Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 13

Abgabetermin: 4. Februar 2000

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie: f ist stetig.

2. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt "gerade" falls $f(x) = f(-x) \forall x$ und "ungerade" falls $f(-x) = -f(x) \forall x$.
   (a) Zeigen Sie: Die Ableitung einer geraden Funktion ist ungerade.
   (b) Ein Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ist genau dann gerade wenn $a_k = 0$ für alle ungeraden k.

3. Die "Legendre-Polynome" sind wie folgt definiert:
$$P_n(x) = \frac{1}{n!(2^n)} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right]$$
Zeige Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Legendre-Polynom P_n genau n paarweise verschiedene Nullstellen im Intervall $]-1, 1[$ besitzt.

4. Berechne
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1 - x e^{\frac{x}{2}}}{x^3} \right), \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{1 - \cos x} \text{ und } \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^{\sqrt{3}}}$$

5. Sei $n \in \mathbb{N}$ und f eine n-mal differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$. Beweise folgende "Leibnitzregel" für höhere Ableitungen (wobei $f^{(k)}$ die k-te Ableitung von f bezeichnet mit $f^{(0)} = f$):
$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

(∗) 6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|^2}} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass f unendlich oft differenzierbar ist.