

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

9. Übungsblatt

Aufgabe 1.

Gibt es eine holomorphe Funktion $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ auf einer offenen Umgebung U von 0 mit

$$f^{(n)}(0) = n!n^n \quad ?$$

Aufgabe 2.

Berechnen Sie (z.B. mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung der Sinusfunktion):

$$\int_{|z|=2} z^2 \sin(\bar{z}) dz$$

Aufgabe 3.

a)

Sei $g : D_{2\pi}^* = \{z : 0 < |z| < 2\pi\} \rightarrow \mathbf{C}$ gegeben durch

$$g(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Zeigen Sie, dass sich g holomorph nach 0 fortsetzen lässt.

b)

Gemäß a) besitzt g eine konvergente Potenzreihenentwicklung $g(z) = \sum_n \frac{B_n}{n!} z^n$.

Zeigen Sie: Die Zahlen B_n (bekannt als "Bernoullische Zahlen") erfüllen die Relation

$$\sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} B_j = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}.$$

Bestimmen Sie ferner die Werte von B_0 , B_1 , B_2 und B_3 .

Abgabe: 20. Juni 2008