Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung II (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 9

Abgabetermin: 16. Juni 2000

1. Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $< , >$ und Norm $||v|| = \sqrt{< v, v >}$. Zeige, dass die durch $v \mapsto < v, v >$ gegebene Abbildung differenzierbar ist, und bestimme das Differential.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{K}$ die Menge der kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass durch

$$\delta(K, L) = \max \left\{ \max_{x \in K} \{d(x, L)\}, \max_{x \in L} \{d(x, K)\} \right\}$$

mit $d(x, K) = \min_{y \in K} d(x, y)$ eine Metrik δ auf $\mathcal{K}$ definiert wird.

3. Berechne die Krümmung der "Zykloide" $\gamma : t \mapsto 23(t - \sin t, 1 - \cos t)$.

4. Können die Vektorfelder $(3x^2 + xy, xy)$ und $(y, 0)$ auf $\mathbb{R}^2$ als Gradient einer Funktion dargestellt werden?

5. In welchen Punkten in $\mathbb{R}^2$ ist die Funktion $f(x, y) = y\sqrt{3x^2 + y^2}$ differenzierbar und in welchen Punkten besitzt sie welche partiellen Ableitungen?

(∗) 6. Sei $f \in C[0, 1]$. Zeige: $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x) \sin(nx) = 0$.