$ kein Wendepunkt bei $x_0 = 0$.
2. $f(x) = x^3 \ , \ f''(x) = 6x \ \Rightarrow \ f''(0) = 0 \ , \ f'''(0) = 6 \neq 0$ oder f'' hat Vorzeichenwechsel bei $x_0 = 0 \ \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_0 = 0$.





Definition 5.49 : Sei $f : [a,b] \to I\!R$ n-mal differenzierbar in $[a,b]$, und sei $x_0 \in (a,b)$.
f hat in x_0 eine *Nullstelle der Ordnung n*
$\Leftrightarrow \ \ f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \ \ , \ \ f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Beispiele

1. $f(x) = (x-1)^3(x+4)^2$ hat in $x_0 = 1$ eine dreifache Nullstelle und in $x_1 = -4$ eine doppelte Nullstelle, denn für Polynome gilt:
   $p(x) = (x-x_0)^r q(x)$ mit $q(x_0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p$ hat in x_0 eine r-fache Nullstelle (vgl. Def. 1.41 und Satz 1.42, S.23).

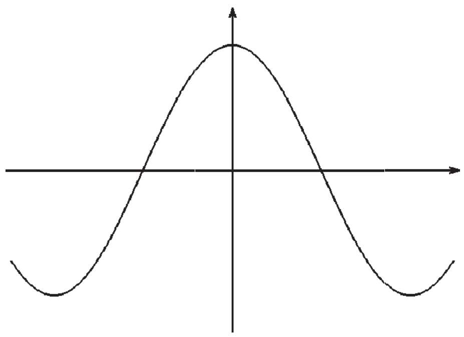
2. $f(x) = \sin x$ hat in $x_k = k\pi$ einfache Nullstellen (dh.: Ordnung 1), denn
   $\sin(k\pi) = 0 \quad , \quad \sin'(k\pi) = \cos(k\pi) \neq 0.$

Symmetrie

Definition 5.50 : Sei $f : I \to I\!R$.
f heißt *gerade* Funktion $\Leftrightarrow \quad f(-x) = f(x) \quad \forall x \in I.$
f heißt *ungerade* Funktion $\Leftrightarrow \quad f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in I.$

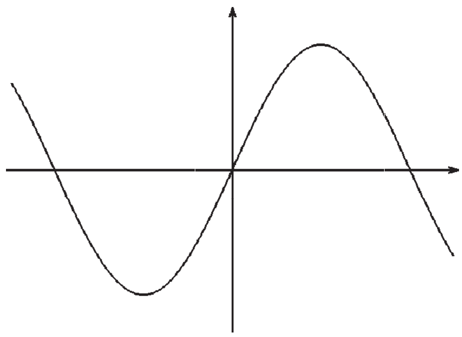
Beispiele

$f(x) = \cos x$



gerade Funktion (achsensymmetrisch)

$f(x) = \sin x$



ungerade Funktion (punktsymmetrisch)

Asymptotisches Verhalten

Definition 5.51 :
a) Die Gerade g mit $g(x) = ax+b$ heißt *Asymptote* von f für $x \to \infty$ (bzw. $x \to -\infty$), wenn $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ (bzw. $x \to -\infty$).

b) Die Gerade $x = x_0$ heißt *Asymptote* von f in x_0, wenn f in x_0 mindestens einen einseitigen *unendlichen Grenzwert* besitzt.

Satz 5.52 : f besitzt für $x \to \infty$ (bzw. $x \to -\infty$) genau dann eine Asymptote g mit $g(x) = ax + b$, wenn

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b \quad (\text{bzw. } x \to -\infty)}$$

Beweis : Existieren beide Grenzwerte $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0.$

Existiert umgekehrt eine Asymptote $g(x) = ax + b$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x) - ax}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{b}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = a.$

Bemerkung : Bei *rationalen Funktionen* erhält man die *Asymptote* einfach durch *Polynomdivision.*

Beispiel :

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x-1} \qquad \begin{array}{l} x^2 + 3 \ : \ x - 1 = x + 1 + \dfrac{4}{x-1} \\ \underline{x^2 - x} \\ \quad\ x + 3 \\ \quad\ \underline{x - 1} \\ \qquad\ 4 \end{array}$$

$\Rightarrow \quad f(x) = x + 1 + \frac{4}{x-1} \quad \Rightarrow \quad g(x) = x + 1$ ist Asymptote von f für $x \to \pm\infty$, da $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - (x + 1)) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x-1} = 0$.

Beispiele für Kurvendiskussion

1. $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$

   Definitionsbereich:
   $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $x_0 = 1$ ist Singularität, und zwar ein Pol 1.Ordnung, da einfache Nullstelle des Nenners.

   Nullstellen: keine.

   Grenzverhalten:
   $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to1-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to1+} f(x) = \infty$.

   Asymptoten:
   In $x_0 = 1$ und $g(x) = x + 1$ für $x \to \pm\infty$ (siehe obiges Beispiel).

   mögliche Extrema:
   $f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$
   $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$ oder $x = 3$, also mögliche Extrema bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$.

   Monotonieverhalten:
   $f'(x) > 0$ für $x > 3$ oder $x < -1 \quad \Rightarrow \quad f$ streng monoton wachsend in $(-\infty, -1)$ und in $(3, \infty)$,
   $f'(x) < 0$ für $-1 < x < 1$ oder $1 < x < 3 \quad \Rightarrow \quad f$ streng monoton fallend in $(-1, 1)$ und in $(1, 3)$.

hinreichendes Kriterium für Extrema:

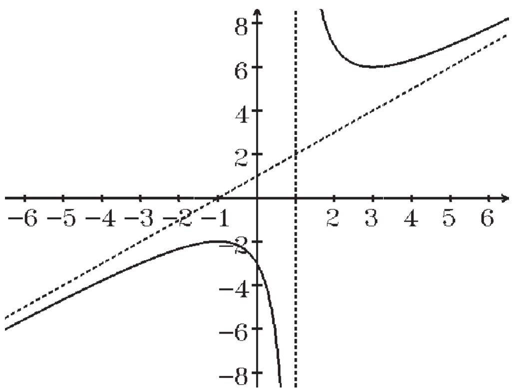
$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x-3)2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{2x^2-4x+2-2x^2+4x+6}{(x-1)^3} = \frac{8}{(x-1)^3}$$

$f''(-1) < 0 \quad \Rightarrow$ bei $x_1 = -1$ hat f ein relatives Maximum mit $f(-1) = -2$,
$f''(3) > 0 \quad \Rightarrow$ bei $x_2 = 3$ hat f ein relatives Minimum mit $f(3) = 6$,
oder: f' hat Vorzeichenwechsel bei $x_1 = -1$ von $(+ \to -)$ und bei $x_2 = 3$ von $(- \to +)$ $\Rightarrow$ relatives Maximum bei $x_1 = -1$ und relatives Minimum bei $x_2 = 3$.

Konvexität:
$f''(x) > 0$ für $x > 1 \quad \Rightarrow \quad f$ konvex in $(1, \infty)$,
$f''(x) < 0$ für $x < 1 \quad \Rightarrow \quad f$ konkav in $(-\infty, 1)$.

Wendepunkt:
$f''(x) \neq 0 \ \ \forall x \in D(f) \quad \Rightarrow \quad$ keine Wendepunkte.



2. $f(x) = x\mathrm{e}^{1/x}$

   Definitionsbereich: $\quad D(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

   Nullstellen: keine.

   Grenzverhalten:

   $$\lim_{x\to 0+} x\mathrm{e}^{1/x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{1/x} = \lim_{u\to\infty} \frac{\mathrm{e}^u}{u} = \infty$$

   (e-Funktion wächst stärker als jede Potenz),

   $\lim\limits_{x\to 0-} x\mathrm{e}^{1/x} = 0$, da $\lim\limits_{u\to -\infty} \mathrm{e}^u = 0$

   $\lim\limits_{x\to\infty} x\mathrm{e}^{1/x} = \infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to -\infty} x\mathrm{e}^{1/x} = -\infty$.

Asymptoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\mathrm{e}^{1/x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{1/x} = 1 = a$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (x\mathrm{e}^{1/x} - x) = \lim_{x\to\pm\infty} x(\mathrm{e}^{1/x} - 1) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\mathrm{e}^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{u\to 0} \frac{\mathrm{e}^{u} - 1}{u} = 1 = b$$

(da Potenzreihe von $\frac{\mathrm{e}^u - 1}{u} = 1 + \frac{u}{2} + \ldots$)

$\Rightarrow$ Asymptote von f für $x \to \pm\infty$ ist: $g(x) = x + 1$,
und Asymptote bei 0, da einseitiger unendlicher Grenzwert für $x \to 0+$.

mögliche Extrema:

$$f'(x) = (1 + x(\frac{-1}{x^2}))\mathrm{e}^{1/x} = (1 - \frac{1}{x})\mathrm{e}^{1/x} = \frac{x-1}{x}\mathrm{e}^{1/x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

$\Rightarrow$ bei $x = 1$ mögliches Extremum mit $f(1) = \mathrm{e}$.

Monotonie:

$f'(x) > 0$ für $x > 1$ oder $x < 0$ $\Rightarrow$ f streng monoton wachsend in $(-\infty, 0)$ und $(1, \infty)$,
$f'(x) < 0$ für $0 < x < 1$ $\Rightarrow$ f streng monoton fallend in $(0, 1)$.

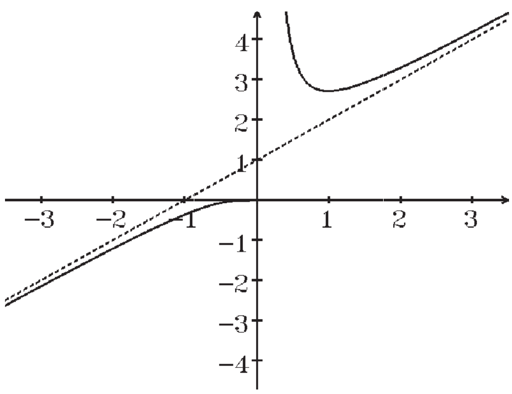
hinreichendes Kriterium für Extrema:

$$f''(x) = (\frac{x - (x-1)}{x^2} - \frac{x-1}{x^3})\mathrm{e}^{1/x} = \frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{1/x}$$

$f''(1) > 0$ $\Rightarrow$ f hat in $x_1 = 1$ ein relatives Minimum mit $f(1) = \mathrm{e}$.

Konvexität:

$f''(x) > 0$ für $x > 0$ $\Rightarrow$ f konvex in $(0, \infty)$,
$f''(x) < 0$ für $x < 0$ $\Rightarrow$ f konkav in $(-\infty, 0)$.



b) **Berechnung von Grenzwerten, Regeln von de l'Hospital**

Als Vorbereitung zeigen wir zunächst den erweiterten Mittelwertsatz:

Satz 5.53 : *Erweiterter Mittelwertsatz*

Seien $f, g : [a, b] \to I\!R$ stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b) mit $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.
Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $\quad \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Beweis :
Es ist $g(b) \neq g(a)$, da $g'(x) \neq 0$ in (a, b).
Sei $F(x) := (f(x) - f(a)) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$
$\Rightarrow \; F(a) = F(b) = 0 \;\Rightarrow\; \exists \xi \in (a, b)$ mit $F'(\xi) = 0 \quad$ (nach Satz 5.37 (Rolle)).
Da $F'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0 \;\Rightarrow\;$ Behauptung.

Wir betrachten nun Grenzprozesse der Form
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \quad$ mit $\quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \;$ oder $\; \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$.
Hierfür schreiben wir kurz: Grenzprozesse der Form "$\frac{0}{0}$" oder "$\frac{\infty}{\infty}$".
Im Anschluß daran betrachten wir Grenzprozesse der Form "$0 \cdot \infty$" , "$\infty - \infty$" , "0^0" , "1^∞" , "∞^0".

Satz 5.54 : *Regeln von de l'Hospital*

Sei $x_0 \in I\!R$ oder $x_0 = \infty$ oder $x_0 = -\infty$. Seien f unf g zwei in (a, x_0) (bzw. (x_0, a)) , (mit $a \in I\!R$) , stetig differenzierbare Funktionen.
Gilt: $\quad \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \;$ mit $L \in I\!R$ oder $L = \pm\infty$ *und*
$\{ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \;$ *oder* $\; \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty \}$
$\Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Beweis :
Fall a) $\; \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.
Sei $x_0 \in I\!R \;\Rightarrow\; f$ und g sind in x_0 stetig ergänzbar mit
$f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ und $g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.
Nach dem erweiterten Mittelwertsatz existiert dann ein $\xi \in (x, x_0)$ oder (x_0, x) mit
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = L.$$
Ist $x_0 = \pm\infty$, so betrachten wir $y = \frac{1}{x}$, $y_0 = 0$.

Da $\quad \dfrac{df(\frac{1}{y})}{dy} = -\dfrac{1}{y^2} f'(\dfrac{1}{y})$, folgt aus $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\dfrac{df(\frac{1}{y})}{dy}}{\dfrac{dg(\frac{1}{y})}{dy}} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})} = L$

durch Anwendung des ersten Falles die Behauptung.

Fall b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$.
Beweis ähnlich (ausführlich siehe Literatur).

Beispiele

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1 \quad (\text{„}\frac{0}{0}\text{"})$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2} \quad$ (jeweils „$\frac{0}{0}$") .
(mehrmalige Anwendung der Regel von de l'Hospital)

3. Sei $\alpha > 0$,
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \quad (\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"})$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \cos x}{x + \cos x} \neq \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$ existiert nicht
$\Rightarrow$ Regel von de l'Hospital nicht anwendbar.
Hier besser: Kürzen durch den Ausdruck, der am schnellsten gegen ∞ strebt, also x:
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \cos x}{x + \cos x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - \frac{\cos x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} = 1$, da $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0$, denn $|\cos x| \leq 1$.

5. $\lim\limits_{x\to\pi-} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}} = \lim\limits_{x\to\pi-} \dfrac{\cos x}{\frac{-\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}}} = \lim\limits_{x\to\pi-} \dfrac{-2\cos x\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$
$= -\lim\limits_{x\to\pi-} 2\cos x \cdot \lim\limits_{x\to\pi-} \dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} = 2 \lim\limits_{x\to\pi-} \dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} \quad$ (jeweils „$\frac{0}{0}$") .
(Regel von de l'Hospital führt wieder auf den gleichen Ausdruck, also nicht weiter)
Hier besser vorher quadrieren:
$\lim\limits_{x\to\pi-} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \lim\limits_{x\to\pi-} \dfrac{2\sin x\cos x}{-\sin x} = -2 \lim\limits_{x\to\pi-} \cos x = 2$
$\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\pi-} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}} = \sqrt{2} \quad , \quad \lim\limits_{x\to\pi+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}} = -\sqrt{2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan^2 x \ \ln(1+x^2)}{x(\sin x - x)} \quad$ (aufspalten in Produkt *endlicher* Grenzwerte)
$= (\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x})^2 \cdot (\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}) \cdot (\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\sin x - x}) = 1^2 \cdot 1 \cdot (-6) = -6$.
Denn:
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1 \quad (\text{„}\frac{0}{0}\text{"})$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u} = 1 \quad \text{(siehe Beispiel 1) von oben)},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x - x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{6x}{-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{6}{-\cos x} = -6 \quad \text{(jeweils "}\tfrac{0}{0}\text{")}.$$

Grenzprozesse der Form "$0\cdot\infty$" , "$\infty-\infty$" , *usw.*
werden auf die Fälle "$\frac{0}{0}$" oder "$\frac{\infty}{\infty}$" zurückgeführt:

1) Gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ oder umgekehrt $\Rightarrow$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}}$$

also "$\frac{0}{0}$" bzw. "$\frac{\infty}{\infty}$" .

2) Gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty \quad\Rightarrow$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{g(x)}\cdot\dfrac{1}{f(x)}}}$$

also "$\frac{0}{0}$" .

3)

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}}$$

(da die e-Funktion stetig).
Also muß der Grenzwert des Exponenten $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)$ berechnet werden.

Beispiele

1. $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \lim\limits_{x\to 0+} \mathrm{e}^{x\ln x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x} = \mathrm{e}^0 = 1$,

   denn: $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+}(-x) = 0$.

2. Sei $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \ln x = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{-\alpha x^{-\alpha}}$

   $= \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x^\alpha}{-\alpha} = 0 \quad\Rightarrow$

$$\boxed{\lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln x = 0 \quad , \quad (\alpha > 0)}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$, da $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{1}=1$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{\alpha}{x})}=\mathrm{e}^\alpha$,

denn: $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{\alpha}{x})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{\alpha}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(1+\alpha u)}{u}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{\alpha}{1+\alpha u}=\alpha$.

Also gilt:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^x=\mathrm{e}^\alpha}$$

Insbesondere gilt:

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$ (vgl. Def. von e und Def. der e-Funktion).

Satz 5.55 : *Verallgemeinerte Produktregel*

Sind f,g n-mal differenzierbar in x_0 $\Rightarrow$

$$\boxed{(fg)^{(n)}(x_0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x_0)g^{(n-k)}(x_0)}$$

Beweis :
Induktion über n:
$n=1$: (einfache) Produktregel,
$n\to n+1$: Analog zum Beweis des Binomischen Lehrsatzes (vgl. S.6).

Beispiel

$$(f(x)\mathrm{e}^{\alpha x})^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)(\mathrm{e}^{\alpha x})^{(n-k)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)\alpha^{n-k}\mathrm{e}^{\alpha x}$$
$$=\mathrm{e}^{\alpha x}(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}f^{(k)}(x))\ .$$

Beispiele hierzu:

1. $(x\mathrm{e}^{\alpha x})^{(n)}=\mathrm{e}^{\alpha x}(\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}x^{(k)})=(\alpha^n x+n\alpha^{n-1})\mathrm{e}^{\alpha x}$, da $x^{(k)}=0$ für $k\geq 2$.

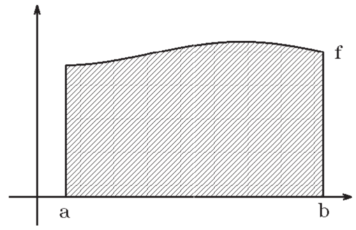
2. $(\sin x\,\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x(\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin^{(k)}x)$
$=\mathrm{e}^x(\sin x+n\sin' x+\binom{n}{2}\sin'' x+\ldots+\sin^{(n)}x)=\mathrm{e}^x(\sin x+n\cos x-\binom{n}{2}\sin x+\ldots).$

VI Integralrechnung

Motivation

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit
$f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [a,b]$.

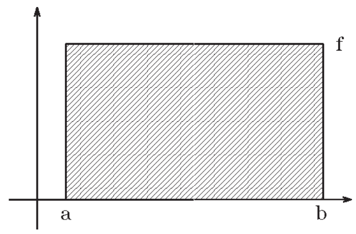
Gesucht:
Der "Flächeninhalt" zwischen
x-Achse, Graph von f und
den Geraden $x = a$ und $x = b$.



Frage: Was ist überhaupt der "Flächeninhalt"?
Wir wollen den Flächeninhalt so definieren, daß beim Rechteck gilt:
Produkt der Seitenlängen.

Ist also f konstant,
so soll für den Flächeninhalt gelten:

$I = f(a)(b-a)$.



Definition 6.1 : Gegeben sei ein Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$.
$Z := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ $, (n \in \mathbb{N})$, heißt *Zerlegung* von $[a,b]$, wenn
$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
$I_k := [x_{k-1}, x_k]$ $, (1 \leq k \leq n)$, heißt *k-tes Teilintervall*,
$\triangle x_k := x_k - x_{k-1}$ Länge von I_k, $\quad |Z| := \max\limits_{1 \leq k \leq n} \{\triangle x_k\}$ Betrag von Z.

Wir betrachten im Folgenden nur Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, die auf $[a,b]$ *beschränkt* sind, dh.: es existiere $K > 0$ mit $|f(x)| \leq K \ \ \forall x \in [a,b]$.
Die Funktion f muß *nicht* ≥ 0 sein.

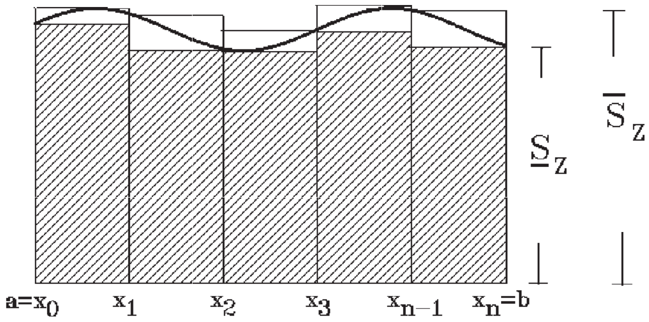
Definition 6.2 : Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt auf $[a,b]$ und Z eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann definieren wir

$$m(f) := \inf_{x \in [a,b]} \{f(x)\} \quad , \quad M(f) := \sup_{x \in [a,b]} \{f(x)\} \ ,$$

$$m_k(f) := \inf_{x \in I_k} \{f(x)\} \quad , \quad M_k(f) := \sup_{x \in I_k} \{f(x)\} \ .$$

$$\underline{S}_Z(f) := \sum_{k=1}^{n} m_k(f) \triangle x_k \quad \textit{Untersumme} \text{ von } f \text{ bzgl. } Z \ ,$$

$$\overline{S}_Z(f) := \sum_{k=1}^{n} M_k(f) \triangle x_k \quad \textit{Obersumme} \text{ von } f \text{ bzgl. } Z \ .$$



Idee:
Man läßt die Zerlegung feiner werden. Damit wird $\underline{S}_Z$ größer und $\overline{S}_Z$ kleiner, aber immer gilt $\underline{S}_Z \leq \overline{S}_Z$. Streben beide Folgen gegen einen Grenzwert, und ist dieser Grenzwert bei beiden Folgen gleich, so definieren wir diesen Grenzwert als Integral von f in den Grenzen von a bis b: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. Ist $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [a,b]$, so liefert dieses Integral den Flächeninhalt zwischen x-Achse, Graph von f und den Geraden $x = a$ und $x = b$.

Zunächst müssen wir einige Eigenschaften zeigen, die anschaulich sofort klar sind:

Satz 6.3 : Es gilt:
a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \triangle x_k = b - a$
b) $m(f)(b-a) \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq M(f)(b-a)$.

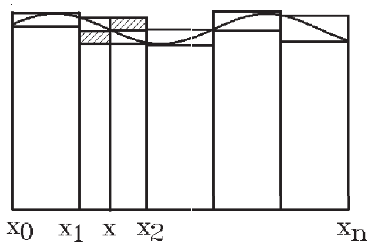
Beweis :
a) klar.
b) $$m(f)(b-a) = \sum_{k=1}^{n} m(f)\triangle x_k \leq \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\triangle x_k = \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\triangle x_k$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} M(f)\triangle x_k = M(f)(b-a).$$

Definition 6.4 : Z' heißt *Verfeinerung* von Z, wenn $Z \subset Z'$.

Satz 6.5 : Sei Z' eine Verfeinerung von Z, dann gilt:
$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z'}(f) \leq \overline{S}_{Z'}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$.

Beweis :
Idee: zunächst $Z' = Z \cup \{x\}$ betrachten $\Rightarrow$

$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z'}(f) \leq \overline{S}_{Z'}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$.



Im allgemeinen Fall kommen endlich viele Unterteilungspunkte hinzu, man muß also diesen Schritt entsprechend oft wiederholen. Also folgt die Behauptung.

Satz 6.6 : Seien Z_1 und Z_2 Zerlegungen von $[a, b]$
$\Rightarrow \quad \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f)$.

Beweis : $\quad Z = Z_1 \cup Z_2$ ist Verfeinerung von Z_1 und Z_2
$\Rightarrow \quad \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f)$.

Definition 6.7 : Sei $f : [a, b] \to I\!R$ *beschränkt* in $[a, b]$.
f heißt *integrierbar* in $[a, b] \quad \Leftrightarrow \quad \sup\limits_Z \underline{S}_Z(f) = \inf\limits_Z \overline{S}_Z(f) \qquad$ (Z Zerlegung von $[a, b]$).

In diesem Fall schreiben wir
$\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx := \sup_Z \underline{S}_Z(f) = \inf_Z \overline{S}_Z(f)$
(Riemann) Integral der Funktion f von a bis b.

Bemerkung : Aus Satz 6.3 und Satz 6.5 folgt, daß die Werte $\sup\limits_Z \underline{S}_Z(f)$ und $\inf\limits_Z \overline{S}_Z(f)$ existieren und endlich sind. Aus Satz 6.6 folgt, daß immer $\sup\limits_Z \underline{S}_Z(f) \leq \inf\limits_Z \overline{S}_Z(f)$ gilt. Gilt " $=$ ", so ist f integrierbar.

Bemerkung : Ist f integrierbar in $[a, b]$ und gilt $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, so stellt der Wert $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ den Flächeninhalt zwischen x-Achse, Graph von f und den Geraden $x = a$ und $x = b$ dar.

Beispiele

1. $f(x) = c \quad \forall x \in I\!R \quad (c \in I\!R$ Konstante$) \quad \Rightarrow \quad f$ ist integrierbar in jedem Intervall $[a, b] \subset I\!R$ mit $\displaystyle\int_a^b c\, dx = c(b - a)$. Insbesondere gilt:

$$\boxed{\int_a^b dx = b - a}$$

Denn: $\quad \underline{S}_Z(f) = c \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \triangle x_k = c(b - a) \quad , \quad \overline{S}_Z(f) = c \sum_{k=1}^{n} \triangle x_k = c(b - a)$
$\Rightarrow \quad \sup\limits_Z \underline{S}_Z(f) = \inf\limits_Z \overline{S}_Z(f) = c(b - a)$.

2. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{,falls } x \in \mathbb{Q} \text{ (rationale Zahlen)} \\ 0 & \text{,falls } x \notin \mathbb{Q} \text{ (irrationale Zahlen)} \end{cases}$
$\Rightarrow \quad f$ ist *nicht integrierbar* in $[a, b] \subset I\!R$.

Denn: $\quad \underline{S}_Z(f) = 0 \quad , \quad \overline{S}_Z(f) = b - a \quad \Rightarrow \quad \sup\limits_Z \underline{S}_Z(f) < \inf\limits_Z \overline{S}_Z(f)$.

Welche Funktionen sind nun integrierbar ?

Satz 6.8 : Sei $f : [a,b] \to I\!R$ beschränkt.
f integrierbar in $[a,b] \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \ \ \exists Z$ Zerlegung von $[a,b]$ mit $\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \epsilon$.

Beweis :

" $\Leftarrow$ ": $\quad 0 \le \inf\limits_Z \overline{S}_Z(f) - \sup\limits_Z \underline{S}_Z(f) \le \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \epsilon$.
Da $\epsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow \ \inf\limits_Z \overline{S}_Z(f) = \sup\limits_Z \underline{S}_Z(f)$.

" $\Rightarrow$ ": $\quad$ Sei $\epsilon > 0 \ \Rightarrow \ \exists Z_1, Z_2$ mit
$\overline{S}_{Z_1}(f) < \inf\limits_Z \overline{S}_Z(f) + \epsilon/2$ und $\quad \underline{S}_{Z_2}(f) > \sup\limits_Z \underline{S}_Z(f) - \epsilon/2$
(Eigenschaft von inf und sup).
Für $Z = Z_1 \cup Z_2$ gilt dann $\quad \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) \le \overline{S}_{Z_1}(f) - \underline{S}_{Z_2}(f) < \epsilon$.

Satz 6.9 :
a) Jede in $[a,b]$ *monotone, beschränkte* Funktion ist *integrierbar* in $[a,b]$.

b) Jede in $[a,b]$ *stetige* Funktion ist *integrierbar* in $[a,b]$.

Beweis :
a) Sei f monoton wachsend, $\epsilon > 0 \ \Rightarrow \ M_k(f) = f(x_k)$, $\quad m_k(f) = f(x_{k-1})$

$$\Rightarrow \ \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) = \sum_{k=1}^{n}(M_k(f) - m_k(f))\triangle x_k \le |Z| \sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1}))$$
$$= |Z|(f(b) - f(a)) < \epsilon \quad \text{falls} \quad |Z| < \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$$

(falls $f(b) \neq f(a)$, sonst gilt es immer).
Für f monoton fallend analog.

b) Da f stetig in $[a,b]$ und $[a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall $\subset I\!R \quad \Rightarrow \quad f$ ist *gleichmäßig stetig* in $[a,b]$, dh.: $\ \forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0$ mit $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \ \ \forall x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$.
Sei Z eine Zerlegung von $[a,b]$ mit $|Z| < \delta$

$$\Rightarrow \ \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) = \sum_{k=1}^{n}(M_k(f) - m_k(f))\triangle x_k = \sum_{k=1}^{n}(f(\xi_k) - f(\mu_k))\triangle x_k < \epsilon(b-a)$$

(da inf und sup in jedem Teilintervall angenommen werden)
$\Rightarrow \ f$ integrierbar in $[a,b]$ nach Satz 6.8.

Eine andere Möglichkeit, Integrierbarkeit nachzuprüfen, bzw. ein Hilfsmittel, Integrale zu berechnen, bilden die *Riemannschen Summen* :

Definition 6.10 : Sei $f : [a,b] \to I\!R$ beschränkt, $\ $ sei Z eine Zerlegung von $[a,b]$ und seien $\xi_k \in I_k \ \ (1 \le k \le n)$ $\ $ beliebige Zwischenpunkte. Dann heißt
$\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle x_k \quad$ *Riemannsche Summe* von f zur Zerlegung Z.

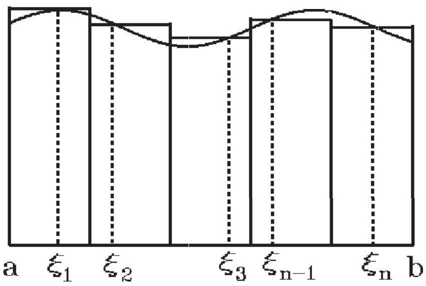
Satz 6.11 : Sei $f : [a,b] \to I\!R$ beschränkt.

f *integrierbar* in $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{|Z|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle x_k$ existiert (unabhängig von der Wahl der Zwischenpunkte $\xi_k \in I_k$).
In diesem Fall gilt:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{|Z|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle x_k}$$

Beweis :

Anschaulich klar, ausführlicher Beweis siehe Literatur.



Satz 6.12 : Sei $f : [a,b] \to I\!R$ *integrierbar* in $[a,b]$, $\{Z_n\}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} |Z_n| = 0$, sei $\{\xi_{n,k}\}$ eine Folge von Zwischenpunkten. Dann gilt

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_{n,k})(x_k - x_{k-1})}$$

Beweis : Folgt sofort aus Satz 6.11.

Beispiel

$f(x) = x \quad \forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow f$ ist stetig in $[a,b] \quad \Rightarrow \quad f$ ist integrierbar in $[a,b]$.
Wähle $Z_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mit den Zwischenpunkten $\xi_k = \dfrac{x_k + x_{k-1}}{2}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}({x_k}^2 - {x_{k-1}}^2)$$
$$= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \to \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \text{ für } n \to \infty \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_a^b x\ dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)}$$

Eigenschaften des Integrals

Im folgenden Satz fassen wir einige wichtige Eigenschaften des Integrals zusammen:

Satz 6.13 : Seien $f,g:[a,b]\to I\!R$ integrierbar in $[a,b]$, sei $c\in I\!R$. Dann gilt
a) cf ist integrierbar in $[a,b]$ mit

$$\boxed{\int_a^b cf(x)\ dx = c\int_a^b f(x)\ dx}$$

b) $f+g$ ist integrierbar in $[a,b]$ mit

$$\boxed{\int_a^b (f(x)+g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx}$$

a) und b) besagen, daß das Integral *linear* ist.

c) Ist $f(x)\le g(x)\ \ \forall x\in[a,b]$, dann gilt
$\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \le \int_a^b g(x)\ dx$.

d) $|f|$ ist integrierbar in $[a,b]$ mit
$\displaystyle|\int_a^b f(x)\ dx| \le \int_a^b |f(x)|\ dx$.

e) Ist $|f(x)|\le K\ \ \forall x\in[a,b]$, so gilt

$$\boxed{|\int_a^b f(x)\ dx| \le \int_a^b |f(x)|\ dx \le K\int_a^b\ dx = K(b-a)}$$

f) $f\cdot g$ ist integrierbar in $[a,b]$.

Beweis :
a) c kann aus der Riemannschen Summe herausgezogen werden.
b) $\displaystyle\sum_{k=1}^n (f(\xi_k)+g(\xi_k))\triangle x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\triangle x_k + \sum_{k=1}^n g(\xi_k)\triangle x_k$.
c) $g-f$ ist integrierbar mit $g(x)-f(x)\ge 0\ \ \forall x\in[a,b]$
$\displaystyle\Rightarrow \int_a^b g(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b (g(x)-f(x))\ dx \ge 0$ (da alle $\underline{S}_Z\ge 0$).
d)e) $|f| = f^+ + f^-$ mit

$$f^+(x)=\begin{cases} f(x) & \text{,falls } f(x)\ge 0\\ 0 & \text{,falls } f(x)<0\end{cases} \quad , \quad f^-(x)=\begin{cases} 0 & \text{,falls } f(x)\ge 0\\ -f(x) & \text{,falls } f(x)<0\end{cases}$$

$\Rightarrow\ f=f^+-f^-$.
Man zeigt nun: f^+,f^- sind integrierbar $\Rightarrow$ $|f|$ ist integrierbar (ausführlicher Beweis siehe Literatur).
Da $-f\le|f|$ und $f\le|f|$ $\Rightarrow$ (aus c))
$\displaystyle-\int_a^b f(x)\ dx \le \int_a^b |f(x)|\ dx$ und $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \le \int_a^b |f(x)|\ dx$
$\displaystyle\Rightarrow\ |\int_a^b f(x)\ dx| \le \int_a^b |f(x)|\ dx \le K\int_a^b\ dx = K(b-a).$

Beweis zu f) siehe Literatur.

Definition 6.14 :
$$\int_a^a f(x)\ dx = 0 \quad , \quad \int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx.$$

Integration auf Teilintervallen

Satz 6.15 : Sei $f : [a,b] \to I\!R$ und sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann gilt:
f integrierbar in $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ f integrierbar in jedem Teilintervall $[x_{k-1}, x_k]$ $(1 \le k \le n)$.
In diesem Fall gilt $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\ dx.$

Beweis : Anschaulich klar, man wählt bei den Ober- und Untersummen jeweils die Punkte x_k der Zerlegung Z hinzu (ausführlich siehe Literatur).

Satz 6.16 : Sei $f : [a,b] \to I\!R$ integrierbar in $[a,b]$. Seien (a_n) und (b_n) Folgen aus $I\!R$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ und $[a_n, b_n] \subset [a,b]$ $\forall n \in I\!N$. Dann gilt:
$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\ dx.$$

Beweis :
$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^{a_n} f(x)\ dx + \int_{a_n}^{b_n} f(x)\ dx + \int_{b_n}^{b} f(x)\ dx.$$
Sei $|f(x)| \le K$ $\forall x \in [a,b]$ $\Rightarrow$
$|\displaystyle\int_a^{a_n} f(x)\ dx| \le K|a_n - a| \to 0$ und
$|\displaystyle\int_{b_n}^{b} f(x)\ dx| \le K|b - b_n| \to 0$ für $n \to \infty$ $\Rightarrow$ Behauptung.

Bemerkung 6.17 : Seien $f, g : [a,b] \to I\!R$ beschränkt in $[a,b]$ und $f(x) \ne g(x)$ für *höchstens endlich viele* $x \in [a,b]$. Dann gilt:
f integrierbar in $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ g integrierbar in $[a,b]$.
In diesem Fall gilt $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b g(x)\ dx.$

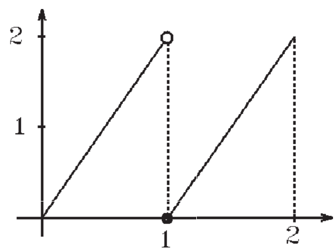
Bemerkung 6.18 : Sei $f : [a,b] \to I\!R$ *stückweise stetig* in $[a,b]$ (dh.: f besitzt höchstens endlich viele Sprungstellen). Dann gilt: f ist *integrierbar* in $[a,b]$.

Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ,\text{falls } x \in [0,1) \\ 2x-2 & ,\text{falls } x \in [1,2] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx + \int_1^2 (2x-2)\,dx$$

$$= 2 \cdot \tfrac{1}{2} + 2(\tfrac{4-1}{2} - 1) = 2.$$



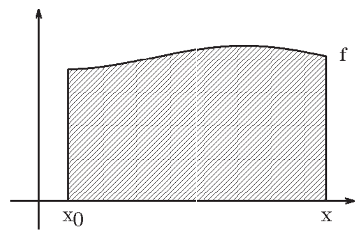
Hauptsatz der Integralrechnung

Definition 6.19 : Sei $I \subset I\!R$ ein Intervall, $f : I \to I\!R$ integrierbar in jedem Teilintervall $[a,b] \subset I$, $x_0 \in I$. Dann heißt $F : I \to I\!R$ mit

$$\boxed{F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}$$

Funktion von der oberen Grenze des Integrals von f.

Ist $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in I$
$\Rightarrow$ $F(x)$ ist der Flächeninhalt zwischen x-Achse, Graph von f und den Geraden $x = x_0$ und $x = x$.



Satz 6.20 : *Hauptsatz der Integralrechnung*
Für die Funktion $F : I \to I\!R$ gilt:
a) F ist *stetig* in I.
b) Sei f *stetig* in $x \in I$ $\Rightarrow$ F ist *differenzierbar* in $x \in I$ mit $F'(x) = f(x)$.
c) Sei f *stetig in I* $\Rightarrow$ F ist *stetig differenzierbar* in I mit $F'(x) = f(x) \;\; \forall x \in I$.

Beweis :
a) Sei $x \in [a,b] \subset I$, (x_n) eine Folge aus $[a,b]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $|f(x)| \leq K \;\; \forall x \in [a,b]$, dann gilt
$|F(x_n) - F(x)| = |\int_{x_0}^{x_n} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt| = |\int_{x}^{x_n} f(t)\,dt| \leq K|x_n - x| \to 0$ für $n \to \infty$ $\Rightarrow$ F ist stetig in x; da $x \in I$ beliebig $\Rightarrow$ F ist stetig in I.
b) $$|\frac{F(x_n) - F(x)}{x_n - x} - f(x)| = \frac{1}{|x_n - x|} |\int_x^{x_n} f(t)\,dt - \int_x^{x_n} f(x)\,dt|$$
$$\leq \frac{|x_n - x|}{|x_n - x|} \sup_{|t-x| \leq |x_n - x|} |f(t) - f(x)| \to 0$$ für $n \to \infty$, also für $x_n \to x$ und damit für $t \to x$ (da f stetig in x).
c) Die Behauptung folgt sofort aus b) $\forall x \in I$.

Beispiel

$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ ist stetig differenzierbar in $I\!R$ mit

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{,falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{,falls } x = 0\ . \end{cases}$$

Denn: $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\sin x}{x} & \text{,falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{,falls } x = 0 \end{array} \right\}$ ist stetig in $I\!R$, da $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Definition 6.21 : *Stammfunktion*
Sei $I \subset I\!R$ ein Intervall , $f, F : I \to I\!R$, F sei differenzierbar in I.
Gilt $F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in I$, so heißt F *Stammfunktion* von f in I.

Bemerkung 6.22 : Jede in I *stetige* Funktion f besitzt in I eine *Stammfunktion*, denn für $x_0 \in I$ und $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\, dt$ gilt: $\quad F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in I$.

Bemerkung 6.23 : Ist F Stammfunktion von f in I, so ist auch $G = F + c$, ($c \in I\!R$ Konstante) , Stammfunktion von f in I.
Zwei Stammfunktionen von f unterscheiden sich nur durch eine Konstante.

Denn: $G'(x) = F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in I$.
Seien F_1, F_2 Stammfunktionen von f in $I \quad \Rightarrow$
$F_1'(x) = F_2'(x) = f(x) \ \ \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad F_1(x) = F_2(x) + c \ \ \forall x \in I \ \ (c \in I\!R$ Konstante).

Satz 6.24 : Ist $f : [a,b] \to I\!R$ integrierbar in $[a,b]$ und ist $F : [a,b] \to I\!R$ eine Stammfunktion von f in $[a,b] \quad \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big]_a^b\ .$$

Beweis : Sei f stetig $\Rightarrow$ $F_1(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ ist Stammfunktion von f in $[a,b] \quad \Rightarrow$

$F_1(x) = F(x) + c$, $F_1(a) = 0$, $F_1(b) = \int_a^b f(x)\, dx \quad \Rightarrow$

$F_1(b) - F_1(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$.
Beweis für allg. integrierbare Funktion siehe Literatur.

Bemerkung 6.25 :
$\int f(x)\, dx$ heißt *unbestimmtes Integral* und bedeutet die *Gesamtheit aller Stammfunktionen* von f, also
$\int f(x)\, dx = F(x) + c$, $c \in I\!R$, falls $F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in I$.

Häufig lassen wir die Integrationskonstante c weg und schreiben einfach
$\displaystyle\int f(x)\ dx = F(x)$, falls $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

$\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ heißt *bestimmtes Integral.*

Beispiele

1. $\displaystyle\int cx^k\ dx = \frac{c}{k+1}x^{k+1}$, falls $k \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $c \in \mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x|$, $(x \neq 0)$.
3. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\ dx = \mathrm{e}^x$, $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\alpha x}\ dx = \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x}$, $(\alpha \neq 0)$,
   z.B.: $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^x\ dx = \mathrm{e}^x\Big]_1^2 = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}(\mathrm{e}-1)$.
4. $\displaystyle\int \sin\alpha x\ dx = -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x$, $\displaystyle\int \cos\alpha x\ dx = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha x$, $(\alpha \neq 0)$.

Integrationsregeln

Satz 6.26 : *Partielle Integration*
Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in $[a, b]$. Dann gilt:

$$\int f'(x)g(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ dx$$

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx.$$

Beweis :
$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \Rightarrow \quad f \cdot g$ ist Stammfunktion von $f'g + fg' \quad \Rightarrow$ Behauptung.

Beispiele

1. $\displaystyle\int x\mathrm{e}^x\ dx = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\ dx = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = (x-1)\mathrm{e}^x$ (mit $f'(x) = \mathrm{e}^x$ und $g(x) = x$)
   z.B.: $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\ dx = x\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\ dx = \mathrm{e} - \mathrm{e}^x\Big]_0^1 = \mathrm{e} - \mathrm{e} + 1 = 1$.
2. $\displaystyle\int x^n\mathrm{e}^x\ dx = x^n\mathrm{e}^x - n\int x^{n-1}\mathrm{e}^x\ dx$, $(n \in \mathbb{N})$ (Rekursionsformel).
3. $\displaystyle\int \ln x\ dx = \int 1 \cdot \ln x\ dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\ dx = x\ln x - x$.
4. $\displaystyle\int x\sin x\ dx = x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x)\ dx = -x\cos x + \sin x$.

Satz 6.27 : *Substitution*

a) Sei $\varphi : [a,b] \to I\!R$ stetig differenzierbar in $[a,b]$, und sei $f : [\alpha,\beta] \to I\!R$ stetig in $[\alpha,\beta]$ mit $[\alpha,\beta] = \varphi([a,b])$. Dann gilt:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\ dx = \int f(t)\ dt\Big]_{t=\varphi(x)}$$

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\ dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\ dt.$$

b) Sei $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ stetig differenzierbar mit $\varphi'(x) \neq 0\ \ \forall x \in [\alpha,\beta]$ (dh.: φ ist streng monoton), und sei $f : [a,b] \to I\!R$ stetig in $[a,b]$. Dann gilt:

$$\int f(x)\ dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt\Big]_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt.$$

Beweis :

a) Ist F Stammfunktion von f in $[\alpha,\beta]$, so gilt
$(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$, also ist $(F \circ \varphi)$ Stammfunktion von $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ und es gilt

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\ dx = F(\varphi(x)) = F(t)\Big]_{t=\varphi(x)} = \int f(t)\ dt\Big]_{t=\varphi(x)}.$$

b) Mit $\alpha = \varphi^{-1}(a)$ und $\beta = \varphi^{-1}(b)$ gilt nach a)

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(\alpha)=a}^{\varphi(\beta)=b} f(x)\ dx \quad \Rightarrow \text{ Behauptung.}$$

Merkregel:

$$\int f(x)\ dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt \quad \text{, also ersetze} \quad x = \varphi(t) \ \text{ und } \ dx = \varphi'(t)dt.$$

Beispiele

1. $$\int \frac{3x^2}{x^3+1}\ dx = \int \frac{1}{t}\ dt = \ln|t| = \ln|x^3+1|$$
(Subst.: $t = x^3+1$, $dt = 3x^2dx$)

$$\Rightarrow \quad \int_0^2 \frac{3x^2}{x^3+1}\ dx = \ln|x^3+1|\Big]_0^2 = \ln 9 - \ln 1 = \ln 9\ ,$$

oder Grenzen mitsubstituieren:

$$\int_0^2 \frac{3x^2}{x^3+1}\ dx = \int_1^9 \frac{1}{t}\ dt = \ln|t|\Big]_1^9 = \ln 9 - \ln 1 = \ln 9\ .$$

(Subst.: $t = x^3+1$, $dt = 3x^2dx$, $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = 2 \Rightarrow t = 9$)

Beispiel 1. ist ein Beispiel für folgenden allgemeinen Fall:

2.

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \ln|f(x)| + c}$$

Denn: Subst.: $t = f(x)$, $dt = f'(x)dx \ \Rightarrow$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \int \frac{1}{t}\ dt = \ln|t|\Big]_{t=f(x)} = \ln|f(x)|.$$

3. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\ dx = \int t\ dt = \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}(\ln x)^2\ .$

(Subst.: $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x}dx$)

Beispiel 3. ist ein Beispiel für folgenden allgemeinen Fall:

4.

$$\boxed{\int f(x)f'(x)\ dx = \frac{1}{2}f^2(x) + c}$$

5.

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+a^2}\ dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \quad , \quad (a > 0)}$$

Denn:

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\ dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}\ dx$$

(Subst.: $t = \frac{x}{a}$, $dt = \frac{1}{a}dx \ \Rightarrow \ dx = a dt$)

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a}{1+t^2}\ dt = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+t^2}\ dt = \frac{1}{a}\arctan t\Big]_{t=\frac{x}{a}} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\ .$$

6.

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\ dx = \arcsin\frac{x}{a} \quad , \quad (|x| < a\ ,\ a > 0)}$$

Denn:

$$\frac{d}{dx}(\arcsin\frac{x}{a}) = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\ .$$

Analog erhält man:

7.

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\ dx = \operatorname{arsinh}\frac{x}{a} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}\ ) + c \quad , \quad (a > 0)}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\ dx = \operatorname{arcosh}\frac{x}{a} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}\ | + c \quad , \quad (|x| > a > 0)}$$

8. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \sqrt{a^2+x^2}\ ,$

denn: Subst.: $t = a^2+x^2\ ,\ dt = 2xdx\ \Rightarrow\ xdx = \frac{1}{2}dt\ \Rightarrow$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{t} = \sqrt{a^2+x^2}\ .$$

9. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{e}^t\cdot 2t\,dt = 2(t-1)\mathrm{e}^t\Big]_1^{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{2}}\ .$

(Subst.: $t=\sqrt{x+1}\ ,\ x=t^2-1\ ,\ dx = 2tdt$)

10. $\displaystyle\int x^3\mathrm{e}^{x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}t\mathrm{e}^t\,dt = \frac{1}{2}(t-1)\mathrm{e}^t\Big]_{t=x^2} = \frac{1}{2}(x^2-1)\mathrm{e}^{x^2}\ .$

(Subst.: $t=x^2\ ,\ dt = 2xdx\ \Rightarrow\ xdx = \frac{1}{2}dt$)

11. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\,dx = \int \frac{t+1}{t+\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t+1}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t}{t^2+1}\,dt + \int \frac{1}{t^2+1}\,dt$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\ln|t^2+1| + \arctan t = \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{2x}+1)+\arctan(\mathrm{e}^x)\ .$

(Subst.: $t=\mathrm{e}^x\ \Rightarrow\ x=\ln t\ \Rightarrow\ dx = \frac{1}{t}dt$)

12. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx = -\ln|1+\cos x|\ .$

(Im Zähler steht (bis auf das Vorzeichen) die Ableitung des Nenners)

13. $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad ,\quad (a>0)\ ,$

Subst.: $x = a\sin t\ \Rightarrow\ t=\arcsin\frac{x}{a}\ ,\ dx = a\cos t dt\ \Rightarrow$

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}\cdot a\cos t\,dt = a^2\int_0^{\pi/2}|\cos t|\cos t\,dt$$

($\cos t\geq 0$ für $t\in[0,\pi/2]$)

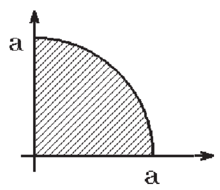
$$= a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = a^2\int_0^{\pi/2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big]_0^{\pi/2}$$

(Additionstheorem)

$$= \frac{a^2}{2}(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi) = \frac{a^2\pi}{4}\ .$$

(Flächeninhalt des Viertelkreises)

$\Rightarrow$ Flächeninhalt des *Kreises* mit Radius r ist: πr^2.



Für die Stammfunktion erhalten wir von oben:

$$\frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t) = \frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t) = \frac{a^2}{2}(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\ )\Big]_{t=\arcsin\frac{x}{a}}$$

$$= \frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}\ ) = \frac{1}{2}(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\ )\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\int \sqrt{a^2-x^2}\;dx = \frac{1}{2}\left(a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\,\right) \quad , \quad (|x|<a)}$$

Weitere Beispiele

14. $\int \sqrt{a^2+x^2}\;dx$, Substitution $x = a\sinh t$ oder partielle Integration:

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\;dx = \int 1\cdot\sqrt{a^2+x^2}\;dx \quad (\text{ partielle Integration})$$
$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int x\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\;dx$$
$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\;dx + a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\;dx$$
$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \sqrt{a^2+x^2}\;dx + a^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}\,) \quad (\text{vgl. Beispiel 7.}) \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\int \sqrt{a^2+x^2}\;dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}\,)\right) \quad , \quad (a>0)}$$

15. $\int \sin\alpha x\cos\beta x\;dx = \frac{1}{2}\int(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x)\;dx$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta} + \frac{\cos(\alpha-\beta)x}{\alpha-\beta}\right) & ,\text{falls } \alpha\neq\pm\beta \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta}\right) & ,\text{falls } \alpha=\beta\neq 0 \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(\alpha-\beta)x}{\alpha-\beta}\right) & ,\text{falls } \alpha=-\beta\neq 0\;. \end{cases}$$

16. Die folgenden Stammfunktionen lassen sich nicht durch Funktionen ausdrücken, die wir bisher behandelt haben:
$\int \mathrm{e}^{x^2}\;dx \quad , \quad \int\frac{\mathrm{e}^x}{x}\;dx \quad , \quad \int\frac{\sin x}{x}\;dx \quad , \quad \int\frac{\cos x}{x}\;dx$, usw.

Integration rationaler Funktionen

Gesucht $\int\frac{p(x)}{q(x)}\;dx$, p,q Polynome mit grad $p <$ grad q.

Ist grad $p \geq$ grad q $\Rightarrow$ *Polynomdivision* durchführen bis grad $p <$ grad q ist.

Dann muß eine *Partialbruchzerlegung* durchgeführt werden (vgl. S.23).

Damit müssen nur noch folgende Stammfunktionen berechnet werden:

$\int\frac{1}{(x-x_0)^n}\;dx \quad , \quad \int\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}\;dx \quad , \quad (\text{falls } 4c-b^2>0).$

Mit $\sigma = \dfrac{2}{\sqrt{4c-b^2}}$ gilt:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x-x_0}\,dx = \ln|x-x_0|$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-x_0)^n}\,dx = \frac{1}{(1-n)(x-x_0)^{n-1}} \quad , \quad (n \geq 2)$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \quad , \quad (a > 0)$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx = \sigma\arctan(\sigma(x+\frac{b}{2})) \quad , \quad (4c-b^2 > 0)$

e) $$\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = \frac{\sigma^2(2x+b)}{4(n-1)(x^2+bx+c)^{n-1}} \qquad (n \geq 2)$$
$$+\frac{\sigma^2(2n-3)}{2(n-1)}\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^{n-1}}\,dx \quad , \quad (4c-b^2>0) \qquad \text{(Rekursionsformel)}$$

f) $\displaystyle\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx = \ln|x^2+bx+c| \quad , \quad (4c-b^2>0)$

g) $\displaystyle\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = \frac{1}{(1-n)(x^2+bx+c)^{n-1}} \quad , \quad (4c-b^2>0 \quad , \quad n \geq 2)$

h) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}\,dx - \frac{b}{2}\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}\,dx \; , \; (n \geq 1).$

Beweis :
a),b),c) klar.

d) Mit quadratischer Ergänzung und $\sigma = \dfrac{2}{\sqrt{4c-b^2}}$ erhält man:

$$\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx = \int \frac{1}{(x+\frac{b}{2})^2+(c-\frac{b^2}{4})}\,dx = \int \frac{1}{(x+\frac{b}{2})^2+(\frac{1}{\sigma})^2}\,dx$$
$$= \sigma\arctan\sigma(x+\frac{b}{2}).$$

e) Sei $N = x^2+bx+c$, $4c-b^2>0$ ($\Rightarrow \; c \neq 0$) , $\sigma = \dfrac{2}{\sqrt{4c-b^2}}$, dann gilt:

$$\int \frac{1}{N^n}\,dx = \frac{1}{c}\int \frac{x^2+bx+c}{N^n}\,dx - \frac{1}{c}\int \frac{x(x+b)}{N^n}\,dx$$
$$= \frac{1}{c}\int \frac{1}{N^{n-1}}\,dx - \frac{1}{2c}\int x\cdot\frac{2x+b}{N^n}\,dx - \frac{b}{2c}\int \frac{x}{N^n}\,dx$$
$$= \frac{1}{c}\int \frac{1}{N^{n-1}}\,dx - \frac{1}{2c}\left[x\cdot\frac{1}{(1-n)N^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{1}{N^{n-1}}\,dx\right] - \frac{b}{4c}\int \frac{2x+b}{N^n}\,dx$$
$$+\frac{b^2}{4c}\int \frac{1}{N^n}\,dx \quad \Rightarrow$$
$$(1-\frac{b^2}{4c})\int \frac{1}{N^n}\,dx = \frac{1}{2c}(2+\frac{1}{1-n})\int \frac{1}{N^{n-1}}\,dx - \frac{1}{2c}(x+\frac{b}{2})\frac{1}{(1-n)N^{n-1}} \quad \Rightarrow$$
$$\frac{1}{\sigma^2}\int \frac{1}{N^n}\,dx = \frac{2x+b}{4(n-1)}\cdot\frac{1}{N^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{1}{N^{n-1}}\,dx \quad \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

f),g),h) klar.

Beispiele

1. $I = \int \frac{2x^3+3x^2+4x+6}{x^2+2x+1}\, dx$

Da grad $p \geq$ grad $q \Rightarrow$ Polynomdivision

$$2x^3+3x^2+4x+6 \;:\; x^2+2x+1 = 2x-1+\frac{4x+7}{x^2+2x+1}$$

$$\begin{array}{l} \underline{2x^3+4x^2+2x} \\ \quad -x^2+2x+6 \\ \quad \underline{-x^2-2x-1} \\ \qquad\quad 4x+7 \end{array}$$

Partialbruchzerlegung ergibt:

$$\frac{4x+7}{x^2+2x+1} = \frac{4x+7}{(x+1)^2} = \frac{4(x+1)}{(x+1)^2}+\frac{3}{(x+1)^2} = \frac{4}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow$$

$$I = \int (2x-1)\, dx + 4\int \frac{1}{x+1}\, dx + 3\int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx$$

$$= x^2-x+4\ln|x+1| - \frac{3}{x+1}+c = x^2-x+\ln(x+1)^4-\frac{3}{x+1}+c.$$

2. $I = \int \frac{x^4-x^3+5x^2+x+3}{(x+1)(x^2-x+1)^2}\, dx$

$4c-b^2 = 4-1 = 3 > 0 \Rightarrow \sigma = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ansatz für Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^4-x^3+5x^2+x+3}{(x+1)(x^2-x+1)^2} = \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}+\frac{Dx+E}{(x^2-x+1)^2}$$

Koeffizientenvergleich ergibt: $A=1$, $B=0$, $C=1$, $D=2$, $E=1$.

Für die einzelnen Integrale erhalten wir:

$$\int \frac{1}{x+1}\, dx = \ln|x+1| \ ,$$

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}\, dx = \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\, dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}) \ ,$$

$$\int \frac{2x+1}{(x^2-x+1)^2}\, dx = \int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}\, dx + 2\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}\, dx$$

$$= \frac{-1}{x^2-x+1}+\frac{\sigma^2(2x-1)}{2(x^2-x+1)}+\sigma^2\int \frac{1}{x^2-x+1}\, dx$$

$$= \frac{-1}{x^2-x+1}+\frac{2(2x-1)}{3(x^2-x+1)}+(\frac{2}{\sqrt{3}})^3 \arctan \frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}) \ .$$

Also insgesamt:

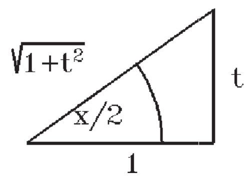
$$I = \ln|x+1| + \frac{4x-5}{3(x^2-x+1)}+\frac{14}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})+c.$$

Integrale der Form $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\ dx$

mit: R rationale Funktion von $\sin x$ und $\cos x$.

Substitution: $\quad t = \tan \dfrac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2 \arctan t \quad , \quad dx = \dfrac{2}{1+t^2} dt \quad , \quad |x| < \pi$

$$\Rightarrow \quad \sin \frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \ ,$$
$$\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \ .$$



Da $\quad \sin x = 2 \sin \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2} \quad , \quad \cos x = \cos^2 \dfrac{x}{2} - \sin^2 \dfrac{x}{2} \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt}$$

Damit erhält man eine rationale Funktion in t.

Beispiel $(a > |b|)$

$$\int \frac{1}{a + b\cos x}\ dx = \int \frac{1}{a + b \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\ dt = \int \frac{2}{a(1+t^2) + b(1-t^2)}\ dt$$
$$= \int \frac{2}{(a+b) + (a-b)t^2}\ dt = \frac{2}{a-b} \int \frac{1}{t^2 + \frac{a+b}{a-b}}\ dt = \frac{2}{a-b} \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \arctan \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\ t$$
$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2}\right).$$

Also gilt

$$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{1}{a + b\cos x}\ dx = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad , \quad \text{falls } a > |b|}$$

Denn: $\quad \displaystyle\lim_{x \to \pi-} \arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Integration komplexwertiger Funktionen

Sei $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = u(x) + iv(x) \quad , \quad u, v : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sind u und v integrierbar in $I \subset \mathbb{R}$, so definieren wir

$$\int f(x)\ dx = \int u(x)\ dx + i \int v(x)\ dx.$$

Existieren zu u und v Stammfunktionen U und V mit $U'(x) = u(x)$ und $V'(x) = v(x) \quad \forall x \in I$, so nennen wir F mit $F(x) = U(x) + iV(x)$ Stammfunktion von f, dh. es gilt:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{und} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + c \quad , \quad (c \in \mathbb{C}).$$

Beispiel

Für $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ gilt:

$$\boxed{\int \mathrm{e}^{\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x} + c \quad , \quad (c \in \mathbb{C})}$$

Denn:
$\frac{d}{dx}(\mathrm{e}^{\lambda x}) = \frac{d}{dx}(\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{i\beta x}) = \frac{d}{dx}(\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x + i\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x)$
$= \mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) + i\mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x)$
$= \mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha + i\beta)(\cos\beta x + i\sin\beta x) = \lambda\mathrm{e}^{\lambda x}$.

Anwendung: Berechnung von Integralen der Typen
$\int \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$, $\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Mit $\lambda = \alpha + i\beta$ gilt $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x = Re(\mathrm{e}^{\lambda x})$, $\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x = Im(\mathrm{e}^{\lambda x})$ $\Rightarrow$
$\int \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = Re(\int \mathrm{e}^{\lambda x}\,dx) = Re(\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x}) + c$
$\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = Im(\int \mathrm{e}^{\lambda x}\,dx) = Im(\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x}) + c.$

Da $\quad \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x} = \frac{\overline{\lambda}}{|\lambda|^2}\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\mathrm{e}^{\alpha x} \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \int \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,dx &= \frac{\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x}{\alpha^2 + \beta^2}\mathrm{e}^{\alpha x} \\ \int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,dx &= \frac{\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x}{\alpha^2 + \beta^2}\mathrm{e}^{\alpha x} \end{aligned}}$$

Bemerkung 6.28 : Es gilt:

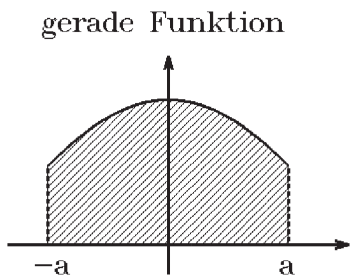
$$\boxed{\begin{aligned} &\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \quad , \quad \text{falls } f \textit{ ungerade} \text{ Funktion} \\ &\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx \quad , \quad \text{falls } f \textit{ gerade} \text{ Funktion} \end{aligned}}$$

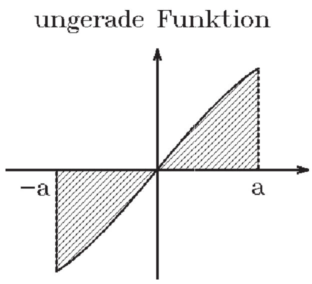
Denn: Sei f ungerade Funktion $\Rightarrow$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) + \int_0^a f(x)\,dx$$

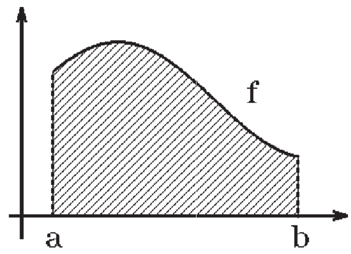
Subst.: $t = -x$, $dx = -dt$

$$= \int_0^a (-f(t))\,dt + \int_0^a f(x)\,dx = 0$$, analog für gerade Funktion.





Flächenberechnung

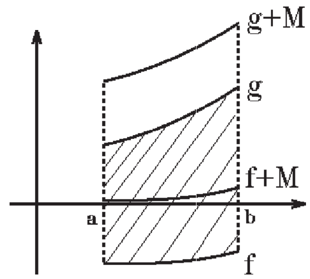


Ist $f : [a,b] \to I\!R$ stetig in $[a,b]$
und gilt: $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [a,b]$
$\Rightarrow \quad \displaystyle\int_a^b f(x)\; dx =$*Flächeninhalt*
der Fläche zwischen x-Achse, Graph von f
und den Geraden $x = a$ und $x = b$.

Satz 6.29 :
Seien $f, g : [a,b] \to I\!R$ stetig in $[a,b]$,
und es gelte: $f(x) \leq g(x) \;\; \forall x \in [a,b]$.
Dann gilt:

$$\boxed{\int_a^b (g(x) - f(x))\; dx = \textit{Flächeninhalt}}$$

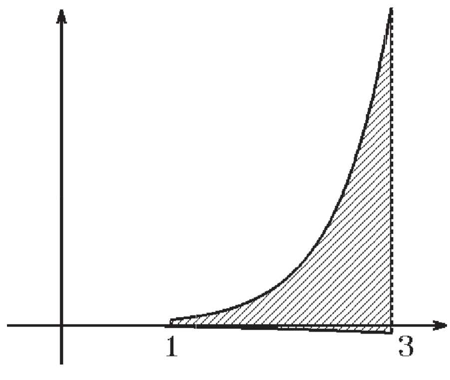
der Fläche zwischen den Graphen von f
und g und den Geraden $x = a$ und $x = b$.



Beweis :
Sei $|f(x)| \leq M \;\; \forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad -M \leq f(x) \leq M \;\; \forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad f(x) + M \geq 0$
und $g(x) + M \geq 0 \;\; \forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow$
$\displaystyle\int_a^b (g(x) - f(x))\; dx = \int_a^b (g(x) + M)\; dx - \int_a^b (f(x) + M)\; dx =$Flächeninhalt.

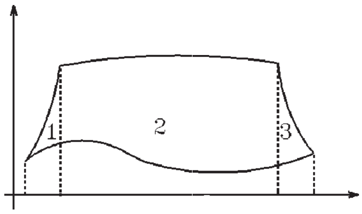
Beispiel

$g(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $f(x) = -x^2$, $[a,b] = [1,3]$,
$F = \displaystyle\int_1^3 (\mathrm{e}^{2x} - (-x^2))\; dx = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \frac{x^3}{3}\right]_1^3$
$= \dfrac{\mathrm{e}^6}{2} + 9 - \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}(\mathrm{e}^4 - 1) + \dfrac{26}{3}$.



Bemerkung
Sind der linke bzw. der rechte Rand keine Geraden der Gestalt $x = a$ bzw. $x = b$, so muß die Fläche in mehrere Teilflächen aufgeteilt werden.

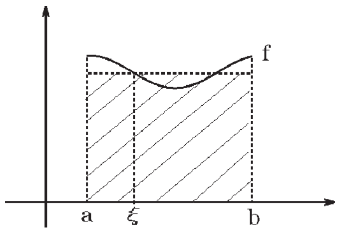
Beispiel



Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz 6.30 : *Mittelwertsatz*
Seien $f, g : [a, b] \to I\!R$ stetig in $[a, b]$, und sei $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\ dx}$$



Ist $g(x) = 1 \quad \forall x \in [a, b]$, dann gilt
$\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = f(\xi)(b - a).$

Beweis :
Ist $g(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b] \;\Rightarrow$ beide Seiten $= 0$.
Sei $x_0 \in [a, b]$ mit $g(x_0) > 0$

$\Rightarrow\; g(x) > 0 \quad \forall x \in U(x_0)$ (da g stetig) $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b g(x)\ dx > 0$ (da $g(x) \geq 0$ sonst).

Sei $m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x) \quad , \quad M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x) \;\Rightarrow\; mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \quad \forall x \in [a, b]$

$$\Rightarrow\; m \int_a^b g(x)\ dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\ dx \leq M \int_a^b g(x)\ dx$$

$$\Rightarrow\; m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\ dx}{\int_a^b g(x)\ dx} \leq M.$$

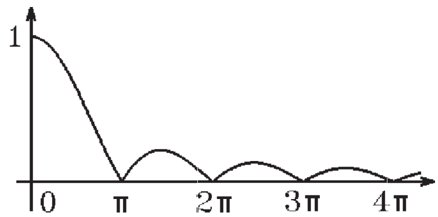
Da f stetig in $[a, b]$, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\ dx}{\int_a^b g(x)\ dx} \quad \Rightarrow \quad \text{Behauptung.}$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung ist oft ein gutes Hilfsmittel zur Abschätzung von Integralen.

Beispiel

$f(x) = \dfrac{|\sin x|}{x}$ für $x \neq 0$, $f(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad f$ stetig in $\mathbb{R}$.



$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(t+k\pi)|}{t+k\pi}\, dt$$

Subst.: $t = x - k\pi$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin t \cos k\pi + \cos t \sin k\pi|}{t+k\pi}\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{t+k\pi}\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{1}{t+k\pi} \cdot \sin t\, dt$$

(da $\sin k\pi = 0$ und $\cos k\pi = (-1)^k$) (da $\sin t \geq 0$ in $[0,\pi]$)

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\xi_k + k\pi} \int_0^{\pi} \sin t\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\xi_k + k\pi} (-\cos t)\Big]_0^{\pi} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{\xi_k + k\pi} \qquad (\text{mit } \xi_k \in [0,\pi])$$

$$\geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty \quad , \ (\text{da } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ divergent}).$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} = \infty$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \text{ ist divergent (später).}$$

Integration von Funktionenfolgen und Funktionenreihen

Frage: Gilt $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$?

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\Big)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \ ?$$

Eine Antwort auf diese Frage geben die beiden folgenden Sätze

Satz 6.31 : Seien $f_n : [a,b] \to I\!R$ stetig in $[a,b] \quad \forall n \in I\!N$.
Die Folge (f_n) *konvergiere gleichmäßig in* $[a,b]$ gegen $f : [a,b] \to I\!R$.
Dann ist auch f stetig in $[a,b]$ und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dh.: Grenzwert und Integration dürfen vertauscht werden.

Beweis :
Die Stetigkeit von f wurde bereits früher gezeigt (vgl. Satz 5.19, S.148)

$$|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$

$$\le \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|(b-a) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty \quad \text{(wegen gleichmäßiger Konvergenz).}$$

Satz 6.32 : Seien $f_n : [a,b] \to I\!R$ stetig in $[a,b] \quad \forall n \in I\!N$.
Die unendliche Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *konvergiere gleichmäßig in* $[a,b]$.
Dann gilt:

$$\int_a^b (\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x))\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Dh.: Summation und Integration dürfen vertauscht werden. Es darf *gliedweise integriert* werden.

Beweis : Die Behauptung folgt sofort aus Satz 6.31 mit Hilfe der Partialsummenfolge.

Da *Potenzreihen* in jedem abgeschlossenen Teilintervall des Konvergenzintervalls $I = \{x \in I\!R \;:\; |x - x_0| < r\}$ *gleichmäßig konvergieren*, dürfen Potenzreihen in I *gliedweise integriert* werden, also gilt für $[a,b] \subset I$:

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b (x-x_0)^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}\Big]_a^b .$$

Beispiele

1. Da $\ln'(1-x) = \dfrac{-1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \quad |x| < 1 \quad \Rightarrow$

   $$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + c = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + c\,,$$

   für $x = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln 1 = 0 = 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad \Rightarrow$

   $$\boxed{\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad , \quad |x| < 1}$$

2. Da $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \quad , \quad |x| < 1 \quad \Rightarrow$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int x^{2n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + c \ ,$$

für $x = 0 \quad \Rightarrow \quad \arctan 0 = 0 = 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad , \quad |x| < 1}$$

Da $\dfrac{\pi}{6} = \arctan \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} (\dfrac{1}{\sqrt{3}})^{2n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} \quad \Rightarrow$

$\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{n_0} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} + R \quad$ mit $\quad |R| < \dfrac{1}{\sqrt{3}(2n_0+3)3^{n_0+1}} \quad$ (da alternierende Reihe).

Mit $|R| < 10^{-10} \quad \Rightarrow \quad n_0 = 17 \quad \Rightarrow$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{17} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} + R = 0.5235987756 + R \ \text{ mit } \ |R| < 10^{-10} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\pi = 3.141592653 + R \ \text{ mit } \ |R| < 6 \cdot 10^{-10}}$$

3. Da $\operatorname{arsinh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \dbinom{-1/2}{n} x^{2n} \quad , \quad |x| < 1 \quad \Rightarrow$

$$\operatorname{arsinh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c \ ,$$

für $x = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arsinh} 0 = 0 = 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\operatorname{arsinh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad , \quad |x| < 1}$$

4. Da $\dfrac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n+1} \ , \ x \in \mathbb{R},$$

ist Stammfunktion von $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{,falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{,falls } x = 0. \end{cases}$

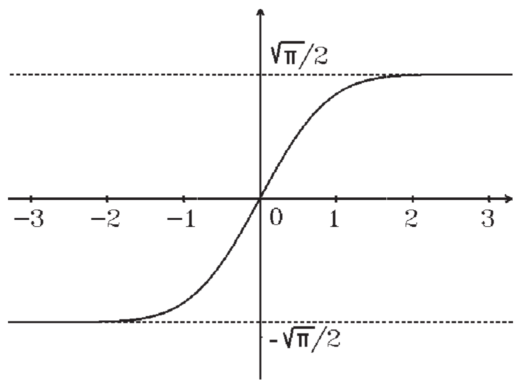
5. Da $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$

$$\boxed{F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1} \quad , \quad x \in I\!R}$$

ist Stammfunktion von $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Kurvendiskussion für $F(x)$:

Da $F'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} > 0 \;\; \forall x \in I\!R \quad \Rightarrow$
F ist streng monoton wachsend in $I\!R$.
$F(0) = 0$, $F(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} \mathrm{e}^{-t^2} dt = \int_0^x \mathrm{e}^{-(-s)^2} (-ds) = -\int_0^x \mathrm{e}^{-s^2} ds = -F(x) \quad \Rightarrow$
(Substitution $s = -t$, $ds = -dt$)
F ist ungerade Funktion.
$F''(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$, Vorzeichenwechsel von F'' bei $x = 0 \quad \Rightarrow$
F hat Wendepunkt bei $x = 0$.
$F''(x) > 0$ für $x < 0 \quad \Rightarrow \quad F$ ist konvex für $x < 0$,
$F''(x) < 0$ für $x > 0 \quad \Rightarrow \quad F$ ist konkav für $x > 0$.
$\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (später).



Berechnung von Funktionswerten mit Hilfe der Potenzreihe:

z.B.: Gesucht $F(1)$:
$F(1) \;=\; \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} dx \;=\; \sum_{n=0}^{n_0} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} + R$ mit $|R| < \dfrac{1}{(n_0+1)!(2n_0+3)}$ (alternierende Reihe),
z.B.: $|R| < 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad n_0 = 8 \quad \Rightarrow \quad F(1) = 0.7468243 + R$ mit $|R| < 10^{-6}$.

Oder Berechnung der Funktionswerte mit Hilfe numerischer Integrationsformeln (z.B. Simpson-Formel) (später).

Uneigentliche Integrale

$\int_a^b f(x)\ dx$ wurde bisher nur für *beschränkte* Funktionen und *endliche* Intervalle definiert. Wir wollen nun eine Erweiterung auch für gewisse *unbeschränkte* Funktionen bzw. für *unendliche* Intervalle geben. Wir hatten bereits in den Sätzen 6.15 und 6.16 die folgenden Aussagen:
f integrierbar in $[a,b] \quad \Leftrightarrow \quad f$ integrierbar in jedem Teilintervall von $[a,b]$.
Ist speziell $[a_n,b_n] \subset [a,b]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, so gilt
$\lim\limits_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx.$
Ähnlich wollen wir vorgehen für unbeschränkte Funktionen bzw. unendliche Intervalle.

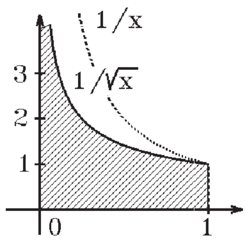
Definition 6.33 :

a) Sei $-\infty < a < b \leq \infty$ (b ist uneigentliche Stelle). f heißt *uneigentlich integrierbar* in $[a,b)$, wenn f in jedem Teilintervall $[a,B] \subset [a,b)$ integrierbar ist und
$\lim\limits_{B\to b-} \int_a^B f(x)\ dx =: \int_a^b f(x)\ dx$ existiert.

b) Sei $-\infty \leq a < b < \infty$ (a ist uneigentliche Stelle). f heißt *uneigentlich integrierbar* in $(a,b]$, wenn f in jedem Teilintervall $[A,b] \subset (a,b]$ integrierbar ist und
$\lim\limits_{A\to a+} \int_A^b f(x)\ dx =: \int_a^b f(x)\ dx$ existiert.

c) Sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$ (a und b sind uneigentliche Stellen). f heißt *uneigentlich integrierbar* in (a,b), wenn für ein $c \in (a,b)$ gilt:
f ist in $(a,c]$ und $[c,b)$ uneigentlich integrierbar. In diesem Fall schreiben wir
$\int_a^b f(x)\ dx := \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$
(Integral bei c aufspalten und dann auf Konvergenz untersuchen).

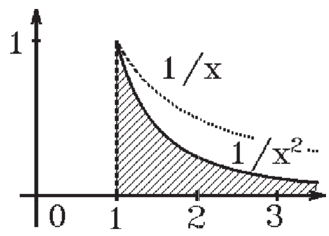
Beispiele



1. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\ dx \quad , \quad \alpha \in I\!R$ fest.
Es gilt für $0 < \epsilon < 1$:
$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\ dx = \begin{cases} -\ln\epsilon & \text{,falls } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}(1-\epsilon^{1-\alpha}) & \text{,falls } \alpha \neq 1. \end{cases}$
Da $\lim\limits_{\epsilon\to 0}(\ln\epsilon) = -\infty$ und $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\epsilon^{1-\alpha} = \left\{ \begin{array}{ll} \infty & \text{,falls } \alpha > 1 \\ 0 & \text{,falls } \alpha < 1 \end{array} \right\}$ gilt

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\ dx = \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{ist divergent für } \alpha \geq 1.$$



2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad , \quad \alpha \in I\!R$ fest.

Es gilt für $1 < B < \infty$:

$$\int_1^B \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \ln B & \text{,falls } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}(B^{1-\alpha} - 1) & \text{,falls } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Da $\lim\limits_{B\to\infty} (\ln B) = \infty$ und $\lim\limits_{B\to\infty} B^{1-\alpha} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{,falls } \alpha > 1 \\ \infty & \text{,falls } \alpha < 1 \end{array} \right\}$ gilt

$$\boxed{\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha - 1} \quad \text{konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1}$$

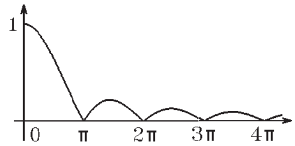
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{ist divergent für } \alpha \leq 1.$$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0} (-2\sqrt{1-x})\Big]_0^{1-\epsilon} = 2$

$$\Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = 2 \quad \text{(konvergent)}.$$

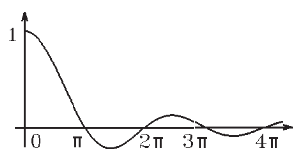
4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ divergent,

(vgl. Beispiel S.211),



aber $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergent.

(vgl. Übungsaufgabe).



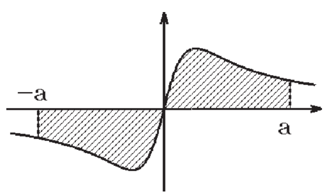
5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{B\to\infty} \int_0^B \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{B\to\infty} \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big]_0^B$

$$= \lim_{B\to\infty} \frac{1}{2}\ln(1+B^2) = \infty$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx \quad \text{divergent.}$$

Also ist auch $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$ divergent

(Integral aufspalten, da beide Integralgrenzen uneigentlich), obwohl



$$\lim_{B\to\infty}\int_{-B}^{B}\frac{x}{1+x^2}\,dx=\lim_{B\to\infty}0=0.$$
(da Integrand ungerade Funktion)

6. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{a+b\cos x}\,dx=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$, falls $a>|b|$ (vgl. Beispiel S.207).

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=2\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=2\arctan x\Big]_0^{\infty}=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi.$
(da Integrand gerade Funktion)

8. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x(1+x)}\,dx=\ln 2$ (konvergent), denn
$$\int\frac{1}{x(1+x)}\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx-\int\frac{1}{1+x}\,dx=\ln|x|-\ln|1+x|=\ln|\frac{x}{1+x}|$$
und $\displaystyle\lim_{B\to\infty}\ln|\frac{x}{1+x}|\Big]_1^{B}=\lim_{B\to\infty}\ln|\frac{B}{1+B}|-\ln\frac{1}{2}=\ln 2.$

9. $\displaystyle\int_0^{\infty}xe^{-x}dx=-(1+x)e^{-x}\Big]_0^{\infty}=1$, da $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1+x}{e^x}=0.$

10. $\displaystyle\int_0^1\ln x\,dx=\lim_{\epsilon\to0}(x\ln x-x)\Big]_{\epsilon}^{1}=-1-\lim_{\epsilon\to0}(\epsilon\ln\epsilon-\epsilon)=-1$, da $\displaystyle\lim_{\epsilon\to0}(\epsilon\ln\epsilon)=0.$

11. $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x(1-x)}\,dx=\int_0^c\frac{1}{x(1-x)}\,dx+\int_c^1\frac{1}{x(1-x)}\,dx$, $c\in(0,1)$
(Integral aufspalten, da zwei uneigentliche Grenzen),
$\displaystyle\int\frac{1}{x(1-x)}\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx+\int\frac{1}{1-x}\,dx=\ln|\frac{x}{1-x}|$ (Stammfunktion),
$\displaystyle\lim_{\epsilon\to0+}\ln|\frac{x}{1-x}|\Big]_{\epsilon}^{c}=\ln\frac{c}{1-c}-\lim_{\epsilon\to0+}\ln\frac{\epsilon}{1-\epsilon}=\ln\frac{c}{1-c}+\infty\;\Rightarrow$ divergent
$\displaystyle\Rightarrow\int_0^1\frac{1}{x(1-x)}\,dx$ divergent.

Um die Konvergenz (oder Divergenz) von Integralen zu beurteilen, bei denen man eine Stammfunktion nicht kennt, benötigen wir die folgenden *Konvergenzkriterien*:

Satz 6.34 : *Konvergenzkriterien*

Seien f und g integrierbar in jedem Teilintervall $[a,B] \subset [a,b)$ (bzw. $[A,b] \subset (a,b]$) und sei $g(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

a) Konvergiert $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\ dx \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\ dx$ ist *konvergent.*

b) Ist

$$\boxed{|f(x)| \le g(x) \quad \forall x \in (a,b)}$$

und konvergiert $\displaystyle\int_a^b g(x)\ dx$

$\Rightarrow \quad \displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ ist konvergent mit $\quad \displaystyle|\int_a^b f(x)\ dx| \le \int_a^b |f(x)|\ dx \le \int_a^b g(x)\ dx.$

c) Existiert

$$\boxed{\lim_{x\to b-} \frac{|f(x)|}{g(x)} = L \quad \text{mit} \quad 0 \le L < \infty}$$

(bzw. $x \to a+$)

und konvergiert $\displaystyle\int_a^b g(x)\ dx \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\ dx$ ist *konvergent.*

d) Existiert

$$\boxed{\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \quad \text{mit} \quad 0 < L < \infty}$$

(bzw. $x \to a+$)

und divergiert $\displaystyle\int_a^b g(x)\ dx \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\ dx$ ist *divergent.*

Beweis :
Wir beweisen den Satz für den Fall, daß b die uneigentliche Stelle ist (analog für den Fall, daß a die uneigentliche Stelle ist).

a)b) Da $0 \le |f(x)| \le g(x)$, sind $F(x) = \displaystyle\int_a^x |f(t)|\ dt$ und $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\ dt$ in $[a,b)$ monoton wachsend, und es gilt $\quad 0 \le F(x) \le G(x) \le \displaystyle\lim_{x\to b-} G(x) = \int_a^b g(x)\ dx$

$\Rightarrow \quad F(x)$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt

$\Rightarrow \quad$ existiert $\displaystyle\lim_{x\to b-} F(x) = \int_a^b |f(x)|\ dx \le \int_a^b g(x)\ dx.$

Mit $\varphi(x) = f(x) + |f(x)|$ gilt $0 \le \varphi(x) \le 2|f(x)| \quad \Rightarrow \quad$ (nach b)) existiert $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\ dx.$

Da $\lim\limits_{B\to b-}\int_a^B f(x)\;dx = \int_a^b \varphi(x)\;dx - \int_a^b |f(x)|\;dx \quad\Rightarrow\quad \int_a^b f(x)\;dx$ ist konvergent.

Da $\;|\int_a^B f(x)\;dx| \leq \int_a^B |f(x)|\;dx \leq \int_a^b g(x)\;dx$

$\Rightarrow$ (für $B \to b-$) $\;|\int_a^b f(x)\;dx| \leq \int_a^b |f(x)|\;dx \leq \int_a^b g(x)\;dx.$

c) 1.Fall $\quad L = 0$:

$\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{|f(x)|}{g(x)} = 0 \quad\Rightarrow\quad 0 \leq \dfrac{|f(x)|}{g(x)} \leq 1 \;\; \forall x \in [\xi, b)$ mit $\xi \in [a, b)$
$\Rightarrow \quad |f(x)| \leq g(x) \;\; \forall x \in [\xi, b).$

Da $\int_\xi^b g(x)\;dx$ konvergent $\Rightarrow$ (nach b)) $\int_\xi^b f(x)\;dx$ ist konvergent

$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\;dx = \int_a^\xi f(x)\;dx + \int_\xi^b f(x)\;dx$ ist konvergent (das 1. Integral ist ein eigentliches Integral).

2.Fall $\quad L > 0$:

$\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{|f(x)|}{g(x)} = L \quad\Rightarrow\quad \dfrac{L}{2} \leq \dfrac{|f(x)|}{g(x)} \leq 2L \;\; \forall x \in [\xi, b)$ mit $\xi \in [a, b)$

$\Rightarrow \quad |f(x)| \leq (2L)g(x) \;\; \forall x \in [\xi, b) \quad\Rightarrow$ (nach b)) $\int_a^b f(x)\;dx$ ist konvergent.

d)

$\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{f(x)}{g(x)} = L > 0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{L}{2} \leq \dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 2L \;\; \forall x \in [\xi, b)$ mit $\xi \in [a, b)$
$\Rightarrow \quad f(x) \geq \dfrac{L}{2} g(x) \;\; \forall x \in [\xi, b).$

Da $\int_a^b g(x)\;dx$ divergent $\Rightarrow \int_a^b f(x)\;dx$ ist divergent.

Beispiele

1. $\int_1^\infty \dfrac{\sin x}{x^2}\;dx$ ist konvergent, denn
$\dfrac{|\sin x|}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2} \quad \forall x \in [1, \infty)$ und $\int_1^\infty \dfrac{1}{x^2}\;dx$ ist konvergent.

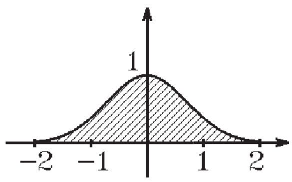
2. $\int_1^\infty \mathrm{e}^{-x^2} dx$ ist konvergent, denn mit $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ und $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ gilt
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|\mathrm{e}^{-x^2}|}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}} = \lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{u}{\mathrm{e}^u} = 0.$
Da $\int_1^\infty \dfrac{1}{x^2}\;dx$ konvergent $\Rightarrow \int_1^\infty \mathrm{e}^{-x^2} dx$ ist konvergent.

Da $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} dx$ ein eigentliches Integral $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} dx$ ist konvergent

$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2} dx = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} dx$ ist konvergent (da Integrand gerade Funktion).

Wir werden später berechnen:

$$\boxed{\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}$$



3. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+1}{x^2+3}\, dx$ ist divergent, denn mit $g(x) = \dfrac{1}{x}$ gilt

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x+1}{x^2+3}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x+1)}{x^2+3} = 1$ und $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$ ist divergent.

4. **Gammafunktion**

Definition 6.35 : Für $x > 0$ definieren wir

$$\boxed{\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} dt}$$

Für $-n < x < -n+1$ $(n \in \mathbb{N})$ definieren wir

$\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$.

$\Gamma\ :\ D(\Gamma) \to \mathbb{R}$ mit $D(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x \neq 0, -1, -2, -3, \ldots\}$ heißt *Gammafunktion.*

Beweis der Konvergenz des uneigentlichen Integrals für $x > 0$:

a) $\displaystyle\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} dt$ ist konvergent, denn mit $g(t) = \dfrac{1}{t^2}$ gilt

$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{x+1}}{\mathrm{e}^t} = 0$ (da e-Funktion stärker wächst als jede Potenz von t)

und $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\, dt$ ist konvergent.

b) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} dt$ ist konvergent, denn mit $g(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$ gilt

$\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}}{\frac{1}{t^\alpha}} = \lim_{t\to 0+} \frac{t^{x-1+\alpha}}{\mathrm{e}^t} = 0$, falls $x-1+\alpha > 0$, also $\alpha > 1-x$. Wähle α mit

$1 - x < \alpha < 1$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ ist konvergent $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} dt$ ist konvergent.

Zusammen gilt dann:

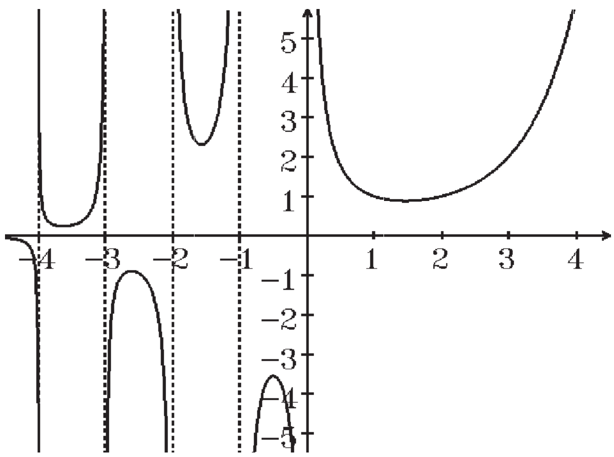
$\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} dt$ ist konvergent für $x > 0$.

Ist $-n < x < -n+1 \quad \Rightarrow \quad 0 < (x+n) < 1 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(x+n)$ existiert

$\Rightarrow \quad \Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$ existiert.

Eigenschaften der Gammafunktion

a) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \forall x > 0$
b) $\Gamma(n+1) = n! \qquad \forall n \in I\!N_0$
c) $\Gamma(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n-1)\Gamma(x) \qquad \forall x > 0\ ,\ n \in I\!N$
d) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.



$\Gamma(1) = 1\ ,\ \Gamma(2) = 1\ ,\ \Gamma(3) = 2! = 2\ ,\ \Gamma(4) = 3! = 6\ ,$ usw.
Die Gammafunktion interpoliert die Fakultäten.

Beweis :

a) $\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1+1} dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x} dt = -\mathrm{e}^{-t}\, t^x \Big]_{t=0}^{\infty} - \int_0^\infty x t^{x-1}(-\mathrm{e}^{-t})\, dt$

(partielle Integration)

$= 0 + x \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} dt = x\Gamma(x)$, da $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{t^x}{\mathrm{e}^t} = 0$ und $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{t^x}{\mathrm{e}^t} = 0$

$\Rightarrow \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \forall x > 0.$

b) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)\cdots 1\cdot\Gamma(1) = n!\,\Gamma(1) = n!$,

da $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, dt = -\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^\infty = 1.$

$\Rightarrow \quad \Gamma(1) = 1\ ,\ \Gamma(n+1) = n!$.

c) $\Gamma(x+n) = (x+n-1)\Gamma(x+n-1) = (x+n-1)(x+n-2)\Gamma(x+n-2) = \ldots$
$\quad = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\Gamma(x).$

d) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{1/2-1} dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s^2} \cdot 2ds$

(Substitution $s = \sqrt{t}$, $t = s^2$, $dt = 2sds$)

$= 2 \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s^2}\, ds = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-s^2}\, ds = \sqrt{\pi}$ (vgl. S.220).

Die Werte der Gammafunktion müssen nur im Intervall $(1, 2)$ berechnet werden (z.B. mit der Simpson-Formel (später)); alle anderen Werte erhält man dann mit Hilfe der Eigenschaften a) und c) :

z.B.: $\Gamma(0.3) =?$: $\Gamma(1.3) = \Gamma(0.3 + 1) = (0.3)\Gamma(0.3) \Rightarrow \Gamma(0.3) = \dfrac{\Gamma(1.3)}{0.3}$,

z.B.: $\Gamma(3.4) = (2.4)(1.4)\Gamma(1.4)$.

Bemerkung:

Wegen der Eigenschaft c) ist die Definition für $-n < x < -n + 1$ sinnvoll:

$\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x + n)}{x(x + 1)\cdots(x + n - 1)}$.

Benutzung der Gammafunktion

Beispiele

1. $\displaystyle\int_0^\infty t^2 \mathrm{e}^{-t}\, dt = \int_0^\infty t^{3-1}\mathrm{e}^{-t}\, dt = \Gamma(3) = 2! = 2.$

2. $\displaystyle\int_0^\infty t^2 \mathrm{e}^{-t^2} dt = \int_0^\infty s\mathrm{e}^{-s} \frac{1}{2\sqrt{s}}\, ds = \int_0^\infty \frac{1}{2}\sqrt{s}\mathrm{e}^{-s}\, ds$

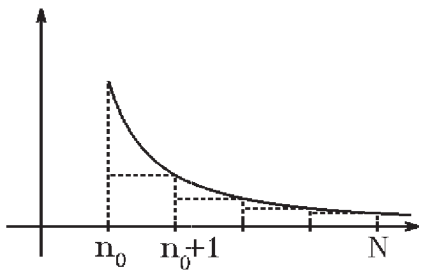
   (Substitution $s = t^2$, $t = \sqrt{s}$, $dt = \dfrac{1}{2\sqrt{s}}ds$)

   $= \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^\infty s^{3/2-1}\mathrm{e}^{-s}\, ds = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Integralkriterium für unendliche Reihen

Satz 6.36 : Sei für $n_0 \in \mathbb{N}_0$ $f : [n_0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig, positiv und monoton fallend in $[n_0, \infty)$, und sei $\displaystyle\int_{n_0}^\infty f(x)\, dx$ konvergent

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=n_0}^\infty f(n)$ ist *konvergent.*



Beweis :

Für die Untersumme $\sum\limits_{n=n_0+1}^{N} f(n)$ des Integrals $\int\limits_{n_0}^{N} f(x)\,dx$ gilt:

$$\sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) \le \int_{n_0}^{N} f(x)\,dx < \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx \quad \forall N > n_0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{N} f(n) \text{ ist monoton wachsend und beschränkt} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \text{ ist konvergent.}$$

Beispiele

1.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ ist konvergent, falls } \alpha > 1}$$

Denn: Für $\alpha > 1$ und $x \ge 1$ ist $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ stetig, monoton fallend und positiv und $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ konvergent.

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ ist konvergent, denn:

Für $x \ge 2$ ist $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ stetig, monoton fallend und positiv und

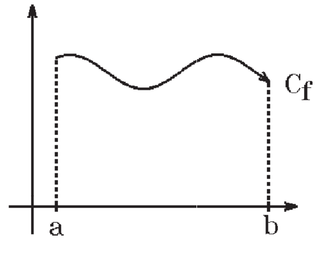
$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Big]_{\ln 2}^{\infty} = \frac{1}{\ln 2} \text{ ist konvergent.}$$

(Substitution $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x}dx$)

Abschätzung mit Hilfe von Unter- und Obersumme:

$$\underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}}_{\text{(Untersumme)}} \le \frac{1}{\ln 2} \le \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}}_{\text{(Obersumme)}} .$$

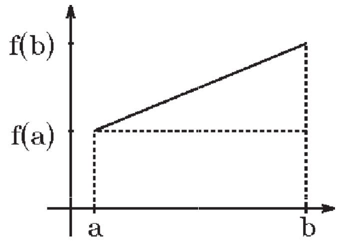
Bogenlänge ebener Kurven



Sei $f : [a,b] \to I\!R$ stetig differenzierbar in $[a,b]$,
$C_f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} : x \in [a,b] \right\} \subset I\!R^2$ der Graph von f.
C_f stellt eine Kurve in $I\!R^2$ dar.
Um die Länge einer solchen Kurve zu definieren, greifen wir zunächst auf "elementare" Kurven zurück:

$f(x) = \alpha x + \beta \quad$ (Gerade),

$L(C_f) = \sqrt{(b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2}$.



Ist nun f eine beliebige stetig differenzierbare Funktion in $[a,b]$ und $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$, so können wir durch die Punkte $\begin{pmatrix} x_k \\ f(x_k) \end{pmatrix}$ einen Polygonzug p_n legen mit der Länge

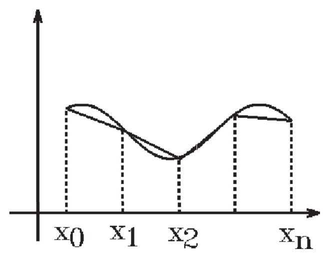
$$L(C_{p_n}) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \Big(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\Big)^2} \cdot \Delta x_k$$

(mit $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$)

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \cdot \Delta x_k$$

(nach dem Mittelwertsatz mit $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$).



Die letzte Summe ist eine Riemannsche Zwischensumme, die für $|Z| \to 0$ gegen $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$ konvergiert.

Also definieren wir:

Definition 6.37 : Sei $f : [a,b] \to I\!R$ stetig differenzierbar in $[a,b]$, dann ist

$$\boxed{L(C_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}$$

die *Bogenlänge* der Kurve $C_f = \Big\{ \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \; : \; x \in [a,b] \Big\}$.

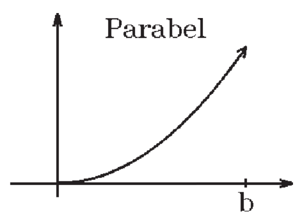
Beispiele

1. $f : [0,b] \to I\!R$ mit $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$,

   (Parabel)

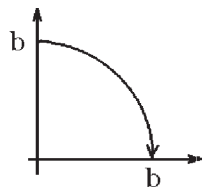
   $$L(C_f) = \int_0^b \sqrt{1 + x^2}\, dx$$

   $$= \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}))\Big]_0^b$$



$$= \frac{1}{2}(b\sqrt{1+b^2} + \ln(b + \sqrt{1+b^2})).$$

2. $f : [0,b] \to I\!R$ mit $f(x) = \sqrt{b^2 - x^2}$,
(Viertelkreis)



$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{b^2-x^2}} \quad , \quad (0 \le x < b),$$

$$1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{x^2}{b^2-x^2} = \frac{b^2}{b^2-x^2} \ ,$$

$$L(C_f) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{b-\epsilon} \frac{b}{\sqrt{b^2-x^2}}\, dx = \lim_{\epsilon\to 0} b\arcsin\frac{x}{b}\Big]_0^{b-\epsilon} = b\arcsin 1 = b\cdot\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ Umfang des Kreises mit Radius r ist: $2\pi r$.

Kurve in Parameterform

$$\boxed{C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in I\!R^2 \ : \ x = \varphi(t)\ ,\ y = \psi(t)\ ,\ t \in [a,b] \right\}}$$

φ, ψ seien stetig differenzierbar in $[a,b]$ mit $(\varphi'(t), \psi'(t)) \neq (0,0) \quad \forall t \in [a,b]$.

C stellt eine Kurve in $I\!R^2$ dar und hat die Kurvenlänge

$$\boxed{L(C) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\ dt}$$

Denn: Sei $\varphi' > 0$ in $[a,b]$ $\Rightarrow$ φ ist streng monoton wachsend $\Rightarrow$ φ^{-1} existiert mit $t = \varphi^{-1}(x)$ $\Rightarrow$ $y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x)) =: f(x)$ $\Rightarrow$ $L(C) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$

Da $f'(x) = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \dfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, folgt mit der Substitution $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)})^2} \cdot \varphi'(t)dt = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\ dt.$$

Ist $\varphi' < 0$ $\Rightarrow$ analog ; ist $\varphi'(t) = 0$ $\Rightarrow$ $\psi'(t) \neq 0$ $\Rightarrow$ analog (evt. Integralbereich aufspalten).

Bemerkung:
Es gilt für die Steigung der Kurve C im Punkt $\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$

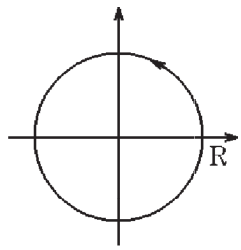
$$\boxed{f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad , \ \text{falls} \ \ x = \varphi(t)\ ,\ y = f(x) = \psi(t)}$$

Beispiele

1. $C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ : \ x = R\cos t \ , \ y = R\sin t \ , \ t \in [0, 2\pi] \right\}$,

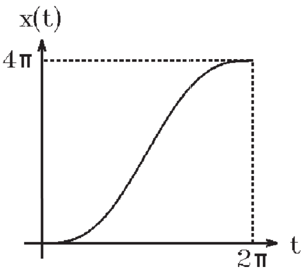
   (Kreis um 0 mit Radius R)

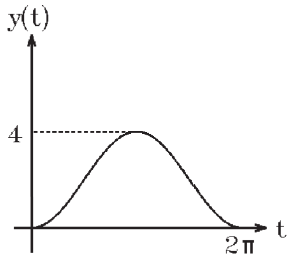
   $L(C) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} \ dt = 2\pi R$.

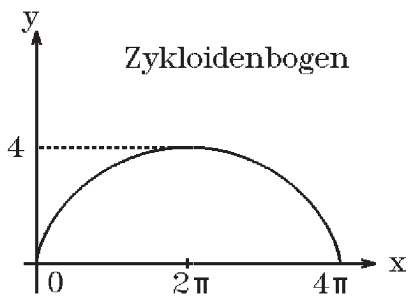


2. $C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ : \ x = 2(t - \sin t) \ , \ y = 2(1 - \cos t) \ , \ t \in [0, 2\pi] \right\}$,

   (Zykloidenbogen)







$x'(t) = 2(1 - \cos t)$, $y'(t) = 2\sin t$,
$x'^2(t) + y'^2(t) = 4 - 8\cos t + 4\cos^2 t + 4\sin^2 t = 8(1 - \cos t) \neq 0$ in $(0, 2\pi)$,

$$L(C) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^\pi \sqrt{8(1 - \cos t)} \ dt + \lim_{\epsilon \to 0} \int_\pi^{2\pi - \epsilon} \sqrt{8(1 - \cos t)} \ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{8(1 - \cos t)} \ dt = 4 \int_0^{2\pi} |\sin \frac{t}{2}| \ dt = 4 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \ dt = 4(-2\cos \frac{t}{2})\Big]_0^{2\pi} = 16.$$

(da $1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$) (da $\sin \frac{t}{2} \geq 0$ in $[0, 2\pi]$)

Steigung der Kurve in $\binom{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{t \to 0+} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t \to 0+} \frac{2\sin t}{2(1 - \cos t)} = \lim_{t \to 0+} \frac{\cos t}{\sin t} = \infty$$

$\Rightarrow$ vertikale Tangente in $\binom{0}{0}$.
Analog Steigung in $\binom{4\pi}{0}$ ist $-\infty$, also ebenfalls vertikale Tangente in $\binom{4\pi}{0}$.

Fläche zwischen Zykloidenbogen und x-Achse

$$F = \int_0^{4\pi} y(x)\ dx = \int_0^{2\pi} 2(1-\cos t)\cdot 2(1-\cos t)\ dt = 4\int_0^{2\pi} (1-2\cos t+\cos^2 t)\ dt$$

(Substitution $x = 2(t-\sin t)$, $dx = 2(1-\cos t)dt$, $y(x) = 2(1-\cos t)$)

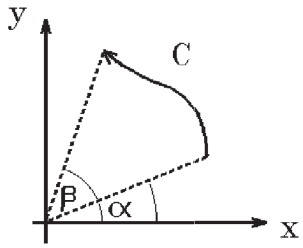
$$= 4\cdot 2\pi - 8\sin t\Big]_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} (1+\cos 2t)\ dt = 8\pi + 4\pi = 12\pi.$$

Kurve in Polarkoordinaten

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in I\!R^2\ :\ x = r(t)\cos t\ ,\ y = r(t)\sin t\ ,\ t\in[\alpha,\beta] \right\}\ ,$$

r stetig differenzierbar in $[\alpha,\beta]$.

$x(t) = r(t)\cos t$,
$y(t) = r(t)\sin t$.



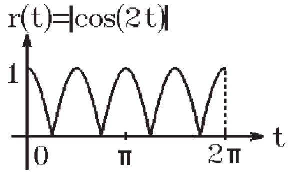
$x'(t) = r'(t)\cos t - r(t)\sin t$,
$y'(t) = r'(t)\sin t + r(t)\cos t$,

$$x'^2(t) + y'^2(t) = r'^2(t)(\cos^2 t + \sin^2 t) + r^2(t)(\sin^2 t + \cos^2 t) = r'^2(t) + r^2(t) \quad \Rightarrow$$

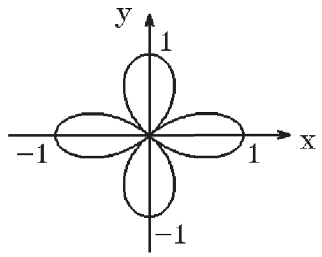
$$\boxed{L(C) = \int_\alpha^\beta \sqrt{r'^2(t) + r^2(t)}\ dt}$$

Beispiel

$r(t) = |\cos 2t|$, $t\in[0,2\pi]$,
symmetrisch zur x- und y-Achse, da
$r(-t) = r(t)$ und $r(\frac{\pi}{2}-t) = r(\frac{\pi}{2}+t)$.



$$L(C) = 8\int_0^{\pi/4} \sqrt{r'^2(t)+r^2(t)}\ dt$$
$$= 8\int_0^{\pi/4} \sqrt{4\sin^2 2t + \cos^2 2t}\ dt$$
$$= 8\int_0^{\pi/4} \sqrt{3\sin^2 2t + 1}\ dt$$



(elliptisches Integral, numerisch berechnen (später)).

VII Gewöhnliche Differentialgleichungen (Einführung)

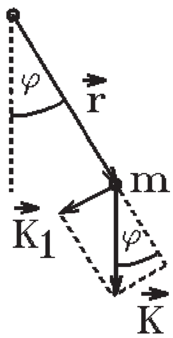
Problemstellung

Viele grundlegende Naturgesetze lassen sich nur in der Gestalt einer *Differentialgleichung (DGL)* formulieren:

Beispiele

1. $R' = -cR$ (radioaktiver Zerfall).

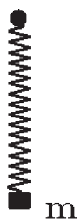
2. *Mathematisches Pendel*



$|\vec{K}| = mg$,
$|\vec{K}_1| = mg \sin\varphi$,
$b = -l\varphi''$ (b Bahnbeschleunigung)
(da $b = -s''$, $s = l\varphi$ (Bogen)).
Nach dem Gesetz von Newton gilt dann:
$mg \sin\varphi = -ml\varphi'' \quad \Rightarrow$
$\varphi'' + \dfrac{g}{l}\sin\varphi = 0$ (nichtlineare DGL).
Ist φ klein $\Rightarrow$ $\sin\varphi \approx \varphi$, also erhält man
mit $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ die folgende lineare DGL 2.Ordnung (Schwingungsgleichung)

$$\boxed{\varphi'' + \omega^2\varphi = 0}$$

3. *Federschwingung*



$|\vec{K}| = -kx$
(k Federkonstante, x Auslenkung).
Also gilt nach dem Gesetz von Newton:
$mb = -kx$; mit $b = x''$ $\Rightarrow$
$x'' + \dfrac{k}{m}x = 0$; mit $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ erhalten wir ebenfalls eine Schwingungs-DGL

$$\boxed{x'' + \omega^2 x = 0}$$

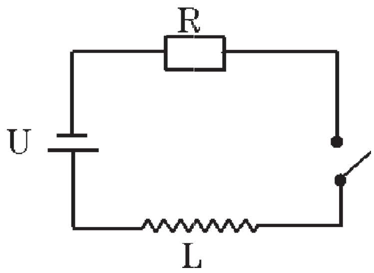
Bei zusätzlicher *Reibungskraft* $|\vec{R}| = -rv = -rx'$ erhält man $mx'' = -rx' - kx \quad \Rightarrow$

$$\boxed{x'' + \frac{r}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0}$$

4. *Einschaltvorgang*

Spannung U, Widerstand R,
Induktivität L,

$U = RI + LI' \quad , \quad I(0) = 0 \quad \Rightarrow$



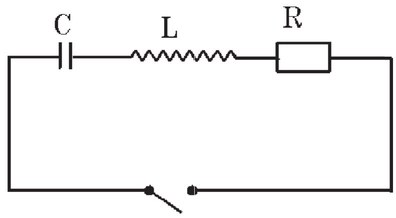
$$\boxed{I' + \frac{R}{L}I = \frac{U}{L} \quad , \quad I(0) = 0}$$

lineare DGL 1.Ordnung mit Anfangsbedingung.

5. *Elektrischer Reihenschwingkreis*

Kapazität C, Widerstand R,
Induktivität L,

$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = 0 \quad \Rightarrow$



$$\boxed{I'' + \frac{R}{L}I' + \frac{1}{LC}I = 0}$$

lineare DGL 2.Ordnung, homogen.

Gesucht sind jeweils die Funktionen (reellwertig), die auf einer gewissen Teilmenge von $\mathbb{R}$ die DGL erfüllen, z.B.: $R(t)$, $\varphi(t)$, $I(t)$.
Differentialgleichungen sind also Gleichungen für Funktionen, in denen die Funktion selbst und gewisse Ableitungen der Funktion vorkommen können. Sind die gesuchten Funktionen von *einer Variablen* abhängig, so spricht man von *gewöhnlichen DGL*, sonst von *partiellen DGL* (es kommen *partielle Ableitungen*, z.B.: $\frac{\partial f}{\partial x}$, in der DGL vor).
Die *höchste vorkommende Ableitung* bestimmt die *Ordnung* der DGL,
z.B.: $I'' + \frac{R}{L}I' + \frac{1}{LC}I = 0$ ist eine DGL 2.Ordnung.
Das Auflösen einer solchen DGL besteht darin, die Funktionen zu bestimmen, die dieser Gleichung genügen.

Zusätzliche Bedingungen

Zusätzlich zur DGL werden oft Bedingungen an die Lösungsfunktionen gestellt:

Beispiele

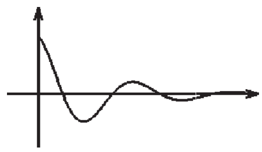
1. *Anfangsbedingungen*

z.B.: $y' = y$ (DGL),
$y(0) = 1$ (Anfangsbedingung)
$\Rightarrow$ $y(x) = \mathrm{e}^x$ ist Lösung in $\mathbb{R}$ (y geht durch den Punkt $\binom{0}{1}$).

Z.B.: $y'' + y = 0$ (DGL),
$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ (Anfangsbedingungen)
$\Rightarrow$ $y(x) = \sin x$ ist Lösung dieser *Anfangswertaufgabe (AWA)*.

2. *Asymptotisches Verhalten*

z.B.: $y'' + y' + y = 0$ (DGL),
$\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$.



(z.B.: gedämpfte Schwingung)

Oder z.B.: y beschränkt für $x \to \infty$.

3. *Randbedingungen*

z.B.: $y'' + \omega^2 y = 0$ (DGL),
$y(0) = y(l) = 0$.

(z.B.: eingespannter Stab)

Die Fragen, die bei der Behandlung von DGL (mit oder ohne zusätzliche Bedingungen) auftreten, sind die folgenden:

1) *Existenz*

Ist die gegebene DGL (mit oder ohne zusätzliche Bedingungen) lösbar ?
Dh.: Existiert eine reellwertige Funktion, die in einer gewissen Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ definiert ist und dort der DGL und den zusätzlichen Bedingungen genügt ?

2) *Lösungsgesamtheit, Eindeutigkeit*

Wie sieht die Lösungsgesamtheit (allgemeine Lösung) der DGL aus ?
Existiert bei zusätzlichen Bedingungen genau eine Lösung (Eindeutigkeit), oder existieren mehrere Lösungen ?

3) *Lösungsmethoden*

Wie bestimmt man die allgemeine Lösung der DGL ?

Diese Fragen wollen wir zunächst an drei wichtigen Klassen von DGL untersuchen:

1) DGL 1.Ordnung der Form $y' = f(x)g(y)$
(dh.: *Trennung der Variablen* ist möglich).

2) *Lineare DGL 1.Ordnung* $y' = f(x)y + g(x)$.

3) *Lineare DGL n-ter Ordnung* mit *konstanten Koeffizienten*
$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$,
mit $a_i \in \mathbb{R}$ $\forall 0 \le i \le n-1$, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in I.

7.1 : DGL 1.Ordnung der Form $y' = f(x)g(y)$ (*Trennung der Variablen*)

Sei $f : I \subset I\!R \to I\!R$ stetig in I, und sei $g : (a,b) \subset I\!R \to I\!R$ stetig in (a,b).

a) *Sonderfall*
Ist $g(y) = 0$ für ein $y \in (a,b)$, so untersuche man, ob dieses y Lösung der DGL ist.

Z.B.: $y' = x(y-1) \quad \Rightarrow \quad y(x) \equiv 1$ (dh.: $y(x) = 1\ \forall x \in I\!R$) ist Lösung der DGL in $I\!R$.

b) Ist $g(y) \neq 0$ in (a,b), so gilt:

$$y' = f(x)g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g(y)}y' = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx + c}$$

Dh.: Ist G Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ in (a,b), und ist F Stammfunktion von f in I, so gilt:

$$\boxed{G(y(x)) = F(x) + c}$$

Denn: $\frac{d}{dx}(G(y(x)) = \frac{1}{g(y)}y' = \frac{d}{dx}(F(x)) = f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f(x)g(y)$.

Ist G nach y *auflösbar*, so liefert die Gleichung $G(y) = F(x) + c$ Lösungen der DGL $y' = f(x)g(y)$.

Spezialfall
Ist $g(y) \equiv 1$, so lautet die DGL $y' = f(x) \quad \Rightarrow \quad y$ ist Stammfunktion von f, also $y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + c$ (mit $x_0 \in I$) ist allgemeine Lösung der DGL.

Beispiele

1. $y' = x(y-1)$
   a) Sonderfall: $y(x) \equiv 1$ ist Lösung in $I\!R$.
   b) $y \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y-1}\,dy = \int x\,dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + c_1$
   $\Rightarrow \quad |y-1| = \mathrm{e}^{c_1}\mathrm{e}^{x^2/2} = c_2\mathrm{e}^{x^2/2}$ mit $c_2 = \mathrm{e}^{c_1} > 0$
   $\Rightarrow \quad y - 1 = c_3\mathrm{e}^{x^2/2}$ mit $c_3 \in I\!R\backslash\{0\}$
   $\Rightarrow \quad y(x) = 1 + c_3\mathrm{e}^{x^2/2}$ mit $c_3 \in I\!R\backslash\{0\}$
   und $y(x) \equiv 1$ sind alle Lösungen der DGL
   $\Rightarrow \quad y(x) = 1 + c\mathrm{e}^{x^2/2}$ mit $c \in I\!R$ ist die allgemeine Lösung in $I\!R$.

   Ist zusätzlich die *Anfangsbedingung* $y(0) = 0$ gegeben, so gilt:

$y(0) = 1 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = 1 - \mathrm{e}^{x^2/2}$ ist (einzige) Lösung in $\mathbb{R}$ der AWA (Anfangswertaufgabe) $\quad y' = x(y-1) \quad , \quad y(0) = 0$.

2. $y' = x^2 \mathrm{e}^{-y}$

   a) Sonderfall entfällt, da $\mathrm{e}^{-y} \neq 0$.

   b) $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{e}^{-y}}\, dy = \int \mathrm{e}^{y}\, dy = \int x^2\, dx$

   $\Rightarrow \quad \mathrm{e}^{y} = \dfrac{x^3}{3} + c \quad \Rightarrow \quad y(x) = \ln(\dfrac{x^3}{3} + c)$ ist allgemeine Lösung in $\{x \in \mathbb{R} \;:\; \dfrac{x^3}{3} + c > 0\}$.

   Zusätzliche Anfangsbedingung $\quad y(0) = 0$

   $\Rightarrow \quad y(0) = \ln c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \ln(\dfrac{x^3}{3} + 1)$ ist (einzige) Lösung in $\quad \{x \in \mathbb{R} \;:\; x > -\sqrt[3]{3}\}\quad$ mit $\quad y(0) = 0$.

3. $y' = 3y^{2/3} \quad , \quad y(0) = 0$

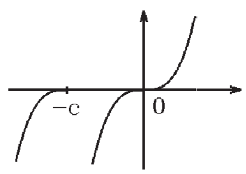
   a) Sonderfall: $\;y(x) \equiv 0\;$ ist Lösung in $\mathbb{R}$ (erfüllt auch die Anfangsbedingung).

   b) $y \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int \frac{1}{3} y^{-2/3}\, dy = \int dx \quad \Rightarrow \quad y^{1/3} = x + c \quad \Rightarrow \quad y(x) = (x+c)^3$

   $y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(0) = c^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad \Rightarrow$
   $y(x) = x^3\;$ ist auch Lösung in $\mathbb{R}$ mit $y(0) = 0$.

   In diesem Beispiel lassen sich noch weitere Lösungen mit $y(0) = 0$ folgendermaßen konstruieren:

   z.B.: $\quad y(x) = \begin{cases} 0 & \text{,falls } x \leq 0 \\ x^3 & \text{,falls } x > 0 \end{cases}$

   oder $\quad y(x) = \begin{cases} (x+c)^3 & \text{,falls } x \leq -c \\ 0 & \text{,falls } x > -c. \end{cases}$

   Es existieren also unendlich viele Lösungen durch den Punkt $\binom{0}{0}$. Diese AWA ist also *nicht eindeutig lösbar.*

   Wann eine AWA (Anfangswertaufgabe) *eindeutig lösbar* ist, werden wir später untersuchen.

4. $y' = \dfrac{y^2 + 1}{2xy(x+1)} \quad , \quad y(1) = 1$

   Da y durch $\binom{1}{1}$ gehen soll, beschränken wir uns auf den Bereich $I = \{x \in \mathbb{R} \;:\; x > 0\}$.

   a) Sonderfall entfällt.

   b) $\displaystyle\int \frac{2y}{y^2+1}\, dy = \int \frac{1}{x(x+1)}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{1}{x+1}\, dx$

$$\Rightarrow \quad \ln(y^2+1) = \ln\frac{|x|}{|x+1|} + c_1 = \ln\frac{x}{x+1} + c_1 \quad , \quad (\text{da } x > 0)$$
$$\Rightarrow \quad y^2(x) = c \cdot \frac{x}{x+1} - 1 \quad , \quad (c = \mathrm{e}^{c_1} > 0)$$
$$y(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad y^2(1) = \frac{c}{2} - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 4 \quad \Rightarrow \quad y^2(x) = \frac{4x}{x+1} - 1 \quad \Rightarrow$$
$y(x) = \sqrt{\dfrac{4x}{x+1} - 1}$ (positive Wurzel, da $y(1) = 1$) ist (einzige) Lösung mit $y(1) = 1$ in $I = \{x \in I\!R \ : \ \frac{4x}{x+1} > 1\} = \{x \in I\!R \ : \ x > \frac{1}{3}\}$.

7.2 : Lineare DGL n-ter Ordnung

Definition 7.3 :

a) $L[y] := y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$
heißt *lineare DGL n-ter Ordnung* (dh.: die Ableitungen $y^{(k)}$ und die Funktion y kommen nur in linearer Form vor).
Hierbei seien die Koeffizientenfunktionen a_i , $(0 \leq i \leq n-1)$ und die Funktion f der rechten Seite auf einem gemeinsamen Intervall $I \subset I\!R$ definiert und *stetig*.

b) Ist $f(x) \equiv 0$, so heißt die DGL: *homogene* lineare DGL, sonst: *inhomogene* lineare DGL.

Sind alle Funktionen a_i , $(0 \leq i \leq n-1)$ *konstant*, so heißt die DGL: lineare DGL n-ter Ordnung mit *konstanten Koeffizienten*.

Im nächsten Satz beweisen wir zwei Eigenschaften über die Lösungen einer *linearen* DGL n-ter Ordnung, die bei allen *linearen* Gleichungen analog gelten (vgl. lineare GLS, Satz 2.31, S.58).

Satz 7.4 : Gegeben sei eine lineare DGL n-ter Ordnung: $L[y] = f(x)$ mit a_i, f stetig in I. Dann gilt:

a) Mit y_1 und y_2 ist auch jede *Linearkombination* $c_1y_1 + c_2y_2$, $(c_1.c_2 \in I\!R)$ Lösung der *homogenen* linearen DGL $L[y] = 0$ in I. Die Lösungsmenge der *homogenen* linearen DGL ist (von der mathematische Struktur her) ein *Vektorraum*.

b) Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL $L[y] = f(x)$ ist von der Form

$$\boxed{y = y_h + y_0}$$

wobei y_h die *allgemeine* Lösung der zugehörigen homogenen DGL $L[y] = 0$
und y_0 eine spezielle (*partikuläre*) Lösung der inhomogenen DGL $L[y] = f(x)$ ist.

Beweis :

a) Sei $L[y_1] = L[y_2] = 0 \quad \Rightarrow \quad (\text{mit } a_n(x) \equiv 1)$
$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)(c_1y_1 + c_2y_2)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)(c_1y_1^{(k)} + c_2y_2^{(k)})$$

$= c_1 \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y_1^{(k)} + c_2 \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y_2^{(k)} = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2] = 0$ (also L ist ein linearer Operator)
Daß für die Lösungsmenge der linearen homogenen DGL alle Eigenschaften eines Vektorraums gelten, folgt aus der Definition der Addition und Skalarmultiplikation von Funktionen (hierbei werden die Funktionswerte (also reelle Zahlen) addiert bzw. mit dem Skalar multipliziert).

b) Sei $L[y_h] = 0$ und $L[y_0] = f(x) \;\Rightarrow\; L[y_h + y_0] = L[y_h] + L[y_0] = f(x) \;\Rightarrow\; y_h + y_0$ ist Lösung der inhomogenen DGL.
Ist nun y eine beliebige Lösung der inhomogenen DGL und y_h die allgemeine Lösung der homogenen DGL, so gilt $L[y - y_h] = L[y] - L[y_h] = f(x) \;\Rightarrow\; y_0 := y - y_h$ ist eine spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen DGL.

Das Lösen einer linearen inhomogenen DGL besteht also aus zwei Schritten:

1. Schritt: Bestimmung der *allgemeinen* Lösung der zugehörigen *homogenen* DGL.
2. Schritt: Bestimmung einer beliebigen *partikulären* Lösung der *inhomogenen* DGL.

Für die nächsten Eigenschaften benötigen wir den folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz, dessen Beweis wir erst später durchführen werden:

Satz 7.5 : *Existenz- und Eindeutigkeitssatz*
Seien $a_i, f : (a,b) \to I\!R$ *stetig* in (a,b) , $(0 \le i \le n-1)$, sei $\xi \in (a,b)$ und $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1} \in I\!R$ fest.
Dann *existiert genau eine Lösung* der linearen DGL
$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x)$ mit den Anfangsbedingungen $y(\xi) = \eta_0, y'(\xi) = \eta_1, \ldots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$.

Beweis : später.

Nun untersuchen wir die Struktur der allgemeinen Lösung der linearen *homogenen* DGL:

Definition 7.6 : Die Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n : I \subset I\!R \to I\!R$

a) heißen *linear abhängig* in I, wenn es Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n \in I\!R$ gibt, die nicht alle gleich Null sind, so daß gilt:
$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0 \;\; \forall x \in I$.

b) heißen *linear unabhängig* in I, wenn sie *nicht* linear abhängig sind, dh.:
Gilt $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) = 0 \;\; \forall x \in I \;\Rightarrow\; c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Beispiele

1. $y_1(x) = x^3$, $y_2(x) = |x|^3$
   $\Rightarrow$ y_1, y_2 sind linear abhängig in $(0, \infty)$, denn
   $y_1(x) - y_2(x) = 0 \ \ \forall x \in (0, \infty)$,
   aber y_1, y_2 sind linear unabhängig in $\mathbb{R}$, denn:
   $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ \Rightarrow$
   für $x = 1 \ \ \Rightarrow \ \ c_1 + c_2 = 0$; für $x = -1 \ \ \Rightarrow \ \ -c_1 + c_2 = 0 \ \ \Rightarrow \ \ c_1 = c_2 = 0$
   $\Rightarrow$ y_1, y_2 sind linear unabhängig in $\mathbb{R}$.

2. $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = \mathrm{e}^x$ sind linear unabhängig in $\mathbb{R}$, denn:
   $c_1 \cdot 1 + c_2 x + c_3 \mathrm{e}^x = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ (differenzieren $\Rightarrow$)
   $c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 + c_3 \mathrm{e}^x = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ (differenzieren $\Rightarrow$)
   $c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_3 \mathrm{e}^x = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$
   $\Rightarrow$ $c_3 = 0$, $c_2 = 0$, $c_1 = 0$.

Wir werden nun zeigen, daß eine lineare homogene DGL n-ter Ordnung genau n linear unabhängige Lösungen (Fundamentalsystem oder Basis des Lösungsraums) besitzt, und daß die allgemeine Lösung der homogenen DGL Linearkombination dieser linear unabhängigen Lösungen ist:

Satz 7.7 : Seien $a_i, f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *stetig* in (a, b) , $(0 \leq i \leq n - 1)$.
Dann hat die lineare homogene DGL n-ter Ordnung
$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$
in (a, b) genau n *linear unabhängige* Lösungen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (*Fundamentalsystem*).
Jede Lösung von $L[y] = 0$ ist eine Linearkombination dieser y_i, also ist

$$\boxed{y_h = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \quad , \quad (c_i \in \mathbb{R})}$$

die *allgemeine* Lösung der linearen *homogenen* DGL.

Beweis : Sei $\xi \in (a, b)$. Für $(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ setzen wir nacheinander
$\vec{e}_1^{\,T} = (1, 0, \ldots, 0)$, $\vec{e}_2^{\,T} = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\vec{e}_n^{\,T} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$.
Für jedes i erhalten wir nach Satz 7.5 genau eine Lösung y_i mit $L[y_i] = 0$ und

$$y_i^{(k)}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{,für } i \neq k+1 \\ 1 & \text{,für } i = k+1. \end{cases}$$

Diese y_i sind linear unabhängig in (a, b), denn aus

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b) \ \ \text{folgt} \ \ (\ k \text{ mal differenzieren})$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(k)}(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b) \ \ , \ \ \forall k = 0, 1, \ldots, n-1 \ \ \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(k)}(\xi) = c_{k+1} = 0 \ \ \forall k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Ist y Lösung von $L[y]=0$, so gilt mit $c_i = y^{(i-1)}(\xi)$: $\quad y = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i$, denn:

$\sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i$ ist Lösung von $L[y]=0$ mit den gleichen Anfangsbedingungen an der Stelle ξ wie y, denn es gilt:

$\sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i^{(k)}(\xi) = c_{k+1} = y^{(k)}(\xi) \ \ \forall k = 0,1,\ldots,n-1.$

Nach Satz 7.5 (Eindeutigkeit) müssen y und $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i$ in (a,b) übereinstimmen.

Bemerkung 7.8 : Man nennt n-linear unabhängige Lösungen von $L[y]=0$ *Fundamentalsystem*, da jede Lösung von $L[y]=0$ sich dann als Linearkombination dieser y_i darstellen läßt.

Die Aufgabe beim Lösen einer linearen homogenen DGL besteht also darin, ein Fundamentalsystem zu bestimmen. Das ist besonders einfach, wenn alle Koeffizienten a_i konstant sind. Bei einer linearen DGL 1.Ordnung läßt sich auch bei nichtkonstantem Koeffizienten a_1 die Lösung einfach berechnen:

Lineare DGL 1.Ordnung

Gegeben:

$$\boxed{y' + a(x)y = f(x)}$$

mit $a, f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig* in I.

1. *homogen*: $\quad y' = -a(x)y \quad$ (*Trennung der Variablen* möglich)

a) Sonderfall: $y(x) \equiv 0$ ist Lösung.

b) $y \not\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}\, dy = -\int a(x)\, dx \quad \Rightarrow$

$$\boxed{y_1(x) = \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt} \quad , \quad x_0 \in I}$$

ist Fundamentallösung, falls $y_1 \not\equiv 0 \quad \Rightarrow$

$$\boxed{y_h = c y_1 \quad , \quad c \in \mathbb{R}}$$

ist allgemeine Lösung der homogenen DGL $y' = -a(x)y \quad$ (der Sonderfall $y \equiv 0$ ist für $c = 0$ enthalten).

2. *partikuläre Lösung*: $\quad$ Ansatz: $\ y_0(x) = c(x)y_1(x) \quad$ (*Variation der Konstanten*)

$\Rightarrow \quad y_0'(x) = c'(x)y_1(x) + c(x)y_1'(x) \quad$ und $\quad y_1'(x) = -a(x)y_1(x) \quad$ (da y_1 Lösung der homogenen DGL).
Einsetzen in die inhomogene DGL ergibt:
$c'(x)y_1(x) + c(x)y_1'(x) + a(x)c(x)y_1(x) = f(x) \quad \Rightarrow$ (da $y_1'(x) + a(x)y_1(x) = 0$)
$c'(x) = \dfrac{f(x)}{y_1(x)} \quad \Rightarrow \quad c(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{f(t)}{y_1(t)}\, dt$ mit $x_0 \in I \quad \Rightarrow$

$$\boxed{y_0(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{f(t)}{y_1(t)}\, dt}$$

ist *partikuläre Lösung* der linearen inhomogenen DGL $y' + a(x)y = f(x)$.

Damit erhält man:

Die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen DGL 1.Ordnung
$y' + a(x)y = f(x)$ lautet

$$\boxed{y(x) = \left(c + \int_{x_0}^{x} \frac{f(t)}{y_1(t)}\, dt\right) y_1(x) \quad \text{mit} \quad y_1(x) = \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt} \ , \ x_0 \in I \ , \ c \in \mathbb{R}}$$

Beispiele

1. $y' + (\sin x)y = 2\sin x$

   homogen: $y_1(x) = \mathrm{e}^{-\int \sin x \ dx} = \mathrm{e}^{\cos x}$, $(\neq 0$ in $\mathbb{R})$, ist Fundamentallösung
   $\Rightarrow \quad y_h(x) = c\mathrm{e}^{\cos x}$, $c \in \mathbb{R}$, ist allgemeine Lösung der homogenen DGL;
   partikulär: $c(x) = \displaystyle\int \frac{2\sin x}{\mathrm{e}^{\cos x}}\, dx = \int \frac{-2}{\mathrm{e}^{t}}\, dt = 2\mathrm{e}^{-t} = 2\mathrm{e}^{-\cos x}$
   (Substitution $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$)
   $\Rightarrow \quad y_0(x) = \mathrm{e}^{\cos x}(2\mathrm{e}^{-\cos x}) = 2$ ist partikuläre Lösung (hier hätte man eine partikuläre Lösung auch "erraten" können)
   $\Rightarrow \quad y(x) = c\mathrm{e}^{\cos x} + 2$, $c \in \mathbb{R}$, ist allgemeine Lösung der gegebenen DGL in $\mathbb{R}$.

2. $y' + 2xy = 1$

   homogen: $y_1(x) = \mathrm{e}^{-\int 2x \ dx} = \mathrm{e}^{-x^2}$, $(\neq 0$ in $\mathbb{R})$, ist Fundamentallösung
   $\Rightarrow \quad y_h(x) = c\mathrm{e}^{-x^2}$, $c \in \mathbb{R}$, ist allgemeine Lösung der homogenen DGL;
   partikulär: $c(x) = \displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{e}^{-x^2}}\, dx = \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\, dt$
   $\Rightarrow \quad y_0(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\, dt$ ist partikuläre Lösung
   $\Rightarrow \quad y(x) = c\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\, dt$, $c \in \mathbb{R}$, ist allgemeine Lösung der gegebenen DGL in $\mathbb{R}$.

3. $y' + (\tan x)y = \sin x \quad , \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$a(x) = \tan x$ und $f(x) = \sin x$ sind stetig in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;

homogen: $y_1(x) = e^{-\int \tan x \; dx} = e^{\ln(\cos x)} = \cos x$, $(\neq 0$ in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$, ist Fundamentallösung

$\Rightarrow \quad y_h(x) = c\cos x$, $c \in \mathbb{R}$, ist allgemeine Lösung der homogenen DGL;

partikulär: $c(x) = \displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\ln|\cos x| = -\ln(\cos x)$, (da $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$)

$\Rightarrow \quad y_0(x) = -\cos x \ln(\cos x)$ ist partikuläre Lösung

$\Rightarrow \quad y(x) = c\cos x - \cos x \ln(\cos x)$, $c \in \mathbb{R}$, ist allgemeine Lösung in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

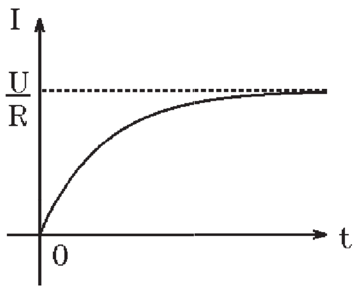
4. $I' + \dfrac{R}{L}I = \dfrac{U}{L} \quad , \quad I(0) = 0 \quad ,$ Einschaltvorgang (vgl. S.229)

homogen: $I_1(t) = e^{-\int \frac{R}{L}\, dt} = e^{-\frac{R}{L}t}$

partikulär: $I_0(t) = \dfrac{U}{R}$ ("erraten")

$\Rightarrow \quad I(t) = ce^{-\frac{R}{L}t} + \dfrac{U}{R} \quad , \quad I(0) = c + \dfrac{U}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -\dfrac{U}{R} \quad \Rightarrow$

$I(t) = \dfrac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$ ist einzige Lösung der AWA



Lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

1) *Homogene DGL*

$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$ mit
$a_i \in \mathbb{R}$, $(0 \leq i \leq n-1)$ (dh.: *konstante Koeffizienten*).

Gesucht: *Fundamentalsystem.*

Wir machen den Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$L[y] = \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \ldots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x}$$
$$= (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = p(\lambda)e^{\lambda x} = 0$$
mit

$$\boxed{p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0}$$

charakteristisches Polynom der DGL $L[y] = 0$.

Da $|e^{\lambda x}| = |e^{(\alpha+i\beta)x}| = |e^{\alpha x}e^{i\beta x}| = e^{\alpha x}|e^{i\beta x}| = e^{\alpha x} \neq 0$,
(da $|e^{i\beta x}| = |\cos\beta x + i\sin\beta x| = 1$) $\Rightarrow$
$L[e^{\lambda x}] = 0 \;\Leftrightarrow\; p(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda$ ist Nullstelle von $p(\lambda)$.
Also gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x) = e^{\lambda x} \text{ ist (komplexe) Lösung von } L[y] = 0 \\ \Leftrightarrow \lambda \text{ ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms } p(\lambda) \end{array}}$$

Ist λ komplexe Nullstelle, so ist $y(x) = e^{\lambda x}$ eine komplexe Lösung. Dann sind aber $Re(e^{\lambda x})$ und $Im(e^{\lambda x})$ reelle Lösungen, denn es gilt:

Satz 7.9 :

$w(x) = u(x) + iv(x)$ ist *komplexe* Lösung der DGL $L[y] = 0$
$\Leftrightarrow$ $u(x)$ und $v(x)$ sind *reelle* Lösungen der DGL $L[y] = 0$.

Beweis :

$L[u + iv] = L[u] + iL[v] = 0$ (da L linear) $\Leftrightarrow$ $L[u] = L[v] = 0$.

Ist $\lambda = \alpha + i\beta$ Nullstelle von $p(\lambda)$, so ist auch $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ Nullstelle von $p(\lambda)$ (da $p(\lambda)$ reelles Polynom), also sind $y(x) = e^{(\alpha\pm i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm i\sin\beta x)$ komplexe Lösungen. Hieraus erhält man die reellen Lösungen
$Re(e^{(\alpha\pm i\beta)x}) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ und $Im(e^{(\alpha\pm i\beta)x}) = \pm e^{\alpha x}\sin\beta x$.
Da $(+e^{\alpha x}\sin\beta x)$ und $(-e^{\alpha x}\sin\beta x)$ linear abhängig in $\mathbb{R}$, erhält man also als reelle Lösungen:

$$\boxed{e^{\alpha x}\cos\beta x \quad , \quad e^{\alpha x}\sin\beta x}.$$

Hat nun $p(\lambda)$ n verschiedene Nullstellen, so findet man über den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ n verschiedene reelle Lösungen, von denen noch gezeigt wird, daß sie in $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

Wir behandeln nun den Fall, daß λ l-fache Nullstelle von $p(\lambda)$ ist.
In diesem Fall gilt: $p^{(k)}(\lambda) = 0$ für $0 \leq k \leq l - 1$ (da l- fache Nullstelle).
Da offensichtlich $\dfrac{d^k}{d\lambda^k}(\dfrac{d^i}{dx^i}(e^{\lambda x})) = \dfrac{d^i}{dx^i}(\dfrac{d^k}{d\lambda^k}(e^{\lambda x})) = \dfrac{d^i}{dx^i}(x^k e^{\lambda x})$, gilt

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}L[e^{\lambda x}] = \frac{d^k}{d\lambda^k}\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dx^i}(e^{\lambda x}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^k}{d\lambda^k}(\frac{d^i}{dx^i}(e^{\lambda x})) = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dx^i}(x^k e^{\lambda x})$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{d^k}{d\lambda^k} L[\mathrm{e}^{\lambda x}] = L[x^k \mathrm{e}^{\lambda x}].$

Andererseits gilt $L[\mathrm{e}^{\lambda x}] = p(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x} \quad \Rightarrow$

$L[x^k \mathrm{e}^{\lambda x}] = \dfrac{d^k}{d\lambda^k} L[\mathrm{e}^{\lambda x}] = \dfrac{d^k}{d\lambda^k}(p(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x}) = \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{k}{j} p^{(j)}(\lambda) x^{k-j} \mathrm{e}^{\lambda x} = 0$ für

$0 \le k \le l-1 \quad$ (da $p^{(j)}(\lambda) = 0$ für $0 \le j \le l-1$).

Also gilt

Ist λ l-fache Nullstelle von $p(\lambda)$, so sind $y_k(x) = x^k \mathrm{e}^{\lambda x}$ Lösungen von $L[y] = 0$ für $k = 0, 1, \ldots, l-1$

Satz 7.10 : Gegeben sei die lineare homogene DGL mit konstanten Koeffizienten
$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad , \quad (a_i \in \mathbb{R})$.

a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ l-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$, so sind

$$\boxed{\mathrm{e}^{\lambda x} \ , \ x\mathrm{e}^{\lambda x} \ , \ \ldots \ , x^{l-1}\mathrm{e}^{\lambda x}}$$

Lösungen von $L[y] = 0$.

b) Ist $\lambda = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ l-fache Nullstelle von $p(\lambda)$, so sind

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x \ , \ x\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x \ , \ \ldots \ , \ x^{l-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x \\ \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x \ , \ x\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x \ , \ \ldots \ , \ x^{l-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x \end{array}}$$

Lösungen von $L[y] = 0$.

c) Auf diesem Weg erhält man insgesamt n linear unabhängige Lösungen in $\mathbb{R}$, also ein *Fundamentalsystem* von $L[y] = 0$.

Beweis : Es bleibt zu zeigen, daß die auf diesem Weg gefundenen Lösungen in $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind.
Sei λ_i l_i-fache Nullstelle von $p(\lambda)$, $(1 \le i \le k)$, dann betrachten wir eine beliebige Linearkombination $\sum\limits_{i=1}^{k} q_i(x)\mathrm{e}^{\lambda_i x}$, wobei *grad* $q_i \le l_i - 1$.

Es ist zu zeigen: Aus $\sum\limits_{i=1}^{k} q_i(x)\mathrm{e}^{\lambda_i x} = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad q_i(x) \equiv 0$ in $\mathbb{R}$ $\forall 1 \le i \le k$.
Dies zeigen wir mit vollständiger Induktion:
$k = 1$: $q_1(x)\mathrm{e}^{\lambda_1 x} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad q_1(x) \equiv 0$, da $\mathrm{e}^{\lambda_1 x} \ne 0$.
$k-1 \to k$: $q_1(x)\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \ldots + q_k(x)\mathrm{e}^{\lambda_k x} \equiv 0$.
Ist $q_k(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow$ (nach Induktions-Vor.) $\quad q_1(x) \equiv q_2(x) \equiv \ldots \equiv q_{k-1}(x) \equiv 0$.
Ist $q_k(x) \not\equiv 0$, dann existiert ein $q_j(x) \not\equiv 0$ mit $j \ne k$ (denn sonst wäre ja

$q_k(x)\mathrm{e}^{\lambda_k x} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad q_k(x) \equiv 0)$.
Multiplizieren wir mit $\mathrm{e}^{-\lambda_k x}$, so erhalten wir
$q_1(x)\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_k)x} + \ldots + q_{k-1}\mathrm{e}^{(\lambda_{k-1}-\lambda_k)x} + q_k(x) \equiv 0.$
Differenzieren wir l_k mal nach x, so erhalten wir
$\tilde{q}_1(x)\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_k)x} + \ldots + \tilde{q}_{k-1}\mathrm{e}^{(\lambda_{k-1}-\lambda_k)x} \equiv 0$ (da $grad\ q_k \leq l_k - 1$).
Hierbei haben die Polynome $\tilde{q}_i$ den gleichen Grad wie q_i, wie man sich leicht überlegen kann.
Da $q_j \not\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{q}_j \not\equiv 0$. Das ist aber ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung.

Beispiele

1. $y''' - 7y' + 6y = 0$

   Der Ansatz $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ führt auf das charakteristische Polynom
   $p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+3) = 0$
   $\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1\ ,\ \lambda_2 = 2\ ,\ \lambda_3 = -3$ sind die Nullstellen
   $\Rightarrow \quad \{\mathrm{e}^x\ ,\ \mathrm{e}^{2x}\ ,\ \mathrm{e}^{-3x}\}$ ist Fundamentalsystem
   $\Rightarrow \quad y(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{2x} + c_3\mathrm{e}^{-3x} \quad , \quad (c_i \in I\!R) \quad ,$ ist allgemeine Lösung in $I\!R$.

2. $y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = 0$

   $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)^3 = 0$ (charakteristisches Polynom)
   $\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1$ (einfache) , $\lambda_2 = -1$ (3-fache)-Nullstelle
   $\Rightarrow \quad \{\mathrm{e}^x\ ,\ \mathrm{e}^{-x}\ ,\ x\mathrm{e}^{-x}\ ,\ x^2\mathrm{e}^{-x}\}$ ist Fundamentalsystem
   $\Rightarrow \quad y(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3x\mathrm{e}^{-x} + c_4x^2\mathrm{e}^{-x} \quad , \quad (c_i \in I\!R) \quad ,$ ist allgemeine Lösung in $I\!R$.

3. $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$

   $p(\lambda) = \lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = \lambda(\lambda^2+4)^2 = 0$ (charakteristisches Polynom)
   $\Rightarrow \quad \lambda_1 = 0$ (einfache) , $\lambda_{2,3} = \pm 2i$ (doppelte)-Nullstellen
   $Re(\mathrm{e}^{2ix}) = \cos 2x\ ,\ Im(\mathrm{e}^{2ix}) = \sin 2x$
   $\Rightarrow \quad \{1\ ,\ \cos 2x\ ,\ \sin 2x\ ,\ x\cos 2x\ ,\ x\sin 2x\}$ ist Fundamentalsystem
   $\Rightarrow \quad y(x) = c_1 + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x + c_4x\cos 2x + c_5x\sin 2x \quad , \quad (c_i \in I\!R) \quad ,$
   ist allgemeine Lösung in $I\!R$.

4. $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$

   $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + +3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda^2+\lambda+1)^2 = 0$ (charakteristisches Polynom)
   $\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (doppelte)-Nullstellen
   $Re(\mathrm{e}^{(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})x}) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\ ,\ Im(\mathrm{e}^{(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})x}) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$
   $\Rightarrow \quad \{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\ ,\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\ ,\ x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\ ,\ x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\}$ ist Fundamentalsystem
   $\Rightarrow \quad y(x) = c_1\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \quad ,$
   $(c_i \in I\!R) \quad ,$ ist allgemeine Lösung in $I\!R$.

5. **Lineare homogene DGL 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten**

$y'' + ay' + by = 0$ (z.B.: Reihenschwingkreis)

$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ (charakteristisches Polynom)

$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$.

1.Fall : $a^2 > 4b \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} \in \mathbb{R}$ (einfache) Nullstellen $\Rightarrow$

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad , \quad c_i \in \mathbb{R}}$$

ist allgemeine Lösung mit $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$.

2.Fall : $a^2 = 4b \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -\frac{a}{2}$ (doppelte) Nullstelle $\Rightarrow$

$$\boxed{y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{-\frac{a}{2}x} \quad , \quad c_i \in \mathbb{R}}$$

ist allgemeine Lösung.

3.Fall : $a^2 < 4b \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2} \in \mathbb{C}$ (einfache) Nullstellen $\Rightarrow$

$$\boxed{y(x) = (c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x) e^{-\frac{a}{2}x} \quad , \quad c_i \in \mathbb{R}}$$

ist allgemeine Lösung mit $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$.

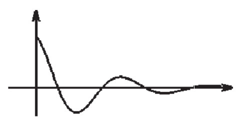
Diese allgemeine Lösung kann auch folgendermaßen geschrieben werden

$$\boxed{y(x) = A e^{-\frac{a}{2}x} \sin(\omega x + \varphi) \quad , \quad A, \varphi \in \mathbb{R}}$$

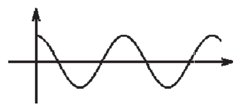
Denn:

$A \sin(\omega x + \varphi) = A(\cos \omega x \sin \varphi + \sin \omega x \cos \varphi) = (A \sin \varphi) \cos \omega x + (A \cos \varphi) \sin \omega x$
$= c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$ mit $c_1 = A \sin \varphi$ und $c_2 = A \cos \varphi$, $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$.

Ist $a > 0 \quad \Rightarrow$ *gedämpfte* Schwingung.

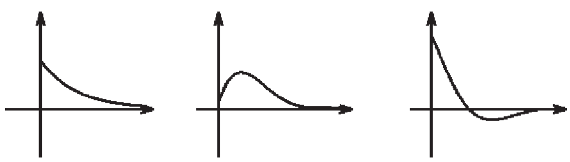


Ist $a = 0 \quad \Rightarrow$ *ungedämfte* Schwingung.



Im 1.Fall und 2.Fall liegen *aperiodische* Bewegungen vor.

Eine *Dämpfung* tritt ein, wenn λ_1 und $\lambda_2 < 0$ sind, dh: wenn $a > 0$ und $b > 0$ ist.



Beispiele hierzu

$y'' + 2y' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = (c_1 + c_2 x)\mathrm{e}^{-x}$

$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$

$y'' + y' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x)$

$y'' + 3y' + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-x} + c_2 \mathrm{e}^{-2x}$

$y'' - \omega^2 y = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = c_1 \mathrm{e}^{\omega x} + c_2 \mathrm{e}^{-\omega x} = d_1 \cosh(\omega x) + d_2 \sinh(\omega x).$

Bestimmung einer partikulären Lösung bei inhomogenen linearen DGL

Gegeben: $\quad L[y] = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$
mit $a_i \in \mathbb{R}$ und $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in I.

Gesucht: y_0 mit $L[y_0] = f(x) \;\; \forall x \in I$ (partikuläre Lösung).

Beispiel Elektrischer Schwingkreis mit zusätzlichem Erreger (Generator)
$LI'' + RI' + \frac{1}{C} I = f(t)$ erzeugt eine *erzwungene* Schwingung.

Die Lösungen der zugehörigen homogenen DGL sind die *Eigenschwingungen* des Schwingkreises.

Wir sprechen von *Resonanz*, wenn die Erregerfrequenz mit einer Frequenz einer Eigenschwingung (Eigenfrequenz) übereinstimmt.

Wir geben nun für spezielle "rechte Seiten" einen *Ansatz* an, der auf eine partikuläre Lösung führt:

Die *rechte Seite* sei von der Form

$$\boxed{f(x) = q(x)\mathrm{e}^{\alpha x} \begin{Bmatrix} \cos \beta x \\ \sin \beta x \end{Bmatrix}}$$

mit $q(x)$ *Polynom*.

Ersetzen wir die rechte Seite durch die komplexe Funktion $\tilde{f}(x) = q(x)\mathrm{e}^{(\alpha + i\beta)x}$, so führt der (komplexe) Ansatz

$$\boxed{w_0(x) = x^l r(x) \mathrm{e}^{(\alpha + i\beta)x}}$$

(mit $grad\ r = grad\ q$) auf eine partikuläre Lösung, und zwar

$$\boxed{\begin{array}{ll} y_0(x) = Re(w_0(x)) \;, & \text{falls auf der rechten Seite "}\cos \beta x\text{"} \\ y_0(x) = Im(w_0(x)) \;, & \text{falls auf der rechten Seite "}\sin \beta x\text{"} \end{array}}$$

Hierbei ist $l = 0$, falls $(\alpha + i\beta)$ *keine* Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$ ist (*keine Resonanz*); es ist $l > 0$, falls $(\alpha + i\beta)$ l-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$ ist (l-fache *Resonanz*).

Im Fall $\beta = 0$ ist der Ansatz reell, und es gilt $y_0(x) = w_0(x)$.
Im Fall $\beta \neq 0$ kann auch der folgende reelle Ansatz durchgeführt werden:

$$\boxed{y_0(x) = x^l (r_1(x) \cos \beta x + r_2(x) \sin \beta x) \mathrm{e}^{\alpha x}}$$

(mit $grad\ r_1 = grad\ r_2 = grad\ q$).

Beispiele

1. $y'' + y = 2x^2$

   homogen: $p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i \quad \Rightarrow$
   $y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, $c_i \in I\!R$, ist allgemeine Lösung der homogenen DGL;

   partikulär: $\alpha = \beta = 0$, $\alpha + i\beta = 0$ ist keine Nullstelle von $p(\lambda) \quad \Rightarrow$
   keine Resonanz $\Rightarrow$
   Ansatz: $y_0(x) = a + bx + cx^2 \quad \Rightarrow$
   $y_0'(x) = b + 2cx$, $y_0''(x) = 2c$, einsetzen ergibt:
   $2c + a + bx + cx^2 = 2x^2$, Koeffizientenvergleich ergibt:
   $c = 2$, $b = 0$, $a = -2c = -4 \quad \Rightarrow$
   $y_0(x) = -4 + 2x^2$ ist partikuläre Lösung $\Rightarrow$

   $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (-4 + 2x^2)$, $c_i \in I\!R$, ist allgemeine Lösung in $I\!R$.

2. $y'' + y' = 1 + x$

   homogen: $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow$
   $y_h(x) = c_1 + c_2 \mathrm{e}^{-x}$, $c_i \in I\!R$, ist allgemeine Lösung der homogenen DGL;

   partikulär: $\alpha = \beta = 0$, $\alpha + i\beta = 0$ ist (einfache) Nullstelle von $p(\lambda) \quad \Rightarrow$
   (einfache) Resonanz $\Rightarrow$
   Ansatz: $y_0(x) = x(a + bx) = ax + bx^2 \quad \Rightarrow$
   $y_0'(x) = a + 2bx$, $y_0''(x) = 2b$, einsetzen ergibt:
   $2b + a + 2bx = 1 + x$, Koeffizientenvergleich ergibt:
   $b = \frac{1}{2}$, $a = 1 - 2b = 0 \quad \Rightarrow$
   $y_0(x) = \frac{x^2}{2}$ ist partikuläre Lösung $\Rightarrow$

   $y(x) = c_1 + c_2 \mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2}{2}$, $c_i \in I\!R$, ist allgemeine Lösung in $I\!R$.

3. $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x$

   homogen: $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1$ ist doppelte Nullstelle $\Rightarrow$
   $y_h(x) = (c_1 + c_2 x)\mathrm{e}^x$, $c_i \in I\!R$, ist allgemeine Lösung der homogenen DGL;

   partikulär: $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $q(x) \equiv 1$, $\alpha + i\beta = 1$ ist (doppelte) Nullstelle von $p(\lambda) \quad \Rightarrow$ (doppelte) Resonanz $\Rightarrow$
   Ansatz: $y_0(x) = x^2(a\mathrm{e}^x) = ax^2\mathrm{e}^x \quad \Rightarrow$
   $y_0'(x) = a(2x + x^2)\mathrm{e}^x$, $y_0''(x) = a(2 + 2x + 2x + x^2)\mathrm{e}^x = a(2 + 4x + x^2)\mathrm{e}^x$, einsetzen und Division durch e^x ergibt:

$a(2+4x+x^2) - 2a(2x+x^2) + ax^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad 2a = 1 \quad\Rightarrow\quad a = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow$
$y_0(x) = \frac{1}{2}x^2 e^x$ ist partikuläre Lösung $\Rightarrow$

$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x \quad , \quad c_i \in I\!R \quad ,$ ist allgemeine Lösung in $I\!R$.

4. $y'' - y = -4xe^{-x}$

   homogen: $p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1 = 1\ ,\ \lambda_2 = -1$ sind einfache Nullstellen $\Rightarrow$
   $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad , \quad c_i \in I\!R \quad ,$ ist allgemeine Lösung der homogenen DGL;

   partikulär: $\alpha = -1\ ,\ \beta = 0\ ,\ q(x) = -4x \quad , \quad \alpha + i\beta = -1$ ist (einfache) Nullstelle von $p(\lambda) \quad\Rightarrow\quad$ (einfache) Resonanz $\Rightarrow$
   Ansatz: $y_0(x) = x(a+bx)e^{-x} = (ax+bx^2)e^{-x} \quad\Rightarrow$
   $y_0'(x) = (a + 2bx - ax - bx^2)e^{-x}\ ,\ y_0''(x) = (2b - a - 2bx - a - 2bx + ax + bx^2)e^{-x}$
   $= (2b - 2a - 4bx + ax + bx^2)e^{-x}$, einsetzen und Division durch e^{-x} ergibt (Koeffizientenvergleich):
   x^2-Term: $\quad b - b = 0$
   x^1-Term: $\quad -4b + a - a = -4 \quad\Rightarrow\quad b = 1$
   x^0-Term: $\quad 2b - 2a = 0 \quad\Rightarrow\quad a = b = 1 \quad\Rightarrow$
   $y_0(x) = (x + x^2)e^{-x}$ ist partikuläre Lösung $\Rightarrow$

   $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + (x + x^2)e^{-x} \quad , \quad c_i \in I\!R \quad ,$ ist allgemeine Lösung in $I\!R$.

5. $y'' + y' + y = \cos 2x$

   homogen: $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sind einfache Nullstellen $\Rightarrow$
   $y_h(x) = (c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)e^{-\frac{x}{2}} \quad , \quad c_i \in I\!R \quad ,$ ist allgemeine Lösung der homogenen DGL;

   partikulär: $\alpha = 0\ ,\ \beta = 2\ ,\ q(x) \equiv 1 \quad , \quad \alpha + i\beta = 2i$ ist keine Nullstelle von $p(\lambda) \quad\Rightarrow\quad$ keine Resonanz $\Rightarrow$
   Komplexer Ansatz: $w_0(x) = ae^{2ix} \quad\Rightarrow$
   $w_0'(x) = 2iae^{2ix}\ ,\ w_0''(x) = -4ae^{2ix}$, einsetzen und Division durch e^{2ix} ergibt:
   $-4a + 2ia + a = 1 \quad\Rightarrow\quad (-3+2i)a = 1 \quad\Rightarrow a = \frac{1}{-3+2i} = \frac{-3-2i}{13} \quad\Rightarrow$
   $w_0(x) = (-\frac{3}{13} - i\frac{2}{13})e^{2ix} = (-\frac{3}{13} - i\frac{2}{13})(\cos 2x + i\sin 2x) \quad\Rightarrow$
   $y_0(x) = Re(w_0(x)) = -\frac{3}{13}\cos 2x + \frac{2}{13}\sin 2x$ ist partikuläre Lösung.

   Oder reeller Ansatz: $y_0(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$ (keine Resonanz) $\Rightarrow$
   $y_0'(x) = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x \quad , \quad y_0''(x) = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x$, einsetzen und nach cos- und sin- Termen sortieren ergibt:
   cos-Terme: $\quad -4a + 2b + a = 1 \quad\Rightarrow\quad -3a + 2b = 1$
   sin-Terme: $\quad -4b - 2a + b = 0 \quad\Rightarrow\quad -2a - 3b = 0$
   GLS lösen $\Rightarrow \quad a = -\frac{3}{13}\ ,\ b = \frac{2}{13} \quad\Rightarrow$
   $y_0(x) = -\frac{3}{13}\cos 2x + \frac{2}{13}\sin 2x$ ist partikuläre Lösung $\Rightarrow$

   $y(x) = (c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)e^{-\frac{x}{2}} - \frac{3}{13}\cos 2x + \frac{2}{13}\sin 2x \quad , \quad c_i \in I\!R \quad ,$ ist allgemeine Lösung in $I\!R$.

6. $y'' + y = \sin x$

homogen: $p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm i$ sind einfache Nullstellen $\Rightarrow$
$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, $c_i \in I\!R$, ist allgemeine Lösung der homogenen DGL;

partikulär: $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $q(x) \equiv 1$, $\alpha + i\beta = i$ ist einfache Nullstelle von $p(\lambda) \;\Rightarrow\;$ (einfache) Resonanz $\Rightarrow$
Komplexer Ansatz: $w_0(x) = xa\mathrm{e}^{ix} \;\Rightarrow$
$w_0'(x) = a(1 + ix)\mathrm{e}^{ix}$, $w_0''(x) = a(i + i + i^2 x)\mathrm{e}^{ix} = a(2i - x)\mathrm{e}^{ix}$, einsetzen und Division durch e^{ix} ergibt:
$a(2i - x) + ax = 1 \;\Rightarrow\; 2ia = 1 \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2} \;\Rightarrow$
$w_0(x) = -\frac{i}{2}x\mathrm{e}^{ix} = -\frac{i}{2}x(\cos x + i \sin x) \;\Rightarrow$
$y_0(x) = Im(w_0(x)) = -\frac{1}{2}x \cos x$ ist partikuläre Lösung $\Rightarrow$
$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x$, $c_i \in I\!R$, ist allgemeine Lösung in $I\!R$.

7. $y'' + y = x \sin x\, \mathrm{e}^x$

homogen: $p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm i$ sind einfache Nullstellen $\Rightarrow$
$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, $c_i \in I\!R$, ist allgemeine Lösung der homogenen DGL;

partikulär: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $q(x) = x$, $\alpha + i\beta = 1 + i$ ist keine Nullstelle von $p(\lambda) \;\Rightarrow\;$ keine Resonanz $\Rightarrow$
Komplexer Ansatz: $w_0(x) = (a + bx)\mathrm{e}^{(1+i)x} \;\Rightarrow$
$w_0'(x) = (b + (1 + i)a + (1 + i)bx)\mathrm{e}^{(1+i)x}$
$w_0''(x) = ((1 + i)b + (1 + i)b + (1 + i)^2 a + (1 + i)^2 bx)\mathrm{e}^{(1+i)x}$
$= (2(1 + i)b + 2ia + 2ibx)\mathrm{e}^{(1+i)x}$, einsetzen und Division durch $\mathrm{e}^{(1+i)x}$ ergibt:
$2(1 + i)b + 2ia + 2ibx + a + bx = x \;\Rightarrow\;$ (Koeffizientenvergleich):
x^1-Term: $(1 + 2i)b = 1 \;\Rightarrow\; b = \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{5}$
x^0-Term: $(2 + 2i)b + (1 + 2i)a = 0 \;\Rightarrow\; a = -\frac{2+2i}{1+2i}b = -\frac{(2+2i)(1-2i)}{5}b$
$\Rightarrow\; a = -\frac{6-2i}{5}b = -\frac{(6-2i)(1-2i)}{25} = -\frac{2-14i}{25} = \frac{-2+14i}{25} \;\Rightarrow$
$w_0(x) = (\frac{-2+14i}{25} + \frac{1-2i}{5}x)\mathrm{e}^{(1+i)x} = (\frac{-2+14i}{25} + \frac{1-2i}{5}x)(\cos x + i \sin x)\mathrm{e}^x \;\Rightarrow$
$y_0(x) = Im(w_0(x)) = ((\frac{14}{25} - \frac{2}{5}x)\cos x + (-\frac{2}{25} + \frac{1}{5}x)\sin x)\mathrm{e}^x$ ist partikuläre Lösung.
Hier wäre ein reeller Ansatz mit wesentlich mehr Rechenaufwand verbunden.

$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + y_0(x)$, $c_i \in I\!R$, ist allgemeine Lösung in $I\!R$.

Superpositionsprinzip

Ist die rechte Seite von der Form $f(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)$ und ist y_k partikuläre Lösung von $L[y] = f_k(x) \;\Rightarrow$
$y_0(x) = \sum_{k=1}^{m} y_k(x)$ ist partikuläre Lösung von $L[y] = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)$.

Denn: $L[y_0] = L[\sum_{k=1}^{m} y_k] = \sum_{k=1}^{m} L[y_k] = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)$ (da L linear).

Beispiele

1. $y'' + y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2x^2$

   partikuläre Lösung:

   zu $3\mathrm{e}^{2x}$: Ansatz $y_1(x) = a\mathrm{e}^{2x}$ (keine Resonanz)
   $\Rightarrow \quad y_1'(x) = 2a\mathrm{e}^{2x} \;,\; y_1''(x) = 4a\mathrm{e}^{2x} \quad \Rightarrow$
   $4a + a = 3 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad y_1(x) = \frac{3}{5}\mathrm{e}^{2x}$
   zu $2x^2$: Ansatz $y_2(x) = a + bx + cx^2$ (keine Resonanz)
   $\Rightarrow \quad y_2'(x) = b + 2cx \;,\; y_2''(x) = 2c \quad \Rightarrow$
   $2c + a + bx + cx^2 = 2x^2 \quad \Rightarrow \quad c = 2 \;,\; b = 0 \;,\; a = -4 \quad \Rightarrow \quad y_2(x) = -4 + 2x^2 \quad \Rightarrow$
   $y_0(x) = \frac{3}{5}\mathrm{e}^{2x} + (-4 + 2x^2)$ ist partikuläre Lösung.

2. $y'' + 2y' + y = 2\cosh x = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}$

   homogen: $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1$ ist doppelte Nullstelle $\Rightarrow$
   $y_h(x) = (c_1 + c_2 x)\mathrm{e}^{-x} \;,\; c_i \in \mathbb{R}$, ist allgemeine Lösung der homogenen DGL;

   partikulär:

   zu e^{x}: Ansatz $y_1(x) = a\mathrm{e}^{x}$ (keine Resonanz)
   $\Rightarrow \quad y_1'(x) = a\mathrm{e}^{x} \;,\; y_1''(x) = a\mathrm{e}^{x} \quad \Rightarrow$
   $a + 2a + a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad y_1(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x}$,
   zu e^{-x}: Ansatz $y_2(x) = ax^2\mathrm{e}^{-x}$ (doppelte Resonanz)
   $\Rightarrow \quad y_2'(x) = a(2x - x^2)\mathrm{e}^{-x} \;,\; y_2''(x) = a(2 - 4x + x^2)\mathrm{e}^{-x} \quad \Rightarrow$
   $a(2 - 4x + x^2 + 4x - 2x^2 + x^2) = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y_2(x) = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x} \quad \Rightarrow$
   $y_0(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x}$ ist partikuläre Lösung;

   $y(x) = (c_1 + c_2 x)\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x} \;,\; c_i \in \mathbb{R}$, ist allgemeine Lösung in $\mathbb{R}$.

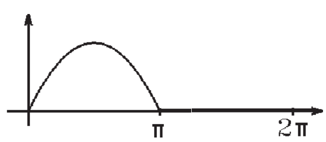
Ist die rechte Seite von der Form $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{,falls } 0 \le x \le l \\ h(x) & \text{,falls } l < x < \infty \end{cases}$
so muß man zunächst die allgemeine Lösung in $[0, l]$ und dann die allgemeine Lösung in (l, ∞) bestimmen und an der *Übergangsstelle* $x = l$ verlangen, daß die Lösungen mitsamt ihrer Ableitung *übereinstimmen*.

Beispiele

1. $y'' + 4y = \begin{cases} x(\pi - x) & \text{,falls } 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{,falls } x > \pi \end{cases}$

   $y(0) = y'(0) = 0$ (Einschaltvorgang),

   f ist stetig in $[0, \infty)$.



homogen: $p(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i \quad \Rightarrow$
$y_h(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$, $c_i \in I\!R$, ist allgemeine Lösung der homogenen DGL;

partikulär:

a) in $[0, \pi]$: Ansatz $y_0(x) = a + bx + cx^2$ (keine Resonanz)
$\Rightarrow \quad y_0'(x) = b + 2cx$, $y_0''(x) = 2c \quad \Rightarrow$
$2c + 4a + 4bx + 4cx^2 = \pi x - x^2 \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{\pi}{4}$, $a = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow$
$y_0(x) = \frac{1}{8}(1 + 2\pi x - 2x^2)$ ist partikuläre Lösung in $[0, \pi]$;

b) in (π, ∞): $\Rightarrow \quad y_0(x) \equiv 0$.

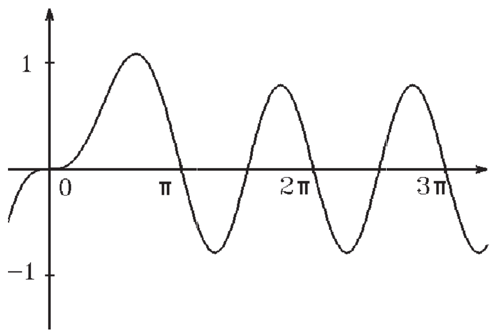
Lösung in $[0, \pi]$: $y_1(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{8}(1 + 2\pi x - 2x^2)$, $(c_i \in I\!R)$,
Lösung in (π, ∞): $y_2(x) = d_1 \cos 2x + d_2 \sin 2x$, $(d_i \in I\!R)$.

Anfangsbedingung: $y_1(0) = c_1 + \frac{1}{8} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{8}$
$y_1'(0) = 2c_2 + \frac{\pi}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{\pi}{8}$
$\Rightarrow \quad y_1(x) = \frac{1}{8}(1 + 2\pi x - 2x^2 - \cos 2x - \pi \sin 2x)$.

Übergang bei $x = \pi$:
$y_2(\pi) = d_1 = y_1(\pi) = \frac{1}{8}(1 + 2\pi^2 - 2\pi^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad d_1 = 0$
$y_2'(\pi) = 2d_2 = y_1'(\pi) = \frac{1}{8}(2\pi - 4\pi - 2\pi) = -\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad d_2 = -\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(1 + 2\pi x - 2x^2 - \cos 2x - \pi \sin 2x) & \text{,falls } 0 \le x \le \pi \\ -\frac{\pi}{4} \sin 2x & \text{,falls } x > \pi \end{cases}$$

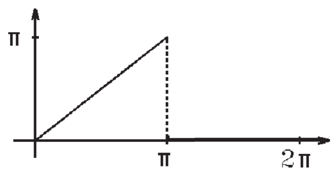
ist die gesuchte Lösung in $[0, \infty)$. y ist 2-mal stetig differenzierbar in $[0, \infty)$, da f stetig in $[0, \infty)$ ist.



2. $y'' + 4y = \begin{cases} x & \text{,falls } 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{,falls } x > \pi \end{cases}$

$y(0) = y'(0) = 0$ (Einschaltvorgang),

f ist nicht stetig in $[0, \infty)$,
sondern hat bei $x = \pi$ eine Sprungstelle.



homogen: $p(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i \quad \Rightarrow$
$y_h(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$, $c_i \in I\!R$, ist allgemeine Lösung der homogenen DGL;

partikulär:

a) in $[0,\pi]$: $y_0(x) = \frac{x}{4}$,
b) in (π,∞): $y_0(x) \equiv 0$.

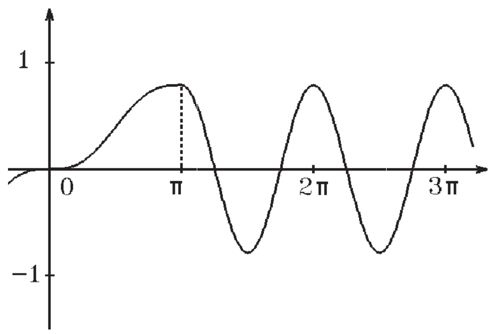
Lösung in $[0,\pi]$: $y_1(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{x}{4}$, $(c_i \in I\!R)$,
Lösung in (π,∞): $y_2(x) = d_1 \cos 2x + d_2 \sin 2x$, $(d_i \in I\!R)$.

Anfangsbedingung: $y_1(0) = c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$
$y_1'(0) = 2c_2 + \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{8}$
$\Rightarrow \quad y_1(x) = \frac{1}{8}(2x - \sin 2x)$.

Übergang bei $x = \pi$:
$y_2(\pi) = d_1 = y_1(\pi) = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad d_1 = \frac{\pi}{4}$
$y_2'(\pi) = 2d_2 = y_1'(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad d_2 = 0 \quad \Rightarrow$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(2x - \sin 2x) & \text{,falls } 0 \le x \le \pi \\ \frac{\pi}{4}\cos 2x & \text{,falls } x > \pi \end{cases}$$

ist die gesuchte Lösung in $[0,\infty)$. y ist nur 1-mal stetig differenzierbar in $[0,\infty)$, $y''(\pi)$ existiert nicht.



Zum Schluß behandeln wir noch eine Methode, wie man auch bei anderen rechten Seiten (wenn ein Ansatz nicht möglich ist) eine partikuläre Lösung bestimmen kann:

Satz 7.11 : Gegeben $L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ mit $f : [a,b] \to I\!R$ stetig in $[a,b]$, $a_i \in I\!R$, $x_0 \in [a,b]$.
u sei Lösung der zugehörigen homogenen DGL $L[y] = 0$ und erfülle die Anfangsbedingungen:
$u(0) = u'(0) = \ldots = u^{(n-2)}(0) = 0$, $u^{(n-1)}(0) = 1$.
Dann ist

$$\boxed{y_0(x) = \int_{x_0}^{x} u(x-t)f(t)\, dt}$$

eine partikuläre Lösung von $L[y] = f(x)$ in $[a,b]$.

Beweis : Wir werden später zeigen, daß y_0 n-mal differenzierbar ist in $[a,b]$ mit

$$y_0'(x) = \int_{x_0}^{x} u'(x-t)f(t)\ dt + \underbrace{u(x-t)f(t)\big]_{t=x}}_{=0}$$

$$y_0''(x) = \int_{x_0}^{x} u''(x-t)f(t)\ dt + \underbrace{u'(x-t)f(t)\big]_{t=x}}_{=0}$$

$$\vdots$$

$$y_0^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} u^{(n-1)}(x-t)f(t)\ dt + \underbrace{u^{(n-2)}(x-t)f(t)\big]_{t=x}}_{=0}$$

$$y_0^{(n)}(x) = \int_{x_0}^{x} u^{(n)}(x-t)f(t)\ dt + \underbrace{u^{(n-1)}(x-t)f(t)\big]_{t=x}}_{=f(x)}.$$

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$L[y_0] = \int_{x_0}^{x} L[u(x-t)]f(t)\ dt + f(x) = f(x) \quad (\text{da } L[u]=0)$$

$\Rightarrow$ y_0 ist partikuläre Lösung von $L[y] = f(x)$.

Bemerkung

x_0 ist frei wählbar in $[a,b]$, z.B.: $x_0 = 0$, falls $0 \in [a,b]$.

Beispiel

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x} \quad , \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

homogen: $p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

Bestimmung von u mit $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$:

$u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ (allgemeine Lösung der homogenen DGL),
$u(0) = c_1 = 0$, $u'(0) = c_2 = 1$ $\Rightarrow$ $u(x) = \sin x$ erfüllt $L[u] = 0$ und $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$

$$\Rightarrow \quad y_0(x) = \int_0^x \frac{\sin(x-t)}{\cos t}\ dt = \int_0^x \frac{\sin x \cos t - \cos x \sin t}{\cos t}\ dt$$

$$= \sin x \int_0^x 1\ dt - \cos x \int_0^x \frac{\sin t}{\cos t}\ dt = x \sin x + \cos x \ln(\cos x)$$ ist partikuläre Lösung in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $\Rightarrow$

$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln(\cos x)$ ist allgemeine Lösung in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.