Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 5

Abgabetermin: wegen "Dies" erst am 30. November 1999

1. Sei (a_n) eine Folge sodass die durch $b_n = a_{2n}$, $c_n = a_{2n+1}$ und $d_n = a_{5n}$ definierten Teilfolgen (b_n), (c_n) und (d_n) alle konvergent sind.

   Folgt daraus, dass auch (a_n) konvergent ist?

2. Zeige:

   Für alle $k \in \mathbb{N}$, $c > 1$ gilt: $\lim a_n = 0$ für $a_n = \frac{n^k}{c^n}$.

   (Tip: Zeige zuerst $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{c}$ und dann $\exists K > 0, c > q > 1 : \forall n : |a_n| \leq K \frac{1}{q^n}$.)

3. Untersuche diese Folgen auf Konvergenz, und bestimme ggf. den Grenzwert:

$$a_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right),\ b_n = \frac{3^n+2}{7^n},\ c_n = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n},\ d_n = \left(\frac{2}{3}n\right)^{-n} n!$$

4. Prüfe auf Monotonie (beachte $n \in \mathbb{N}$, also $n \neq 0$):

$$\left(n^2 + (-1)^n\right),\ (n^4 - 2n^3),\ (n^{1-n}),\ \left(n + \sqrt{7 + \frac{1}{n^2}}\right),\ \left(n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)$$

5. Zeige: Sei z_n eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Dann besitzt (z_n) eine konvergente Teilfolge.

(∗) 6. Zeige: Jede Folge besitzt eine monotone Teilfolge.