Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 14

Abgabetermin: 11. Februar 2000

1. Berechne $\int_0^1 e^x \, dx$ via Approximation durch Treppenfunktionen.

2. Für $n, m \in \mathbb{N}$ berechne man
$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\, dx \text{ und } \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)\, dx$$

3. Sei $n > 0$. Bestimmen Sie alle Maxima der durch $f(x) = x^n e^{-x}$ definierte Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

4. Für $f \in C[a, b]$ und $p \in \mathbb{N}$ sei
$$||f||_p = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx}$$
und
$$||x||_\infty = \max_{x \in [a,b]} \{|f(x)|\}$$
Zeige:
$$||f||_\infty = \lim_{p \to \infty} ||f||_p$$

5. Seien P_n die Legendre-Polynome (siehe Aufgabenblatt 13). Zeige:
$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & \text{falls } n = m \end{cases}$$

(∗) 6. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, also gleichmässig durch Treppenfunktionen approximierbar.

Zeige:

Der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x \searrow 0} f(x)$ existiert.