Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung II (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 10

Abgabetermin: 23. Juni 2000

1. Sei V das auf $\mathbb{R}^3$ durch $V = (-y/r^2, (x/r^2) + z, y)$ mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$ gegebene Vektorfeld. Berechne $rotV$ und $\int_\gamma V \cdot ds$ für $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$.

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

definiert. Berechne die Hesse-Matrix im Nullpunkt.

3. Zeige: Für alle 2-mal stetig differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\Delta(fg) = f\Delta(g) + 2 < gradf, gradg > +g\Delta(f).$$

4. Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{>0}$ die durch $f(x,t) = t^{-n/2}e^{-||x||^2/4t}$ definierte Funktion. Zeige: f ist eine Lösung der "*Wärmeleitungsgleichung*"

$$\Delta f - \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

5. Sei $c > 0$, $k \in \mathbb{R}^n$, $\omega = ||k||c$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion.

   Zeige: Die durch $g(x,t) = f(< x, k > -\omega t)$ gegebene Funktion $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Lösung der *Schwingungsgleichung*

$$\Delta g - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}g = 0$$

(*) 6. Ist die Menge der positiv semidefiniten reellen Matrizen in $M(n \times n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ abgeschlossen? Offen?