Ruhr-Universität Bochum WS 1996/97

Priv.Doz. Dr. J. Winkelmann

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Zusatzblatt

Diese Aufgaben sind Zusatzaufgaben, man kann damit Punkte erzielen, um Defizite auszugleichen.

1. Untersuche auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

2. Sei $x_0 = 2$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{3}{x_n})$ für $n \in \mathbb{N}$.
Zeige: $|x_n - \sqrt{3}| \leq 2^{-n}$

3.a) Zeige

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 0$$

b) Zeige

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2}$$

4.a) Konvergiert die Folge komplexer Zahlen $a_n = \left(\frac{(n+i)^2}{n^2+i}\right)$ und wenn ja, wogegen?

b) Sei $\Omega_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$
Zeige:

$$\sum_{z\in\Omega_n} z = 0 \text{ und } \prod_{z\in\Omega_n} z = (-1)^{n+1}$$

5. Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, und $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $d(x) = inf\{|x-y| : y \in M\}$.
Zeige: d ist stetig.

6. Für welche reellen Polynome $P \in \mathbb{R}[x]$ ist die durch das Polynom gegebene Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ surjektiv?

Abgabe: 06.01.1997