Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 11

Abgabetermin: 20. Januar 2000

1. Skizzieren Sie zeichnerisch folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$:

$$
\begin{aligned}
A =& \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re(iz) < 2\} \\
B =& \{z \in \mathbb{C} : |z - (1+i)| = 1\} \\
C =& \{z \in \mathbb{C} : |z| = \Re(z) + 1\} \\
D =& \{z \in \mathbb{C} : |z-2| + |z+2| < 5\} \\
E =& \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1 \right\}
\end{aligned}
$$

2. Leiten Sie Formeln her, die $\sin(nx)$ für $n = 3, 5$ als Polynom in $\sin(x)$ ausdrücken.

3. (a) Zeigen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ gibts es ein $z \in \mathbb{C}$ sodass $z^2 + az + b = 0$.
   (b) Zeigen Sie: $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist surjektiv.

4. Bestimme die exakten Werte von $\sin(t)$ und $\cos(t)$ für $t = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}$ mit Hilfe der Additionstheoreme.

5. Zeige : $\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{x}{n} = x$ für alle $x \in \mathbb{C}$.

(∗) 6. Sei n eine natürliche Zahl. Betrachte das in den Einheitskreis eingeschriebene gleichmässige n-Eck, d.h. das Polygon, dessen Ecken gerade die n-ten Einheitswurzeln sind. Leite eine Formel für den Umfang U_n her und zeige $\lim_{n\to\infty} U_n = 2\pi$.