420711

Für die tatsächliche Anzahl x der Münzen gilt nach den Bedingungen der Aufgabe:

$$991 \leq x \leq 1009\,.$$

Da es zehnmal so viele 1-Cent-Münzen gibt wie 5-Cent-Münzen, muss x durch 11 teilbar sein.
Im angegebenen Intervall erfüllt nur $x = 1001$ diese Bedingung.
Wegen $1001 : 11 = 91$ beträgt die Anzahl der 5-Cent-Münzen genau 91 und wegen $1001 - 91 = 910$ die Anzahl der 1-Cent-Münzen genau 910.
Aus $91 \cdot 5 + 910 \cdot 1 = 1365$ folgt, dass Thomas 13,65 Euro in seiner Sparbüchse hat.

420712

a) Wenn das Doppelte der kleinsten dieser Zahlen bereits größer ist als die größte Zahl der vorliegenden Folge, dann sind die Lösungsmöglichkeiten erschöpft.

   Somit kann man eingrenzen:

$$2 \cdot n \leq n + 7\,, \quad \text{also } n \leq 7\,.$$

   Da $n > 1$ vorausgesetzt ist, gibt es also für $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ Paare der geforderten Art.

b) Die folgende Tabelle erfasst alle Lösungsmöglichkeiten:

n	aufeinanderfolgende Zahlen	geordnete Paare, die die Bedingungen erfüllen
2	2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9	(2;4),(2;6), (2;8), (3;6), (3;9), (4;8)
3	3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10	(3;6), (3;9), (4;8), (5;10)
4	4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11	(4;8), (5;10)
5	5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12	(5;10), (6;12)
6	6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13	(6;12)
7	7; 8; 9; 10; 11; 12;13; 14	(7;14)

   Damit erfüllen genau die folgenden neun geordneten Paare die Bedingungen der Aufgabe:

$$(2;4),\ (2;6),\ (2;8),\ (3;6),\ (3;9),\ (4;8),\ (5;10),\ (6;12),\ (7;14)\,.$$

420713

a) Am 26. März beginnt der Gesang um 6.13 Uhr.

   Von 18.30 Uhr am 25. März bis 6.13 Uhr am 26. März sind 11 Stunden und 43 Minuten vom Ende des abendlichen bis zum Beginn des morgendlichen Gesangs vergangen.

   Diese Zeit wird jeden Tag um 4 Minuten kürzer.

   Zunächst berechnet man: Wie viele Tage liegen zwischen der Nacht vom 25. zum 26. März und der Nacht vom 20. bis zum 21. Juni?

26. März bis 31. März:	6 Tage,
1. April bis 30. April:	30 Tage,
1. Mai bis 31. Mai:	31 Tage,
1. Juni bis 20. Juni:	20 Tage,
insgesamt:	87 Tage.

   Damit verkürzt sich die Nachtruhe um $(87 \cdot 4 =)348$ Minuten, also um 5 Stunden und 48 Minuten.

   Es bleiben 5 Stunden und 55 Minuten Nachtruhe.

   Bei diesem Aufgabenteil ist die Umstellung auf Sommerzeit unwichtig.

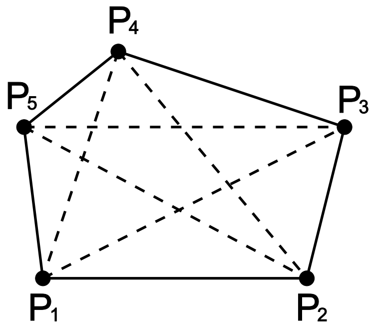
b) Vom 25. März bis zum 21. Juni sind 88 Tage. Der Gesang beginnt am 21. Juni 176 Minuten eher als 6.15 Uhr. Das sind 2 Stunden und 56 Minuten.

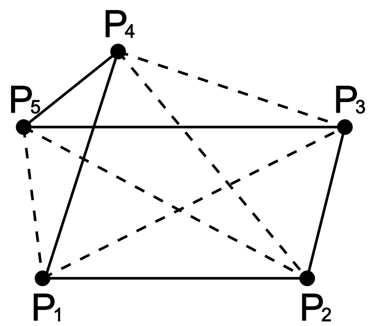
   Ohne Zeitverschiebung wäre das um 3.19 Uhr.

   Da Sommerzeit ist, beginnt der Gesang am 21. Juni um 4.19 Uhr.

<u>420714</u>

a) Durch Abzählen erhält man 10 Verbindungsstrecken und 10 Dreiecke der verlangten Art. Folgende Beispiele zeigen, dass es möglich ist, die zu den Eckpunkten eines Fünfecks gehörenden 10 Verbindungsstrecken so mit den Farben rot und blau zu färben, dass bei keinem der 10 Dreiecke (mit diesen Verbindungsstrecken als Seiten) alle drei Seiten gleich gefärbt sind.





b) Für jedes Sechseck gilt:

   Von den 5 Verbindungsstrecken, die von P_1 ausgehen, müssen mindestens 3 Strecken gleich gefärbt werden, z.B. die Strecken $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_1P_3}$, $\overline{P_1P_4}$ rot.

   Damit die Seiten des Dreiecks $P_1P_2P_3$ nicht alle rot werden, muss $\overline{P_2P_3}$ blau gefärbt werden.

   Analog müssen auch die Strecken $\overline{P_2P_4}$ und $\overline{\textit{werden}}$.

Dann ist jedoch das Dreieck $P_2P_3P_4$ einfarbig blau.

Damit ist gezeigt, dass im Fall eines Sechsecks (und erst recht eines n-Ecks mit $n > 6$) beim Färben der Verbindungsstrecken mit zwei Farben stets mindestens ein einfarbiges Dreieck entsteht (s. Abb. b).

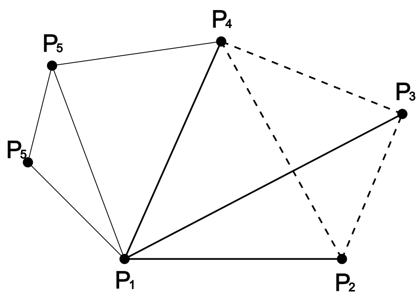


Abbildung b

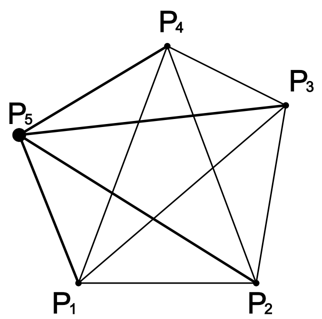


Abbildung Z

Zusatzaufgabe:
Die Anzahl der in einem Fünfeck vorhandenen Verbindungsstrecken bzw. Dreiecke lässt sich (noch) durch *Abzählen* ermitteln, was bereits bei einem Zehneck sehr schwer fallen dürfte.
Man kann diese Anzahlen aber auch durch folgende Überlegungen aus den bekannten Anzahlen bei einem Viereck *berechnen:*
Wenn man zu den 4 Eckpunkten eines Vierecks einen fünften Punkt P_5 hinzufügt, dann gilt (siehe Abbildung Z):

Da man von jedem der 4 Eckpunkte zu dem neu hinzugekommenen Punkt genau eine Strecke zeichnen kann, kommen zu den 6 vorhandenen Verbindungsstrecken noch genau 4 neue hinzu. Folglich gibt es im Fünfeck insgesamt $(6 + 4 =)10$ Verbindungsstrecken.
Da man zu jeder der 6 vorhandenen Verbindungsstrecken (als Grundlinie) mit Hilfe des neuen Punkts (als drittem Eckpunkt) ein Dreieck zeichnen kann, kommen zu den 4 vorhandenen Dreiecken noch 6 neue hinzu. Folglich gibt es im Fünfeck insgesamt $(4 + 6 =)10$ Dreiecke.
Durch die gleiche Überlegung lassen sich aus den bekannten Anzahlen der Verbindungsstrecken bzw. Dreiecke in einem n-Eck die entsprechenden Anzahlen in einem $(n + 1)$-Eck berechnen.
Der folgenden Tabelle sind nicht nur die Resultate zu entnehmen, sondern man erkennt auch, wie sie gewonnen wurden. Dabei bezeichne n die Anzahl der Ecken, s die Anzahl der Verbindungsstrecken und d die Anzahl der Dreiecke.

n	s	d
4	6	4
5	$(6 + 4 =)10$	$(4 + 6 =)10$
6	$(10 + 5 =)15$	$(10 + 10 =)20$
7	$(15 + 6 =)21$	$(20 + 15 =)35$
8	$(21 + 7 =)28$	$(35 + 21 =)56$
9	$(28 + 8 =)36$	$(56 + 28 =)84$
10	$(36 + 9 =)45$	$(84 + 36 =)120$