Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung II (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 2

Abgabetermin: 25. April 2000

1. Bestimme alle zweimal differenzierbaren Funktionen f auf $\mathbb{R}$ mit $f = -f''$.

2. Sei f eine unendlich oft differenzierbare Funktion mit $f(1/2n) = 0$ und $f(1/(2n+1)) = 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Zeige:

$$\sup_{x \in [-1,1]} \sup_{n \in \mathbb{N}} |f^{(n)}(x)| = +\infty$$

3. Bestimme die Taylorreihe von $\arcsin :]-1,+1[\to \mathbb{R}$.

4. Zeige: Seien P, Q Polynome mit $Q(0) \neq 0$.

   Dann definiert $f(x) = P(x)/Q(x)$ eine reell-analytische Funktion in einer Umgebung von 0.

5. Zeige, dass für n-mal stetig differenzierbare Funktionen f gilt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0 \iff \forall k \leq n : f^{(k)}(0) = 0$$

(∗) 6. Durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|^2}} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

   wird eine unendlich oft differenzierbare Funktion definiert (Aufgabe I:13.6).

   Zeige damit:

   - Es gibt eine Funktion $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $g(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $g(x) = 1$ für $x \geq 1$.
   - Sei $h \in C^\infty(\mathbb{R})$. Dann gibt es eine Funktion $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, sodass $\phi(x) = h(x)$ für $|x| \leq 1$ und $\phi(x) = 0$ für $|x| \geq 2$.

Webpage: `http://www.math.unibas.ch/~winkel/infini2.html`