



Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

42. Mathematik-Olympiade

1. Stufe (Schulrunde)

Klasse 11-13

Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

421311

Zu jeder reellen Zahl a ermittle man alle diejenigen reellen Zahlen x , die die Gleichung

$$|x + 3a| - |x - a| = 2a$$

erfüllen.

421312

Ein Kegel der Höhe H steht auf der Spitze. Er wird teilweise mit Wasser gefüllt, so dass das Wasser bis zur Höhe h steht. Nach dem Verschließen der Füllöffnung wird der Kegel so umgedreht, dass er auf seiner Grundfläche steht. Wie hoch ist jetzt der Wasserstand?

421313

Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen, die nicht als Differenz zweier Quadratzahlen darstellbar sind.

421314

Anna und Berta spielen ein Spiel mit natürlichen Zahlen. Sie ziehen abwechselnd. Ein Zug besteht darin, aus einer natürlichen Zahl durch Addition eines ihrer echten Teiler eine neue Zahl zu bilden. Gewonnen hat das Spiel, wer als erster eine Zahl größer oder gleich 2003 erreicht hat.

Anna beginnt das Spiel, indem sie zur Startzahl 2 den einzigen echten Teiler 1 addiert und 3 erhält.

Man entscheide, wer von beiden den Sieg erzwingen kann und gebe an, auf welche Weise dies möglich ist.

Hinweis: Ein Teiler t von n heißt genau dann ein *echter* Teiler, wenn $t \neq n$ gilt.