Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung II (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 5

Abgabetermin: 19. Mai 2000

1. Skizziere die durch $\gamma : t \to (t \sin t, t \cos t, t)$ gegebene Kurve $\gamma : [-3\pi, +3\pi] \to \mathbb{R}^3$ und berechne ihre Länge.

2. Welche folgender Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ sind kompakt?

$$\mathbb{Z}^3, \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^4 = 1\}, \{(x,y,z) : x^2 + y^3 + z^4 = 1\},$$
$$\{(n,m,p) \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{p} = 1\}, \{(x,y,z) : 0 < |x| + |y| + |z| \leq 1\}$$

3. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

   Zeige: Die durch $(x,y) \mapsto d(x,y)$ definierte Abbildung von $X \times X$ nach $\mathbb{R}$ ist stetig.

4. Sei V der Vektorraum aller konvergenten reellen Folgen, versehen mit der Norm $||(a_n)_n|| = \sup_k |a_k|$.

   Zeige: Die Abbildung $(a_n) \mapsto \lim a_n$ ist eine stetige Abbildung von V nach $\mathbb{R}$.

5. Sei $S = \{v \in \mathbb{R}^n : ||v|| = 1\}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $f, g : S \to \mathbb{R}^{>0} = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$ stetige Abbildungen.

   Zeige: Es gibt Konstanten $K \geq C > 0$ sodass

$$Kf(v) \geq g(v) \geq Cf(v) \ \forall v \in S$$

(∗) 6. Sei V der Vektorraum aller Abbildungen $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} = 0$, versehen mit der Norm $||\phi|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\phi(n)|$

   Ist V vollständig ?