Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 2

Abgabetermin: 5. November 1999

1. Sei K eine angeordneter Körper.

   Zeigen Sie, dass die durch $c(x) = x^3$ gegebene Abbildung $c : K \to K$ injektiv ist.

2. Sei K eine angeordneter Körper, $x, y, \lambda \in K$ mit $0 < \lambda < 1$ und $x < y$.

   Zeigen Sie:

   $$x < \lambda x + (1 - \lambda)y < y$$

3. Zeigen Sie nur unter Verwendung der Körperaxiome: In jedem Körper K gilt $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (wobei $2 = 1 + 1$ und $x^2 = x \cdot x$.)

4. Sei K ein Körper, a ein fest gewähltes Element von K.

   Zeigen Sie: Die Abbildung $f : x \mapsto x + a$ ist eine bijektive Abbildung von K nach K.

5. Sei K ein angeordneter Körper. Das Maximum $\max\{x, y\}$ ist definiert durch $\max\{x, y\} = y$ falls $y > x$ und $\max\{x, y\} = x$ sonst. Zeigen Sie:

   $$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

(∗) 6. Seien K und L zwei Körper mit $\#K = \#L = 3$.

   Zeigen Sie: Es gibt einen Körperisomorphismus $\phi : K \to L$, d.h. eine bijektive Abbildung $\phi : K \to L$, sodass $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$, sowie $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ und $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ für alle $x, y \in K$.