Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 15

Abgabetermin: 7. April 2000

1. Zeige: Das Legendre-Polynom P_n (siehe Aufgabenblatt 13) genügt der Differentialgleichung
$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x).$$

2. Man untersuche die durch $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ gegebene Funktion auf lokale Extrema in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Man bestimme eine Rekursionsformal für die Integrale $I_m = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^{2^m}}} dx$.

4. Unter Verwendung von Aufgabe 6∗ von Blatt 13 zeige man: Es gibt eine auf ganz $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbare Funktion f mit
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \text{ oder } x \geq 3 \\ 1 & \text{falls } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

5. Sei $f(x) = \frac{1}{n!}x^n(1-x)^n$. Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(k)}(1), f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

6. Sei $\sum_n z_n$ eine komplexe Reihe, die nicht absolut konvergent ist.

   Zeige: Es gibt eine divergente Umordnung, also eine Bijektion $\zeta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sodass $\sum_n z_{\zeta(n)}$ divergiert.

7. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig und $c \in (a, b)$, sodass f in allen Punkten $x \in (a, b) \setminus \{c\}$ differenzierbar ist. Man nehme darüberhinaus an, dass $\lim_{x \to c} f'(x)$ existiert.

   Zeige: Dann ist f in c differenzierbar und es gilt $f'(c) = \lim_{x \to c} f'(x)$