Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 6

Abgabetermin: 3. Dezember 1999

Achtung: *Keine Vorlesung am Freitag, den 26. November ("Dies academicus")*

1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n = \sqrt{n+1000} - \sqrt{n}, \ b_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n},$$

   Zeige: Für $n < 1\,000\,000$ gilt $a_n > b_n$, aber $\lim a_n = 0$ und $\lim b_n = \frac{1}{2}$.

2. Die Folge (a_n) ist rekursiv definiert durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ für $n \geq 1$.

   Konvergiert a_n und wenn ja, wogegen?

3. Seien $a_1, \ldots, a_k$ nichtnegative reelle Zahlen.

   Zeige:

$$\lim_p \sqrt[p]{a_1^p + \ldots + a_k^p} = \max\{a_1, \ldots, a_k\}$$

4. Seien $a_1, \ldots, a_k$ reelle Zahlen mit $a_i > -1$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.

   Zeige

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

5. Sei $n \in \mathbb{N}$, A eine Menge mit n Elementen und B eine Menge mit $n+2$ Elementen.

   Wieviele surjektive Abbildungen gibt es von B nach A?

(∗) 6 Die Folgen (a_n) und (b_n) seien gegeben $a_1 = a$, $b_1 = b$ und

$$a_{n+1} = 2\frac{a_n b_n}{a_n + b_n}, \ b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

für $n \geq 1$, wobei a und b feste reelle Zahlen mit $0 < a < b$ sind.

Zeigen Sie, dass (a_n) und b_n konvergieren und bestimmen Sie die Grenzwerte.