Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 4

Abgabetermin: 19. November 1999

1. Berechnen Sie:

$$\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}}i\right)^3, \quad 2\overline{\left(\frac{1}{1+i}\right)}, \quad \sum_{k=1}^{323467} i^k$$

2. Untersuchen Sie folgende Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n, \; b_n = \binom{100n}{n^2}, \; c_n = \sqrt[n]{n}, \; d_n = (-1)^n \frac{3n+1}{5n^2+2}.$$

3. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Folge $a_n = z^n$?

4. Zeige: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ gilt:

$$\frac{x+y}{2} \;\geq\; \sqrt{xy} \;\geq\; \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

Anmerkung: Diese drei Ausdrücke bezeichnet man als das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel von x und y.

5. Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge. Zeigen Sie, dass die durch

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

definierte Folge gegen denselben Grenzwert konvergiert.

(∗) 6. Seien a, b reelle Zahlen, und a_n die durch $a_1 = a$, $a_2 = b$ und $a_{n+2} = (a_{n+1}+a_n)/2$ für $n \geq 1$ rekursiv definierte Folge.

Zeige, dass $(a_n)_n$ konvergiert und bestimme den Grenzwert.