Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung II (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 3

Abgabetermin: 5. Mai

1. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind abgeschlossen oder offen?

$$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \{z \in \mathbb{R} : |z| \geq 2 oder z > 4\}, \{z \in \mathbb{R} : z > 2\}.$$

2. Zeige: Für beliebige Teilmengen A, B eines metrischen Raums X gilt: $\partial(A \times B) = (\partial A \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times \partial B)$.

3. Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}, \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^2}$$

4. Zeige: Für $x > 0$ konvergiert:

$$\int_0^{\infty} t^{(x-1)} e^{-t} dt$$

(Dis so definierte Funktion heisst *Gamma-Funktion* $\Gamma(x)$.)

5. Für $N \in N$ definiere $C_N = \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N}\right) - \log N$. Zeige:

   (a) $0 < C_N < 1$ für alle $N > 1$.

   (b) Der Grenzwert $\lim C_n$ existiert.

(∗) 6. Sei $C^1[0,1]$ versehen mit der Norm $||f|| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| + \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|$ Dann gilt:

Die Menge der monoton steigenden Funktionen ist abgeschlossen in $C^1[0,1]$.