Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 12

Abgabetermin: 27. Januar 2000

1. Zeigen Sie: $\lim_{x \searrow 0} x^x = 1$ und $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

2. Zeigen Sie: Jedes reelle Polynom ungerader Ordnung hat eine Nullstelle.

3. Weisen Sie nach, daß $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ bijektiv ist und bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion arctan.

4. Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen: $x^{(x^x)}$, sinh, $\frac{1}{1+x^2}$ und $\log(2 + \cos x)$.

5. Sei $s > 1$, $s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert.
   Hinweis: Zeige zuerst
   $$\sum_{n=1}^{2^m} |n^{-s}| \leq 1 + \sum_{k=0}^{m-1} 2^k \left(2^k\right)^{-s}$$
   Bemerkung: Die Funktion $\zeta(s)$ heisst Riemannsche Zetafunktion.

(∗) 6. Sei
   $$f(x) = \begin{cases} x(1 + 2x \sin(\frac{1}{x})) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$
   Zeige, dass f in 0 differenzierbar ist mit $f'(0) > 0$, dass andererseits aber kein $\epsilon > 0$ existiert, für dass f eingeschränkt auf $[-\epsilon, +\epsilon]$ monoton steigend ist.