Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 12

Abgabetermin: 7. Juli 2000

1. Sei $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(1-x)y(1-y) = 0\}$. Skizziere S und zeige, dass es keine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt mit $S = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$ und $gradf(x,y) \neq (0,0)$ für alle $(x,y) \in S$.

2. Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die durch $f(x,y) = x^2 - y^3$ und $g(x,y) = -3y$ gegebenen Funktionen. Sei $S = \{f = 0\}$. Bestimme globale Extrema von $g|_S$ und berechne $gradf$ und $gradh$.

3. Für einen gegebenen Punkt $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ bestimme man die Ebene E mit $(a,b,c) \in E$, für die der durch E und die Ebenen $H_i = \{x_i = 0\}$ begrenzte Tetraeder minimales Volumen hat.

4. Sei $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ mit $q^n = \Pi_{k=1}^n x_k$.

   Zeige:

$$\Pi_{k=1}^n (1 + x_i) \geq (1 + q)^n$$

5. Seien $n \in \mathbb{N}$, $p, q \in \mathbb{R}^n$. Sei S die Menge aller der Weglänge nach parametrisierten Wege von p nach q und $L : S \to \mathbb{R}$ die Abbildung, die jedem Weg seine Länge zuordnet. Bestimme, wo L auf S Minima annimmt.

(∗) 6. Sei $f : (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$. Zeige, dass es in einer Umgebung von $(1,0)$ eine Umkehrabbildung für f gibt, wähle eine solche Umgebung und bestimme explizit die Umkehrabbildung (Tip: Beachte $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.)