

Finite Element Methoden für Navier-Stokes Gleichungen

Vorlesungsskriptum Wintersemester 2019/20

R. Verfürth

Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I. Einführung	5
I.1. Beispiele für Strömungsprobleme	5
I.2. Modellierung	6
I.3. Der Satz von Cauchy	14
I.4. Notationen und Hilfsergebnisse	26
Kapitel II. Stokes Gleichungen	33
II.1. Heuristische Vorüberlegungen	33
II.2. Ein abstraktes Variationsproblem	36
II.3. Lösbarkeit der Stokes Gleichungen	42
II.4. Ein abstrakter Approximationssatz	47
II.5. Stabile gemischte Finite Elemente	51
II.6. Petrov-Galerkin Stabilisierung	64
II.7. Nicht-konforme Methoden	72
II.8. Stromfunktionsformulierung	81
II.9. Numerische Lösung der diskreten Probleme	89
II.10. A posteriori Fehlerschätzer	102
Kapitel III. Stationäre Navier-Stokes Gleichungen	109
III.1. Lösbarkeit der stationären Navier-Stokes Gleichung	109
III.2. Approximation regulärer Lösungsäste	122
III.3. Stromlinien-Diffusions Methoden	128
III.4. Numerische Lösung der diskreten Probleme	130
III.5. A posteriori Fehlerschätzer	137
Kapitel IV. Instationäre Navier-Stokes Gleichungen	143
IV.1. Lösbarkeit der instationären Navier-Stokes Gleichungen	143
IV.2. Diskretisierung und numerische Lösung	151
IV.3. A posteriori Fehlerschätzer	157
IV.4. Finite Volumen und DG Methoden	161
Literaturverzeichnis	171
Index	173

KAPITEL I

Einführung

I.1. Beispiele für Strömungsprobleme

In diesem Abschnitt wollen wir einige Beispiele für Strömungsprobleme angeben, ohne dabei näher auf die physikalische und mathematische Modellierung einzugehen. Die Beispiele sollen einen Eindruck über die Vielfalt der auftretenden Probleme vermitteln. Die Liste der Beispiele ist bei weitem nicht vollständig.

Ein erstes Beispiel ist die Reduzierung des Luftwiderstandes eines Kraftfahrzeuges. Hierbei muss die Luftströmung um das Fahrzeug berechnet werden. Mathematisch handelt es sich um ein Außenraumproblem, d.h. ein System von Differentialgleichungen muss außerhalb eines beschränkten Gebietes gelöst werden.

Eng verwandt ist das Problem der Optimierung eines Tragflügels, so dass der Luftwiderstand reduziert und gleichzeitig der Auftrieb verbessert wird. Für jede Tragflügelkonfiguration muss die Strömung um den Tragflügel berechnet werden, d.h., es muss wieder ein Außenraumproblem gelöst werden. Im Gegensatz zum ersten Beispiel sind die Strömungsgeschwindigkeiten wesentlich höher. Hierdurch treten neue physikalische und mathematische Probleme auf. Besonders auffällig ist dies beim Übergang von Unterschall- zu Überschallgeschwindigkeiten. Eine mathematische Konsequenz ist z.B., dass sich der Typ der Differentialgleichung ändert.

Traditionellerweise wurden die oben beschriebenen Probleme durch Experimente im Windkanal gelöst. In den letzten Jahrzehnten werden diese Experimente jedoch zunehmend durch numerische Simulationen ergänzt und zum Teil ganz ersetzt. Besonders auffällig ist dies bei der Simulation des Wiedereintrittes eines Raumgleiters in die Erdatmosphäre. Hier sind die Strömungsphänomene in komplizierter Weise mit thermischen und chemischen Problemen gekoppelt (z.B. Abschmelzen des Hitzeschutzes).

Ein weiteres Beispiel ist die Strömung in einem Gewässer wie einem See. Dabei ist z.B. der Transport oder die Sedimentation von Schadstoffen zu simulieren. Wenn die horizontale Ausdehnung des Gewässers groß ist im Vergleich zur Tiefe, können spezielle Vereinfachungen getroffen werden, die auf die sog. Flachwassergleichungen führen. Eng verwandt sind Schwingungsphänomene in großen Seen. Historisch verbürgt

ist z.B. das Konstanzer Wasserwunder von 1549. Durch günstige Windkonstellationen wurden mehrere Grundfrequenzen des Bodensees so angeregt, dass sich die Strömungsrichtung in Konstanz umkehrte.

Strömungsprobleme treten oft auch in Verbindung mit freien Randwertproblemen auf. Eine industrielle Anwendung ist z.B. die Filmbeschichtung. Dabei wird ein Trägermaterial durch einen dünnen Kanal, der mit der aufzutragenden Flüssigkeit gefüllt ist, gezogen. Am Austritt des Kanals bildet sich eine freie Oberfläche. Die Geschwindigkeit, mit der das Trägermaterial fortbewegt wird, und die Nachfüllmenge der Flüssigkeit müssen so gesteuert werden, dass eine gewünschte Filmdicke erreicht wird. Neben dem Strömungsfeld muss dabei auch die unbekannte Grenzfläche des Flüssigkeitsfilmes berechnet werden.

Strömungsprobleme sind häufig mit thermischen, chemischen oder elektromagnetischen Phänomenen gekoppelt. Ein Beispiel ist der bereits erwähnte Wiedereintritt eines Raumgleiters. Ein anderes ist die Strömung eines elektrisch leitenden Plasmas in einem starken Magnetfeld (Tokamak).

Ein letztes alltägliches Beispiel ist die Wettervorhersage. Hierbei muss die Strömung auf einer Mannigfaltigkeit (Erdoberfläche) beeinflusst durch Gravitation, Erdrotation und Topographie simuliert werden.

I.2. Modellierung

Für die Modellierung der Strömung betrachten wir einen Flüssigkeitskörper Ω , der sich unter dem Einfluss innerer und äußerer Kräfte bewegt. Sei $V \subset \Omega$ ein kleines Flüssigkeitsvolumen und $\eta \in V$. Zur Zeit $t > 0$ befindet sich das Teilchen, das zur Zeit $t = 0$ in η war, an der Stelle $x = \Phi(\eta, t)$. Setze $V(t) = \Phi(\cdot, t)(V)$. Die *Geschwindigkeit* der Strömung im Punkt $x = \Phi(\eta, t)$ ist dann definiert durch

$$\mathbf{v}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\eta, t), \quad x = \Phi(\eta, t).$$

Die Modellierung beruht auf folgender grundlegender Annahme:

- (A1) $\Phi(\cdot, t) : \Omega \rightarrow \Omega$ ist für jedes $t > 0$ ein orientierungstreuer C^∞ -Diffeomorphismus mit $\Phi(\cdot, 0) = Id$.

Wegen dieser Annahme können wir die Strömung auf zwei Weisen betrachten. Einmal betrachten wir die Trajektorie $t \mapsto \Phi(\eta, t)$ eines beliebigen, festen Punktes mit ursprünglicher Position η . Dies ist die sog. *Lagrangesche Sichtweise*. Entsprechend heißt η *Lagrangesche Koordinate*. Das Lagrangesche Koordinatensystem bewegt sich mit der Strömung mit. Bei der anderen Sichtweise, die wir im folgenden stets verfolgen werden, betrachten wir zu einem beliebigen, festen Punkt x die Trajektorien $t \mapsto \Phi(\cdot, t)^{-1}(x)$, die durch diesen Punkt laufen. Dies ist die sog. *Eulersche Sichtweise*. Entsprechend heißt x *Eulersche Koordinate*. Das Eulersche Koordinatensystem ist unbewegt.

Für die Herleitung der relevanten Differentialgleichungen bezeichnen wir mit $D\Phi = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \eta_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 3}$ die Funktionalmatrix von Φ , mit $J = \det D\Phi$ die Funktionaldeterminante von Φ und mit A_{ij} die Ko-Faktoren von $D\Phi$. Dann gilt

$$(I.2.1) \quad [(D\Phi)^{-1}]_{ij} = \frac{1}{J} (-1)^{i+j} A_{ji}$$

und

$$(I.2.2) \quad \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} A_{ij} (D\Phi)_{kj} = J \delta_{ik}.$$

Mit diesen Bezeichnungen gelten die folgenden beiden fundamentalen Beziehungen.

LEMMA I.2.1 (Zeitableitung der Funktionaldeterminante). *Es ist*

$$\frac{\partial}{\partial t} J = J (\operatorname{div}_x \mathbf{v}) \circ \Phi.$$

BEWEIS. Aus der Definition von \mathbf{v} folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial \eta_j} \Phi_i(\eta, t) = \frac{\partial}{\partial \eta_j} v_i(\Phi(\eta, t), t) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(\Phi(\eta, t), t) \frac{\partial \Phi_k}{\partial \eta_j}.$$

Hieraus und aus (I.2.1) und (I.2.2) ergibt sich mit dem Entwicklungssatz für Determinanten und der Kettenregel mit $x = \Phi(\eta, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} J &= \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \frac{\partial J}{\partial \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \eta_j} \right)} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \eta_j} \Phi_i \\ &= \sum_{1 \leq i, j, k \leq 3} (-1)^{i+j} A_{ij} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \eta_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(x, t) \\ &= \sum_{1 \leq i, k \leq 3} J \delta_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(x, t) \\ &= J (\operatorname{div}_x \mathbf{v}) \circ \Phi(\eta, t). \quad \square \end{aligned}$$

SATZ I.2.2 (Transport Theorem). *Sei $f : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ hinreichend oft differenzierbar. Dann gilt für jedes Volumen V in Ω*

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(x, t) dx = \int_{V(t)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(f\mathbf{v})(x, t) \right\} dx.$$

BEWEIS. Aus der Annahme (A1) und Lemma I.2.1 folgt wegen $\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = v_i(\Phi(\eta, t), t)$ mit dem Transformationssatz

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(x, t) dx \\
&= \frac{d}{dt} \int_V f(\Phi(\eta, t), t) J(\eta, t) d\eta \\
&= \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f(\Phi(\eta, t), t) J(\eta, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} f(\Phi(\eta, t), t) \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} J(\eta, t) \right. \\
&\quad \left. + f(\Phi(\eta, t), t) \frac{\partial}{\partial t} J(\eta, t) \right\} d\eta \\
&= \int_V J(\eta, t) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f(\cdot, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} f(\cdot, t) v_i(\cdot, t) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^3 f(\cdot, t) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\cdot, t) \right\} \circ (\Phi(\eta, t)) d\eta \\
&= \int_{V(t)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(f\mathbf{v})(x, t) \right\} dx. \quad \square
\end{aligned}$$

An die Bewegung der Flüssigkeit werden nun die klassischen Annahmen der Physik gestellt:

- (A2) Erhaltung der Masse,
- (A3) Erhaltung des Impulses,
- (A4) Erhaltung der Gesamtenergie.

Bezeichne mit $\rho(x, t)$ die *Dichte* der Flüssigkeit. Dann folgt aus der Massenerhaltung (A2) und Satz I.2.2 für jedes Volumen V in Ω :

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(x, t) dx = \int_{V(t)} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})(x, t) \right\} dx.$$

Hieraus ergibt sich punktweise die *Massenerhaltung*

$$(I.2.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty).$$

Die zeitliche Änderung des Impulses ist wegen Satz I.2.2 gleich

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(x, t) \mathbf{v}(x, t) dx \\
 &= \left(\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(x, t) v_i(x, t) dx \right)_{1 \leq i \leq 3} \\
 \text{(I.2.4)} \quad &= \left(\int_{V(t)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i)(x, t) + \operatorname{div}(\rho v_i \mathbf{v})(x, t) \right\} dx \right)_{1 \leq i \leq 3} \\
 &= \int_{V(t)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v})(x, t) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})(x, t) \right\} dx
 \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} = (v_i u_j)_{1 \leq i, j \leq 3}.$$

Wegen der Impulserhaltung (A3) ist die zeitliche Änderung des Impulses gleich der Summe der inneren und äußeren Kräfte. Da die äußeren Kräfte mit dem Volumen skalieren und bzgl. des Volumens additiv sind, folgt aus dem Satz von Radon-Nikodym, dass sie von der Form $\int_{V(t)} \rho \mathbf{f} dx$ sind. Für die inneren Kräfte folgt aus dem *Satz von Cauchy*, dessen Beweis wir im nächsten Abschnitt skizzieren, dass sie von der Form sind $\int_{\partial V(t)} \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ mit einem Tensor $\underline{\mathbf{T}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und dass der Gaußsche Integralsatz gilt¹

$$\int_{\partial V(t)} \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{V(t)} \operatorname{div} \underline{\mathbf{T}} dx.$$

$\underline{\mathbf{T}}$ heißt der *Spannungstensor*. Aus dieser Darstellung der inneren und äußeren Kräfte und der Identität (I.2.4) ergibt sich für jedes Volumen

$$\int_{V(t)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \right\} dx = \int_{V(t)} \{ \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div} \underline{\mathbf{T}} \} dx$$

und somit punktweise die *Impulserhaltung*

$$\text{(I.2.5)} \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \underline{\mathbf{T}} \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty).$$

Bezeichnen wir mit e die *Gesamtenergie*, so folgt aus Satz I.2.2 für ihre zeitliche Änderung

$$\text{(I.2.6)} \quad \frac{d}{dt} \int_{V(t)} e dx = \int_{V(t)} \left\{ \frac{\partial e}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(e \mathbf{v})(x, t) \right\} dx.$$

Aus der Energieerhaltung (A4) folgt andererseits, dass die zeitliche Änderung der Gesamtenergie gleich der Summe der Energie der einwirkenden inneren und äußeren Kräfte plus der Änderung der inneren

¹Wie üblich bezeichnen $\partial V(t)$ und \mathbf{n} den Rand von $V(t)$ und den äußeren Einheitsnormalenvektor an $\partial V(t)$.

Energie ist. Wegen der oben hergeleiteten Form der inneren und äußeren Kräfte ergeben sich die ersten beiden Beiträge zu

$$\int_{V(t)} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx \quad \text{und} \quad \int_{\partial V(t)} \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v} d\sigma = \int_{V(t)} \operatorname{div}(\underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v}) dx.$$

Für die Änderung der inneren Energie folgt aus dem Satz von Cauchy, dass sie von der Form ist $\int_{\partial V(t)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ mit einem Vektorfeld $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ und dass wieder der Gaußsche Integralsatz gilt

$$\int_{\partial V(t)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{V(t)} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} dx.$$

Hieraus und aus der Identität (I.2.6) ergibt sich für jedes Volumen

$$\int_{V(t)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} e + \operatorname{div}(e\mathbf{v}) \right\} dx = \int_{V(t)} \{ \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div}(\underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v}) + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \} dx$$

und somit punktweise die *Energieerhaltung*

$$(I.2.7) \quad \frac{\partial}{\partial t} e + \operatorname{div}(e\mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div}(\underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v}) + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty).$$

Die Gleichungen (I.2.3), (I.2.5) und (I.2.7) beschreiben das Verhalten der Flüssigkeit noch nicht vollständig. Sie müssen durch *konstitutive Gleichungen* für die Größen $\underline{\mathbf{T}}$, e und $\boldsymbol{\sigma}$ ergänzt werden. Hierzu werden die folgenden Annahmen gemacht:

- (A5) $\underline{\mathbf{T}}$ hängt nur vom Gradienten der Geschwindigkeit ab und die Abhängigkeit ist linear, $\underline{\mathbf{T}}$ ist symmetrisch,² bei Fehlen innerer Reibung ist $\underline{\mathbf{T}}$ diagonal und dem Druck proportional, d.h., es treten nur innere Kräfte in Normalenrichtung auf.
- (A6) Es gilt die Beziehung³ $e = \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2$.
- (A7) $\boldsymbol{\sigma}$ ist proportional zur Änderung der internen Energie, d.h. $\boldsymbol{\sigma} = \alpha \nabla \varepsilon$.

Aus der Annahme (A5) folgt, dass der Spannungstensor $\underline{\mathbf{T}}$ von der Form ist

$$(I.2.8) \quad \underline{\mathbf{T}} = 2\lambda \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) + \mu(\operatorname{div} \mathbf{v}) \underline{\mathbf{I}} - p \underline{\mathbf{I}}.$$

Dabei bezeichnen

$$\underline{\mathbf{I}} = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$$

den *Einheitstensor*,

$$\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq 3}$$

den *Deformationstensor*,

$$(I.2.9) \quad p = p(\rho, \varepsilon)$$

²Folgt mit dem Satz von Cauchy auch aus der Erhaltung des Drehmomentes

³ ε heißt *interne Energie* und wird häufig mit der Temperatur identifiziert.

den *Druck* und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ die *kinematischen Viskositäten* der Flüssigkeit. Gleichung (I.2.9) heißt auch *Zustandsgleichung*. Für ein ideales Gas ist z.B. $p(\rho, \varepsilon) = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ mit $\gamma > 1$. Man beachte, dass $\operatorname{div} \mathbf{v}$ die Spur des Deformationstensors $\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v})$ ist.

Aus den Gleichungen (I.2.3), (I.2.5), (I.2.7), (I.2.8) und (I.2.9) und den Annahmen (A6) und (A7) ergeben sich die *kompresiblen Navier-Stokes Gleichungen in konvervativer Form*

$$\begin{aligned}
 \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0 \\
 \partial_t(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) &= \rho \mathbf{f} + 2\lambda \operatorname{div} \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) \\
 &\quad + \mu \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{grad} p \\
 &= \rho \mathbf{f} + \lambda \Delta \mathbf{v} \\
 &\quad + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{grad} p \\
 \partial_t e + \operatorname{div}(e \mathbf{v}) &= \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + 2\lambda \operatorname{div}[\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}] \\
 &\quad + \mu \operatorname{div}[\operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}] \\
 &\quad - \operatorname{div}(p \mathbf{v}) + \alpha \Delta \varepsilon \\
 &= \{\rho \mathbf{f} + 2\lambda \operatorname{div} \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) + \mu \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \\
 &\quad - \operatorname{grad} p\} \cdot \mathbf{v} \\
 &\quad + \lambda \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) : \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) + \mu (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 \\
 &\quad - p \operatorname{div} \mathbf{v} + \alpha \Delta \varepsilon \\
 p &= p(\rho, \varepsilon) \\
 e &= \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2.
 \end{aligned}
 \tag{I.2.10}$$

Für reibungsfreie Strömungen, d.h. $\lambda = \mu = 0$, ergeben sich aus (I.2.10) die *Euler Gleichungen* für ein ideales Gas

$$\begin{aligned}
 \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0 \\
 \partial_t(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \underline{\mathbf{I}}) &= \rho \mathbf{f} \\
 \partial_t e + \operatorname{div}(e \mathbf{v} + p \mathbf{v}) &= \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \alpha \Delta \varepsilon \\
 p &= p(\rho, \varepsilon) \\
 e &= \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2.
 \end{aligned}
 \tag{I.2.11}$$

Aus der ersten Gleichung von (I.2.10) ergibt sich für die linke Seite der zweiten Gleichung von (I.2.10)

$$\begin{aligned}
 \partial_t(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) &= (\partial_t \rho) \mathbf{v} + \rho \partial_t \mathbf{v} + (\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})) \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \\
 &= \rho [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}].
 \end{aligned}$$

Einsetzen der ersten beiden Gleichungen von (I.2.10) in die dritte Gleichung liefert

$$\begin{aligned}
& \lambda \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) : \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) + \mu (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 - p \operatorname{div} \mathbf{v} + \alpha \Delta \varepsilon \\
&= -\{\rho \mathbf{f} + 2\lambda \operatorname{div} \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) + \mu \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{grad} p\} \cdot \mathbf{v} \\
&\quad + \partial_t \left(\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \right) + \operatorname{div} \left(\rho \varepsilon \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \right) \\
&= -\{\partial_t(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})\} \cdot \mathbf{v} \\
&\quad + \varepsilon \partial_t \rho + \varepsilon \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \rho \partial_t \varepsilon + \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varepsilon \\
&\quad + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \partial_t \rho + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \rho \partial_t \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) \\
&\quad + \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) \\
&= -\rho \mathbf{v} \cdot [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] + \rho \partial_t \varepsilon + \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varepsilon \\
&\quad + \rho \mathbf{v} \cdot \partial_t \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] \\
&= \rho \partial_t \varepsilon + \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varepsilon.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir so die *kompresiblen Navier-Stokes Gleichungen* in nicht konservativer Form

$$\begin{aligned}
& \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \\
& \rho [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = \rho \mathbf{f} + \lambda \Delta \mathbf{v} \\
& \quad + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{grad} p \\
\text{(I.2.12)} \quad & \rho [\partial_t \varepsilon + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varepsilon] = \lambda \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) : \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) + \mu (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 \\
& \quad - p \operatorname{div} \mathbf{v} + \alpha \Delta \varepsilon \\
& p = p(\rho, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Nehmen wir an, dass die Dichte ρ in $\Omega \times (0, \infty)$ konstant ist, vernachlässigen die Energiegleichung, d.h. die dritte Gleichung in (I.2.12), ersetzen p durch $\frac{p}{\rho}$ und bezeichnen mit $\nu = \frac{\lambda}{\rho}$ die *dynamische Viskosität*, so erhalten wir die *instationären inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen*

$$\begin{aligned}
& \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\
\text{(I.2.13)} \quad & \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} + \nu \Delta \mathbf{v} - \operatorname{grad} p.
\end{aligned}$$

Für eine stationäre Bewegung ergeben sich die *stationären inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen*

$$\begin{aligned}
& \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\
\text{(I.2.14)} \quad & -\nu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \operatorname{grad} p = \mathbf{f}.
\end{aligned}$$

Linearisieren wir schließlich (I.2.14) um $\mathbf{v} = 0$ und skalieren die Viskosität ν zu 1, erhalten wir die *Stokes Gleichungen*

$$(I.2.15) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \\ -\Delta \mathbf{v} + \operatorname{grad} p &= \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass in den heute in der Praxis üblichen Algorithmen zur numerischen Strömungssimulation die Lösung der Navier-Stokes Gleichungen in der oben beschriebenen Art und Weise auf eine Folge einfacherer Probleme reduziert wird.

Die Gleichungen (I.2.10) – (I.2.13) sind zeitabhängig. Sie müssen daher durch Anfangsbedingungen für die Geschwindigkeit \mathbf{v} , die interne Energie ε und – bei den Gleichungen (I.2.10) – (I.2.12) – die Dichte ρ komplettiert werden.

Die Euler Gleichungen (I.2.11) sind hyperbolischer Natur und erfordern Randbedingungen auf dem Einströmrand von Ω . Die Gleichungen (I.2.10) und (I.2.12) – (I.2.15) sind von zweiter Ordnung im Ort und benötigen daher Randbedingungen auf ganz $\Gamma = \partial\Omega$.

Für die Energiegleichungen in (I.2.10) und (I.2.12) hat man die üblichen Dirichlet und Neumann Randbedingungen zur Auswahl. Schwieriger ist die Situation für die Massen- und Impulsgleichungen in (I.2.10) und (I.2.12) – (I.2.15).

Sir *George Gabriel Stokes* (1819 – 1903) schlug um 1845 zur Modellierung vor, dass die Flüssigkeitspartikel an den festen Wänden haften, so dass die Dirichlet Randbedingung

$$(I.2.16) \quad \mathbf{v} = 0$$

auf Γ zu fordern wäre.⁴

Pierre Louis Marie Henri Navier (1785 – 1836) schlug dagegen um 1827 die allgemeinere Randbedingung

$$(I.2.17) \quad \begin{aligned} \lambda_n \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + (1 - \lambda_n) \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \lambda_t [\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] + (1 - \lambda_t) [\underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] &= 0 \end{aligned}$$

auf Γ mit $\lambda_n, \lambda_t \in [0, 1]$ vor.⁵ Man beachte, dass die erste Gleichung die Normalkomponente von \mathbf{v} und $\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{T}}$ betrifft und dass sich die zweite Gleichung auf die Tangentialkomponenten von \mathbf{v} und $\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{T}}$ bezieht. Für $\lambda_n = \lambda_t = 1$ erhält man offensichtlich die *Hafttrandbedingung* (I.2.16) von Stokes als Spezialfall. Für $\lambda_n = 1, \lambda_t = 0$ erhält man die *Gleitrandbedingung*

$$(I.2.18) \quad \begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} &= 0 \end{aligned}$$

⁴Allgemeiner kann man $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\Gamma$ mit bekanntem \mathbf{v}_Γ betrachten.

⁵Allgemeiner kann man die homogene rechte Seite durch bekannte Funktionen ersetzen.

als Spezialfall. Die Frage, welche der beiden Randbedingungen (I.2.16) oder (I.2.17) die Natur besser wiedergibt, wurde im vorletzten Jahrhundert durch Pendelexperimente in zähen Flüssigkeiten zugunsten der Haftrandbedingung (I.2.16) entschieden. Bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten und geringen Reibungskräften, wie sie z.B. beim Wiedereintritt eines Raumkörpers auftreten, scheint allerdings die Gleitrandbedingung (I.2.18) bessere Ergebnisse zu liefern. Diese Randbedingung tritt auch zwingend bei freien Randwertproblemen wie z.B. der Filmbeschichtung auf. Die Lage des freien Randes wird dann wegen Kapillaritätseffekten dadurch bestimmt, dass seine Krümmung proportional zu den Normalspannungen $\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n}$ sein muss.

I.3. Der Satz von Cauchy

Wir betrachten die Bewegung eines Körpers B unter dem Einfluss innerer und äußerer Kräfte. Sei P ein Teil von B . Für P gilt der *Satz von der Impulserhaltung*:

$$(I.3.1) \quad \begin{aligned} & \text{zeitliche Änderung des Gesamtimpulses von } P \\ & = \text{Resultierende aller auf } P \text{ einwirkenden Kräfte.} \end{aligned}$$

Bezeichnen ρ die *Massendichte* und \mathbf{u} die *Geschwindigkeit*, so lässt sich die linke Seite von (I.3.1) in der Form schreiben $\frac{d}{dt} \int_P \rho \mathbf{u} dV$. Die rechte Seite lässt sich zerlegen in den Anteil des äußeren Kraftfeldes und in die Kräfte, die von den Molekülen außerhalb von P auf die innerhalb von P ausgeübt werden. Bezeichnet \mathbf{f} die Dichte der äußeren Kräfte, so ist deren Einfluss auf P gegeben durch $\int_P \mathbf{f} dV$. Schließlich nimmt man an, dass der Einfluss der inneren Kräfte auf P gegeben wird durch $\int_{\partial P} \mathbf{q}(x, \mathbf{n}(x)) dA$. Dabei ist \mathbf{q} die Dichte der inneren Kräfte, \mathbf{n} die äußere Normale und A das Flächenelement. Dieser Darstellung der inneren Kräfte liegt die Annahme zugrunde, dass sie nur über die Oberfläche von P auf P einwirken können. Unter der Annahme, dass \mathbf{q} stetig von x abhängt, bewies Cauchy im Jahre 1823, dass \mathbf{q} eine lineare Funktion von \mathbf{n} ist, d.h. $\mathbf{q}(x, \mathbf{n}(x)) = \underline{\mathbf{T}}(x) \cdot \mathbf{n}(x)$. Damit folgt aus der Impulserhaltung (I.3.1) die Gleichung

$$(I.3.2) \quad \frac{d}{dt} \int_P \rho \mathbf{u} dV = \int_P \mathbf{f} dV + \int_{\partial P} \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} dA.$$

Da (I.3.2) für alle Teile P von B gelten muss, folgt aus (I.3.2), Satz I.2.2 (S. 7) und dem Gaußschen Integralsatz unter geeigneten Regularitätsannahmen die differentielle Form

$$(I.3.3) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{f} + \operatorname{div} \underline{\mathbf{T}}.$$

Bei der Herleitung von (I.3.2) und (I.3.3) aus der Impulserhaltung (I.3.1) sind Begriffe verwandt und Annahmen gemacht worden, deren mathematische Bedeutung und physikalische Rechtfertigung noch geklärt werden muss:

- Was ist ein Teil von B ? Welche Struktur muss die Gesamtheit der Teile von B haben?
- Wodurch ist die Existenz der Kraftdichten \mathbf{f} und \mathbf{q} gerechtfertigt?
- Ist die Stetigkeit von \mathbf{q} physikalisch beweisbar oder folgt die lineare Abhängigkeit von \mathbf{n} auch unter schwächeren Annahmen?
- Unter welchen Regularitätsannahmen gilt die differentielle Form (I.3.3) und sind diese Voraussetzungen physikalisch gerechtfertigt?

Diese Fragen sollen im Folgenden beantwortet werden. Dabei beschränken wir uns der Einfachheit halber auf skalare Größen; die Übertragung auf Vektoren wie den Impuls ist unmittelbar klar.

A priori ist ein Körper eine offene, beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^n . Wie wir weiter unten sehen werden, muss der Rand von B gewisse (relativ schwache) Glattheitseigenschaften haben, um obigen Begriffen einen mathematischen Sinn zu geben. Alle physikalischen Aussagen über B sollten auch für alle seine Teile gelten. Insbesondere gelten die gleichen Einschränkungen an deren Ränder. Falls P und Q Teile von B sind, sollten auch $P \cup Q$ und (bis auf Nullmengen) $P \cap Q$ Teile von B sein. Ebenso sollte mit P auch $B \setminus P$ ein Teil von B sein. Insgesamt muss die Menge der Teile von B also die Struktur einer σ -Algebra tragen. Um die Existenz einer Dichte der äußeren Kräfte zu gewährleisten, muss diese σ -Algebra diejenige der Borel-Teilmengen von B enthalten.

Die äußeren Kräfte sind auf den Teilen von B definiert. Für disjunkte Teile von B müssen sie additiv sein. Mithin tragen sie die Struktur eines Maßes. Da die linke Seite von (I.3.1) absolut stetig bzgl. des Volumenmaßes ist, muss gleiches für die äußeren Kräfte gelten. Damit folgt die Existenz einer Dichte für die äußeren Kräfte unmittelbar aus dem Satz von Radon-Nikodym. Die Existenz der Kraftdichte \mathbf{f} ist also in diesem Zusammenhang trivial.

Die inneren Kräfte, die auf einen Teil P von B wirken, hängen nur von P und $B \setminus P$ bzw. allgemeiner von Teilen Q von $B \setminus P$ ab. Daher ist es sinnvoll anzunehmen, dass sie nur eine Funktion des Randes ∂P von P sind. Außerdem sollten sie auch für vernünftige Teilmengen von ∂P definiert und für disjunkte Mengen additiv sein. Insgesamt tragen sie also die Struktur eines *Oberflächenmaßes*. Außerdem hängen sie von der Orientierung ab. Insbesondere muss der Rand von P hinreichend glatt sein, um den Begriff einer Normalen definieren zu können. Da die linke Seite von (I.3.1) für kleiner werdendes Volumen gegen Null strebt, ist es sinnvoll anzunehmen, dass die inneren Kräfte absolut stetig bzgl.

des Flächenmaßes auf ∂P sind. Außerdem stellt die Erhaltungsgleichung (I.3.1) eine Koppelung zwischen Volumen- und Flächenmaßen dar. Diese wird für den Beweis des Satzes von Cauchy wesentlich sein.

Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}.$$

Dabei bezeichnet $|\cdot|$ die euklidische Norm auf \mathbb{R}^n . Für $A \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$\text{diam } A = \sup_{x, y \in A} |x - y|.$$

Dann definieren wir für $m \in \mathbb{N}$ das m -dimensionale Hausdorffmaß von $A \subset \mathbb{R}^n$ als

$$H^m(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^m(A)$$

mit

$$H_\delta^m(A) = \inf \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \omega_m 2^{-m} (\text{diam } C_j)^m : C_j \subset \mathbb{R}^n \text{ offen,} \right. \\ \left. \text{diam } C_j < \delta, A \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} C_j \right\}.$$

Dabei bezeichnet $\omega_m = V_m(B(0, 1))$ das Volumen der Einheitskugel im \mathbb{R}^m . H^n stimmt mit dem Lebesgueschen Volumenmaß überein. Für hinreichend glatt berandete Mengen stimmt $H^{n-1}(\partial A)$ mit dem Lebesgueschen Oberflächenmaß überein.

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir den *maßtheoretischen Rand* $\bar{\partial}A$ von A als

$$\bar{\partial}A = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{H^n(A \cap B(x, r))}{H^n(B(x, r))} \neq 0 \quad \text{und} \right. \\ \left. \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{H^n((\mathbb{R}^n \setminus A) \cap B(x, r))}{H^n(B(x, r))} \neq 0 \right\}.$$

Es ist stets

$$\bar{\partial}A \subset \partial A \quad \text{und} \quad H^{n-1}(\partial A \setminus \bar{\partial}A) = 0.$$

So ist z.B.

$$\partial(B(0, 1) \setminus \{0\}) = \partial B(0, 1) \cup \{0\} \quad \text{und} \quad \bar{\partial}(B(0, 1) \setminus \{0\}) = \partial B(0, 1).$$

Sei \mathbf{n} ein Vektorfeld auf $\bar{\partial}A$ mit $|\mathbf{n}(x)| = 1$ für alle x . Setze

$$B^\pm(x, r) = \{y \in B(x, r) : \pm(y - x) \cdot \mathbf{n}(x) \geq 0\}.$$

Dann heißt $\mathbf{n}(x)$ die *maßtheoretische äußere Normale* von A in x , wenn gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{H^n(B^+(x, r) \cap A)}{H^n(B^+(x, r))} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{H^n(B^-(x, r) \cap A)}{H^n(B^-(x, r))} = 1.$$

Die Menge aller Punkte von $\bar{\partial}A$, in denen die maßtheoretische äußere Normale existiert, wird mit ∂^*A bezeichnet.

Falls $H^{n-1}(\bar{\partial}A) < \infty$ ist, heißt A eine Menge *endlichen Perimeters*. Für Mengen endlichen Perimeters gilt

$$H^{n-1}(\bar{\partial}A \setminus \partial^*A) = 0.$$

Falls A eine Menge endlichen Perimeters ist, gibt es abzählbar viele C^1 -Mannigfaltigkeiten M_i mit

$$(I.3.4) \quad H^{n-1} \left(\partial^*A \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i \right) = 0.$$

Der Rand von A ist also bis auf eine H^{n-1} -Nullmenge glatt. Die Mengen endlichen Perimeters bilden außerdem eine σ -Algebra, die diejenige der Borelmengen enthält. Die Mengen endlichen Perimeters erfüllen also alle oben genannten Bedingungen an die Teile eines Körpers.

Falls A eine Menge endlichen Perimeters und $\mathbf{v} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld ist, gilt eine Verallgemeinerung des Gaußschen Integralsatzes

$$(I.3.5) \quad \int_A \operatorname{div} \mathbf{v} dH^n = \int_{\partial^*A} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dH^{n-1}.$$

Sei B eine offene, beschränkte Menge endlichen Perimeters. Bezeichne mit

$$\mathcal{P} = \{P \subset B : H^{n-1}(\bar{\partial}P) < \infty\}$$

das System aller Teile von B . Wie wir gesehen haben, besitzt \mathcal{P} die für eine axiomatische Behandlung der klassischen Mechanik erforderliche Struktur.

Unter einer *Materialfläche* S verstehen wir ein Paar (\hat{S}, \mathbf{n}) mit $\hat{S} \subset \bar{\partial}P$ für ein $P \in \mathcal{P}$ und $\mathbf{n} = \mathbf{n}_P$ H^{n-1} -f.ü. auf \hat{S} . Materialflächen sind also Verallgemeinerungen orientierter Flächenstücke und haben die oben geforderte Struktur. Zwei Flächenstücke $S_i = (\hat{S}_i, \mathbf{n}_i)$ heißen *kompatibel*, falls es ein $P \in \mathcal{P}$ gibt mit $\hat{S}_i \subset \bar{\partial}P$ und $\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_P$ H^{n-1} -f.ü. auf \hat{S}_i , $i = 1, 2$. Die Menge der Materialflächen bezeichnen wir mit \mathcal{S} .

Die Forderungen an die inneren Kräfte fassen wir in der folgenden Definition zusammen.

DEFINITION I.3.1 (Cauchy-Fluss; schwache Erhaltungsgleichung).

(1) Ein *Cauchy-Fluss* ist eine Abbildung $Q : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, die auf disjunkten, kompatiblen Materialflächen additiv ist und die Lipschitz-stetig bzgl. des $n - 1$ dimensionalen Hausdorffmaßes ist, d.h.

$$(I.3.6) \quad \begin{aligned} Q(S_1 \cup S_2) &= Q(S_1) + Q(S_2) \quad S_1, S_2 \text{ kompatibel mit} \\ &H^{n-1}(S_1 \cap S_2) = 0, \\ |Q(S)| &\leq cH^{n-1}(S) \quad \forall S \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

(2) Ein Cauchy-Fluss Q erfüllt eine *schwache Erhaltungsgleichung*, falls gilt

$$(I.3.7) \quad |Q(\bar{\partial}P)| \leq cH^n(P) \quad \forall P \in \mathcal{P}.$$

Definition [I.3.1](#) konkretisiert die allgemeinen Bemerkungen zu den inneren Kräften. Die Bedingungen [\(I.3.6\)](#) und [\(I.3.7\)](#) sind nicht die schwächst möglichen. Aus Bedingung [\(I.3.6\)](#) und dem Satz von Radon-Nikodym folgt unmittelbar:

LEMMA I.3.2 (Existenz von q_S). *Sei Q ein Cauchy-Fluss. Zu jedem $S \in \mathcal{S}$ gibt es dann eine Funktion $q_S \in L^1(S, H^{n-1})$ mit*

$$Q(S') = \int_{S'} q_S dH^{n-1}$$

für jede zu S kompatible Materialfläche S' mit $\widehat{S}' \subset \widehat{S}$.

Im Lichte von Lemma [I.3.2](#) besehen, besagt der Satz von Cauchy

$$q_S = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_S$$

für alle $S \in \mathcal{S}$ mit einer universellen, d.h. von $S \in \mathcal{S}$ unabhängigen Funktion \mathbf{q} .

DEFINITION I.3.3 (Negative Materialfläche). Sei $S = (\widehat{S}, \mathbf{n}) \in \mathcal{S}$. Dann ist $-S = (\widehat{S}, -\mathbf{n})$.

Aus der Definition von \mathcal{S} und den Eigenschaften von \mathcal{P} folgt, dass mit S auch $-S$ aus \mathcal{S} ist.

LEMMA I.3.4 ($q_{-S} = -q_S$). *Sei Q ein Cauchy-Fluss, der einer schwachen Erhaltungsgleichung genügt. Für jedes $S \in \mathcal{S}$ gilt dann*

$$Q(S) + Q(-S) = 0$$

bzw. $q_{-S} = -q_S$, wobei q_S und q_{-S} die gemäß Lemma [I.3.2](#) existierenden Dichten sind.

BEWEIS. Wir nehmen zunächst an, dass \widehat{S} mit $S = (\widehat{S}, \mathbf{n})$ eine C^1 -Mannigfaltigkeit ist. Dann sind für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ die folgenden Mengen wohl definiert und in \mathcal{P} enthalten:

$$D_\varepsilon^\pm = \{x = y \pm t\mathbf{n}(y) : y \in \widehat{S}, 0 < t < \varepsilon\}$$

$$D_\varepsilon = \{x = y + t\mathbf{n}(y) : y \in \widehat{S}, |t| < \varepsilon\}.$$

Außerdem ist

$$S \cup (-S) \cup \bar{\partial}D_\varepsilon \cup N_\varepsilon = \bar{\partial}D_\varepsilon^+ \cup \bar{\partial}D_\varepsilon^-$$

mit $H^{n-1}(N_\varepsilon) = 0$. Aus [\(I.3.6\)](#) und [\(I.3.7\)](#) folgt daher

$$\begin{aligned} |Q(S) + Q(-S)| &= |Q(\bar{\partial}D_\varepsilon^+) + Q(\bar{\partial}D_\varepsilon^-) - Q(\bar{\partial}D_\varepsilon)| \\ &\leq |Q(\bar{\partial}D_\varepsilon^+)| + |Q(\bar{\partial}D_\varepsilon^-)| + |Q(\bar{\partial}D_\varepsilon)| \\ &\leq 2cH^n(D_\varepsilon) \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung für glatte Flächenstücke. Da jedes $S \in \mathcal{S}$ in $\bar{\partial}P$ für ein $P \in \mathcal{P}$ enthalten ist, ist \widehat{S} bis auf eine H^{n-1} -Nullmenge die

Vereinigung von abzählbar vielen C^1 -Mannigfaltigkeiten. Damit folgt die Behauptung aus dem soeben Bewiesenen und (I.3.6), (I.3.7). \square

LEMMA I.3.5 (Cauchy-Flüsse auf Rändern). *Sei Q ein Cauchy-Fluss, der einer schwachen Erhaltungsgleichung genügt. Dann gibt es eine Funktion $b \in L^1(B, H^n)$ mit*

$$Q(\bar{\partial}P) = \int_P b dH^n \quad \forall P \in \mathcal{P}.$$

BEWEIS. Definiere die Abbildung $M : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$M(P) = Q(\bar{\partial}P) \quad \forall P \in \mathcal{P}.$$

Aus Lemma I.3.4 folgt, dass M auf \mathcal{P} additiv ist. Aus (I.3.7) folgt die absolute Stetigkeit von M bzgl. H^n . Damit ergibt sich die Behauptung aus dem Satz von Radon-Nikodym. \square

SATZ I.3.6 (Divergenz eines Cauchy-Flusses). *Sei Q ein Cauchy-Fluss, der einer schwachen Erhaltungsgleichung genügt. Dann gibt es ein $\mathbf{q} \in L^1(B, H^n)^n$, dessen Divergenz im distributionellen Sinn in $L^1(B, H^n)$ ist, mit*

$$(I.3.8) \quad \int_{\bar{\partial}P} v dQ = \int_P \operatorname{div}(v\mathbf{q}) dH^n$$

für alle $P \in \mathcal{P}$ und alle $v \in C^{0,1}(B)$. Außerdem gilt H^n -f.ü. die lokale Form des Erhaltungssatzes

$$(I.3.9) \quad \operatorname{div} \mathbf{q} = b,$$

wobei b die Funktion aus Lemma I.3.5 ist.

BEWEIS. Wir zeigen zunächst, dass es ein $\mathbf{q} \in L^1(B; H^n)^n$ derart gibt, dass für alle $P \in \mathcal{P}$ und alle stückweise affinen Funktionen v die Identität

$$(I.3.10) \quad \int_{\bar{\partial}P} v dQ = \int_P b v dH^n + \int_P \mathbf{q} \cdot \nabla v dH^n$$

gilt. Sei dazu $P \in \mathcal{P}$ beliebig. Wegen Lemma I.3.5 gilt (I.3.10) für alle konstanten Funktionen. Bezeichnen mit $x_i^* : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ die i -te Koordinatenfunktion. Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir folgende Mengen

$$\begin{aligned} R(t) &= \{x \in \mathbb{R}^n : x_i^*(x) \leq t\}, & R_0(t) &= \overset{\circ}{R}(t), \\ N(t) &= \partial R(t), & P(t) &= P \cap R(t). \end{aligned}$$

Dann ist

$$(I.3.11) \quad \bar{\partial}P(t) = [\bar{\partial}P \cap R_0(t)] \cup [P \cap N(t)] \cup M(t)$$

mit $H^{n-1}(M(t)) = 0$. Setze

$$F(t) = Q(\bar{\partial}P \cap R_0(t)), \quad G(t) = Q(P \cap N(t)), \quad H(t) = \int_{P(t)} b dH^n.$$

Da $P \subset B$ beschränkt ist, hat die Funktion G einen kompakten Träger. Aus (I.3.6), (I.3.11) und Lemma I.3.5 folgt

$$\begin{aligned}
 (I.3.12) \quad H(t) &= Q(\bar{\partial}P(t)) \\
 &= Q(\bar{\partial}P \cap R_0(t)) + Q(P \cap N(t)) \\
 &= F(t) + G(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Wenden wir [11, Satz 2.5.18] auf die Funktionen x_i^* und $f = id$ und die Maße

$$\mu(A) = Q(\bar{\partial}P \cap A), \quad \nu(A) = \int_{P \cap A} bdH^n$$

an, so folgt

$$(I.3.13) \quad \int_{\mathbb{R}} tdF(t) = \int_{\bar{\partial}P} x_i^* dQ, \quad \int_{\mathbb{R}} tdH(t) = \int_P x_i^* bdH^n.$$

Da G kompakten Träger hat, folgt aus (I.3.12) und (I.3.13)

$$\begin{aligned}
 (I.3.14) \quad \left| \int_{\bar{\partial}P} x_i^* dQ - \int_P x_i^* bdH^n \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} td(F - H)(t) \right| \\
 &= \left| - \int_{\mathbb{R}} tdG(t) \right| \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}} G(t) dt \right| \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}} |Q(P \cap N(t))| dt \\
 &\leq c \int_{\mathbb{R}} H^{n-1}(P \cap N(t)) dt \\
 &= cH^n(P),
 \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Identität aus (I.3.6) und die letzte Identität aus der co-area Formel folgt (sog. slicing). Definiere die Abbildung $\mu_i : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\mu_i(P) = \int_{\bar{\partial}P} x_i^* dQ - \int_P x_i^* bdH^n.$$

Wegen Lemma I.3.4 ist μ_i additiv. Wegen (I.3.14) ist μ_i absolut stetig bzgl. H^n . Aus dem Satz von Radon-Nikodym folgt die Existenz eines $q_i \in L^1(B, H^n)$ mit

$$\int_{\bar{\partial}P} x_i^* dQ - \int_P x_i^* bdH^n = \int_P q_i dH^n \quad \forall P \in \mathcal{P}.$$

Definiere $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$. Wegen $\nabla x_i^* = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ folgt hieraus (I.3.10) für alle $P \in \mathcal{P}$ und alle affinen Funktionen.

Die rechte Seite von (I.3.10) ist additiv auf \mathcal{P} . Wegen Lemma I.3.4 gilt dasselbe für die linke Seite von (I.3.10). Daher gilt (I.3.10) für alle stückweise affinen Funktionen.

Sei nun $v \in C^{0,1}(B)$ und $P \in \mathcal{P}$. Gemäß [10] gibt es eine Folge $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ stückweiser affiner Funktionen mit

$$\begin{aligned} v_m &\rightarrow v && \text{gleichmäßig auf } B \\ \nabla v_m &\rightarrow \nabla v && H^n\text{-f.ü. auf } B \\ |\nabla v_m| &\leq c && \forall m. \end{aligned}$$

Wegen (I.3.10) gilt für jedes m

$$(I.3.15) \quad \int_P \mathbf{q} \cdot \nabla v_m dH^n = \int_{\bar{\partial}P} v_m dQ - \int_P v_m b dH^n.$$

Wegen $v_m \rightarrow v$ gleichmäßig in B konvergiert die rechte Seite von (I.3.15) gegen $\int_{\bar{\partial}P} v dQ - \int_P v b dH^n$. Wegen $|\nabla v_m| \leq c$ für alle m konvergiert die linke Seite von (I.3.15) gegen $\int_P \mathbf{q} \cdot \mathbf{w} dH^n$ für ein $\mathbf{w} \in L^\infty(B, H^n)^n$. Wegen $\nabla v_m \rightarrow \nabla v$ H^n -f.ü. in B ist $\mathbf{w} = \nabla v$. Also gilt (I.3.10) für alle $v \in C^{0,1}(B)$.

Sei nun speziell $v \in C_0^\infty(B)$. Dann folgt aus (I.3.10)

$$0 = \int_{\bar{\partial}B} v dQ = \int_B v b dH^n + \int_B \mathbf{q} \cdot \nabla v dH^n.$$

Also ist $b = \operatorname{div} \mathbf{q}$ im distributionellen Sinn.

Wegen Lemma I.3.5 folgt $\operatorname{div} \mathbf{q} \in L^1(B, H^n)$ und Gleichung (I.3.9). Hieraus und aus Gleichung (I.3.10) folgt Gleichung (I.3.8) für alle $v \in C_0^\infty(B)$ wegen

$$\operatorname{div}(v\mathbf{q}) = v \operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \nabla v.$$

Da $C_0^\infty(B)$ dicht ist in $C^{0,1}(B)$ beweist dies die Behauptung. \square

BEMERKUNG I.3.7 (Satz von Cauchy für glattes \mathbf{q}). Falls \mathbf{q} Lipschitz-stetig ist, folgt aus (I.3.8) mit $v = 1$ und (I.3.5) die Identität

$$Q(\bar{\partial}P) = \int_P \operatorname{div} \mathbf{q} dH^n = \int_{\partial^*P} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dH^{n-1} \quad \forall P \in \mathcal{P}.$$

Dies ist genau die Aussage des Satzes von Cauchy. Ein wesentliches Ergebnis wird sein, dass diese Aussage schon unter wesentlich schwächeren Annahmen an \mathbf{q} aus (I.3.8) folgt.

LEMMA I.3.8 (Radialsymmetrische Funktionen). Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} \varphi &\geq 0, \\ \varphi(x) &= \varphi(|x|), \\ \operatorname{supp} \varphi &\subset B(0, 1), \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(y_1, \dots, y_{n-1}, 0) dH^{n-1} = 1.$$

Dann gelten für $P \in \mathcal{P}$ und H^{n-1} -f.a. $x \in \bar{\partial}P$ die Beziehungen

$$(I.3.16) \quad \begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-n+1} \int_{\bar{\partial}P} \varphi(r^{-1}(x-y)) \, dH^{n-1}(y) &= 1, \\ \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-n} \int_P \nabla \varphi(r^{-1}(x-y)) \, dH^n(y) &= \mathbf{n}_P(x). \end{aligned}$$

BEWEIS. Wegen der Radialsymmetrie von φ gilt die vierte Eigenschaft von φ auch für alle Ebenen \mathcal{E} . Sei nun $P \in \mathcal{P}$ und

$$\widehat{\partial}P = \{x \in \bar{\partial}P : \bar{\partial}P \text{ ist in einer Umgebung von } x \text{ eine } C^1\text{-Mannigfaltigkeit}\}.$$

Wegen (I.3.4) ist $H^{n-1}(\partial P \setminus \widehat{\partial}P) = 0$. Sei $x_0 \in \widehat{\partial}P$ und T die Tangentialebene an $\widehat{\partial}P$ in x_0 . Dann ist mit $z = r^{-1}(x_0 - y)$

$$(I.3.17) \quad \begin{aligned} &r^{-n+1} \int_T \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) \, dH^{n-1}(y) \\ &= r^{-n+1} \int_{T \cap B(x_0, r)} \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) \, dH^{n-1}(y) \\ &= \int_{(x_0+T) \cap B(0,1)} \varphi(z) \, dH^{n-1}(z) \\ &= \int_{x_0+T} \varphi(z) \, dH^{n-1}(z) \\ &= 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &r^{-n+1} \int_{\bar{\partial}P} \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) \, dH^{n-1}(y) \\ &- r^{-n+1} \int_T \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) \, dH^{n-1}(y) \\ &= r^{-n+1} \int_{\bar{\partial}P \cap B(x_0, r)} [\varphi(r^{-1}(x_0 - y)) - \varphi(x_0)] \, dH^{n-1}(y) \\ &\quad - r^{-n+1} \int_{T \cap B(x_0, r)} [\varphi(r^{-1}(x_0 - y)) - \varphi(x_0)] \, dH^{n-1}(y) \\ &\quad + r^{-n+1} \varphi(x_0) \left\{ \int_{\bar{\partial}P \cap B(x_0, r)} dH^{n-1}(y) - \int_{T \cap B(x_0, r)} dH^{n-1}(y) \right\}. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Summanden in obiger Identität streben wegen der Stetigkeit von φ für $r \rightarrow 0$ gegen Null. Das gleiche gilt für den dritten Summanden, da $\bar{\partial}P$ in einer Umgebung von x_0 eine C^1 -Mannigfaltigkeit und T die Tangentialebene an $\bar{\partial}P$ in x_0 ist. Wegen (I.3.17) ist damit die erste Gleichung von (I.3.16) für alle $x_0 \in \widehat{\partial}P$ bewiesen.

Sei weiter $x_0 \in \widehat{\partial}P$. Wegen $\widehat{\partial}P \subset \partial^*P$ folgt aus der ersten Gleichung

von (I.3.16), dem Satz von Gauß und der Stetigkeit von \mathbf{n}_p in x_0

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_p(x_0) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-n+1} \int_{\bar{\partial}P} \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) \mathbf{n}_P(x_0) dH^{n-1}(y) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-n+1} \int_{\bar{\partial}P} \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) \mathbf{n}_P(y) dH^{n-1}(y) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-n+1} \int_P \nabla_y \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) dH^n(y) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-n} \int_P \nabla \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) dH^n(y).\end{aligned}$$

Hieraus folgt die zweite Gleichung von (I.3.16). \square

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den Satz von Cauchy beweisen.

SATZ I.3.9 (Satz von Cauchy). *Sei Q ein Cauchy-Fluss, der einer schwachen Erhaltungsgleichung genügt. Dann gibt es eine H^n -Nullmenge N^* von B , derart dass für jedes $S = (\hat{S}, \mathbf{n}) \in \mathcal{S}$ mit $H^{n-1}(\hat{S} \cap N^*) = 0$ die Identität*

$$Q(S) = \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dH^{n-1}$$

gilt. Dabei ist \mathbf{q} das Vektorfeld aus Satz I.3.6. Insbesondere ist H^{n-1} -f.ü. auf \hat{S}

$$(I.3.18) \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = q_S,$$

wobei q_S die Dichte aus Lemma I.3.2 ist.

BEWEIS. Sei N^* das Komplement des Durchschnittes der Menge der Lebesgue-Punkte von b^6 mit der Menge der Lebesgue-Punkte von \mathbf{q} . Dann ist $H^n(N^*) = 0$. Sei $S = (\hat{S}, \mathbf{n}) \in \mathcal{S}$ mit $H^{n-1}(\hat{S} \cap N^*) = 0$ und $P \in \mathcal{P}$ mit $\hat{S} \subset \bar{\partial}P$. Sei φ die Funktion aus Lemma I.3.8 und

$$v_{r,x_0}(y) = r^{-n+1} \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) \quad \forall x_0 \in \bar{\partial}P \setminus N^*.$$

Für $x_0 \in \bar{\partial}P \setminus N^*$ gilt

$$(I.3.19) \quad \begin{aligned}& \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-n+1} \int_P \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) b(y) dH^n(y) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} r \int_{(x_0+rP) \cap B(0,1)} \varphi(z) b(x_0 - rz) dH^n(z) \\ &= 0.\end{aligned}$$

⁶ x ist ein Lebesgue-Punkt von b , wenn gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |b(y) - b(x)| dy = 0.$$

Sei $q_{\partial P}$ die Dichte aus Lemma I.3.2. Weiter sei $x_0 \in \bar{\partial P} \setminus N^*$ ein Lebesgue-Punkt von $q_{\partial P}$. Dann ist

$$\begin{aligned} q_{\partial P}(x_0) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-n+1} \int_{\bar{\partial P}} \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) q_{\partial P}(y) dH^{n-1}(y) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\bar{\partial P}} v_{r,x_0}(y) q_{\partial P}(y) dH^{n-1}(y). \end{aligned}$$

Wegen Lemma I.3.2 ist

$$\int_{\bar{\partial P}} v_{r,x_0}(y) q_{\partial P}(y) dH^{n-1}(y) = \int_{\bar{\partial P}} v_{r,x_0}(y) dQ(y).$$

Wenden wir Satz I.3.6 auf die Funktion v_{r,x_0} an, so folgt hieraus und aus (I.3.19), sowie Lemma I.3.8

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\bar{\partial P}} v_{r,x_0}(y) dQ(y) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \left\{ \int_P v_{r,x_0}(y) b(y) dH^n(y) \right. \\ &\quad \left. + \int_P \mathbf{q}(y) \cdot \nabla v_{r,x_0}(y) dH^n(y) \right\} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-n} \int_P \mathbf{q}(y) \cdot \nabla \varphi(r^{-1}(x_0 - y)) dH^n(y) \\ &= \mathbf{q}(x_0) \cdot \mathbf{n}_P(x_0). \end{aligned}$$

Da auf \hat{S} die Funktionen $q_{\partial P}$ und q_S übereinstimmen, folgt hieraus (I.3.18).

Aus Lemma I.3.2 ergibt sich schließlich

$$Q(S) = \int_S q_{\partial P} dH^{n-1} = \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dH^{n-1}. \quad \square$$

BEMERKUNG I.3.10 (Drehmomenterhaltung). Falls Q ein Maß mit Werten im \mathbb{R}^n ist, ergibt der Satz von Cauchy angewandt auf die Komponenten von Q die Existenz einer Funktion $\underline{\mathbf{T}} : B \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$Q(S) = \int_S \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} dH^{n-1} \quad \forall S \in \mathcal{S}.$$

Ist insbesondere $n = 3$, wird häufig die Drehmomenterhaltung gefordert. Dies bedeutet

$$(I.3.20) \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-3} \int_{\bar{\partial P} \cap B(x_0, r)} (y - x_0) \times \mathbf{q}_{\partial P}(y) dH^2(y) = 0 \quad \forall P \in \mathcal{P}$$

für die Dichten $\mathbf{q}_{\partial P}$ aus Lemma I.3.2 und H^2 -f.a. $x_0 \in \bar{\partial P}$. Hieraus folgt dann die Symmetrie des Tensors $\underline{\mathbf{T}}$ H^2 -f.ü..

Um dies einzusehen, betrachte einen Lebesgue Punkt x_0 von $\underline{\mathbf{T}}$ und ein

$P \in \mathcal{P}$, so dass (I.3.20) gilt. Wegen Satz I.3.9 ist dann

$$\begin{aligned} & r^{-3} \int_{\bar{\partial}P \cap B(x_0, r)} (y - x_0) \times \mathbf{q}_{\partial P}(y) dH^2(y) \\ &= r^{-3} \int_{\bar{\partial}P \cap B(x_0, r)} (y - x_0) \times \underline{\mathbf{T}}(y) \mathbf{n}(y) dH^2(y) \\ &= r^{-3} \int_{\bar{\partial}P \cap B(x_0, r)} (y - x_0) \times \underline{\mathbf{T}}(x_0) \mathbf{n}(y) dH^2(y) \\ &\quad + r^{-3} \int_{\bar{\partial}P \cap B(x_0, r)} (y - x_0) \times [\underline{\mathbf{T}}(y) - \underline{\mathbf{T}}(x_0)] \mathbf{n}(y) dH^2(y). \end{aligned}$$

Da x_0 ein Lebesgue-Punkt von $\underline{\mathbf{T}}$ ist, ergibt sich wegen

$$\int_{\bar{\partial}P \cap B(x_0, r)} |y - x_0| dH^2(y) \leq r^3 H^2(S^2)$$

für den zweiten Summanden

$$\begin{aligned} & \left| r^{-3} \int_{\bar{\partial}P \cap B(x_0, r)} (y - x_0) \times [\underline{\mathbf{T}}(y) - \underline{\mathbf{T}}(x_0)] \mathbf{n}(y) dH^2(y) \right| \\ & \leq \sup_{y \in \bar{\partial}P \cap B(x_0, r)} |\underline{\mathbf{T}}(y) - \underline{\mathbf{T}}(x_0)| r^{-3} \int_{\bar{\partial}P \cap B(x_0, r)} |y - x_0| dH^2(y) \\ & \leq \sup_{y \in \bar{\partial}P \cap B(x_0, r)} |\underline{\mathbf{T}}(y) - \underline{\mathbf{T}}(x_0)| H^2(S^2) \\ & \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0. \end{aligned}$$

Wähle ein $i \in \{1, 2, 3\}$ und betrachte die i -te Komponente des ersten Summanden. Dann ergibt sich mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\begin{aligned} & r^{-3} \int_{\bar{\partial}P \cap B(x_0, r)} [(y - x_0) \times \underline{\mathbf{T}}(x_0) \mathbf{n}(y)]_i dH^2(y) \\ &= \sum_{\ell=1}^3 r^{-3} \int_{\bar{\partial}P \cap B(x_0, r)} \{ (y - x_0)_{i+1} \underline{\mathbf{T}}(x_0)_{i+2, \ell} \mathbf{n}(y)_\ell \\ &\quad - (y - x_0)_{i+2} \underline{\mathbf{T}}(x_0)_{i+1, \ell} \mathbf{n}(y)_\ell \} dH^2(y) \\ &= \sum_{\ell=1}^3 \left\{ \underline{\mathbf{T}}(x_0)_{i+2, \ell} r^{-3} \int_{P \cap B(x_0, r)} \frac{\partial}{\partial x_\ell} (y - x_0)_{i+1} dH^3(y) \right. \\ &\quad \left. - \underline{\mathbf{T}}(x_0)_{i+1, \ell} r^{-3} \int_{P \cap B(x_0, r)} \frac{\partial}{\partial x_\ell} (y - x_0)_{i+2} dH^3(y) \right\} \\ &= [\underline{\mathbf{T}}(x_0)_{i+2, i+1} - \underline{\mathbf{T}}(x_0)_{i+1, i+2}] r^{-3} H^3(P \cap B(x_0, r)) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} & r^{-3} \left| \int_{\bar{\partial}P \cap B(x_0, r)} [(y - x_0) \times \underline{\mathbf{T}}(x_0) \mathbf{n}(y)]_i dH^2(y) \right| \\ &= |\underline{\mathbf{T}}(x_0)_{i+2, i+1} - \underline{\mathbf{T}}(x_0)_{i+1, i+2}| H^3(B(x_0, 1) \cap rP). \end{aligned}$$

Dabei sind die Indizes $i + 1$ und $i + 2$ modulo 3 zu interpretieren. Aus diesen Abschätzungen und (I.3.20) folgt die Symmetrie von $\underline{\mathbf{T}}$ im Punkt x_0 .

I.4. Notationen und Hilfsergebnisse

Wir stellen zunächst einige Bezeichnungen zusammen, die wir im Folgenden immer wieder benutzen werden:

- Ω offene, beschränkte, zusammenhängende Menge in \mathbb{R}^n ,
 $n \in \{2, 3\}$;
- Γ Rand von Ω als Lipschitz-stetig vorausgesetzt;
- \mathbf{n} äußeres Einheitsnormalenfeld zu Ω ;
- p, q, r, \dots Skalare: Funktionen mit Werten in \mathbb{R} ;
- $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots$ Vektorfelder: Funktionen mit Werten in \mathbb{R}^n ;
- $\underline{\mathbf{S}}, \underline{\mathbf{T}}, \dots$ Tensoren: Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^{n \times n}$;
- $\underline{\mathbf{I}}$ Einheitstensor;
- ∇ Gradient;
- div Divergenz;
- $\operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_i}$;
- $\operatorname{div} \underline{\mathbf{T}} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \underline{\mathbf{T}}_{ij}}{\partial x_i} \right)_{1 \leq j \leq n}$;
- $\Delta = \operatorname{div} \nabla$ Laplace Operator;
- $\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ Deformationstensor;
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ Skalarprodukt;
- $\underline{\mathbf{S}} : \underline{\mathbf{T}}$ dyadisches Produkt (Skalarprodukt von Tensoren);
- $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = (\mathbf{u}_i \mathbf{v}_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ Tensorprodukt.

Aus der Produktregel für die Differentiation ergeben sich folgende Formeln, wobei $\underline{\mathbf{T}}$ als symmetrisch vorausgesetzt ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(p\mathbf{u}) &= \nabla p \cdot \mathbf{u} + p \operatorname{div} \mathbf{u}, \\ \operatorname{div}(\underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u}) &= (\operatorname{div} \underline{\mathbf{T}}) \cdot \mathbf{u} + \underline{\mathbf{T}} : \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}), \\ \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) &= (\operatorname{div} \mathbf{u})\mathbf{v} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Dementsprechend folgt aus dem Gaußschen Integralsatz

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{u} + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{u}, \\ \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} &= \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{u} + \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{D}(\mathbf{u}), \\ \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{v} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}.\end{aligned}$$

Wir werden im Folgenden immer wieder Sobolev-Räume und ihre Eigenschaften benutzen. Die wichtigsten Notationen und Ergebnisse stellen wir nun zusammen. Für eine ausführliche Darstellung verweisen wir auf [1] und [22]

Für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ und $\varphi, \psi \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, heißt ψ die α -te schwache Ableitung von φ , kurz $\psi = D^\alpha \varphi$, wenn für alle $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega} \psi \rho = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \varphi D^\alpha \rho.$$

Die *Sobolev-Räume* und ihre Normen sind dann definiert durch

$$W^{k,p}(\Omega) = \{ \varphi \in L^p(\Omega) : D^\alpha \varphi \in L^p(\Omega) \ \forall |\alpha| \leq k \},$$

$$|\varphi|_{k,p} = \left\{ \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha \varphi\|_p^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$\|\varphi\|_{k,p} = \left\{ \sum_{\ell=0}^k |\varphi|_{\ell,p}^p \right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \varphi\|_p^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega),$$

$$|\cdot|_k = |\cdot|_{k,2},$$

$$\|\cdot\|_k = \|\cdot\|_{k,2},$$

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{ \varphi \in W^{1,p}(\Omega) : \varphi = 0 \text{ auf } \Gamma \},$$

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega),$$

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ p \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} p = 0 \right\}.$$

Die Räume $W^{k,p}(\Omega)^n = W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $W^{k,p}(\Omega)^{n \times n} = W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n})$ werden mit der kanonischen Produktnorm versehen; analog die Räume $H^k(\Omega)^n$ und $H^k(\Omega)^{n \times n}$. Die Räume $W^{k,p}(\Omega)$ sind Banach-Räume; die Räume $H^k(\Omega)$ sind Hilbert-Räume. $C^\infty(\Omega)$ ist jeweils eine dichte Teilmenge. $W_0^{1,p}(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$ sind die Vervollständigungen von $C_0^\infty(\Omega)$ in der jeweiligen Norm.

Es gelten folgende *Einbettungssätze*

- für $n = 2$: $H^1(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^p(\Omega) \ \forall 1 \leq p < \infty$,

- für $n = 3$: $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \forall 1 \leq p \leq 6$;
die Einbettung ist kompakt für $1 \leq p < 6$.

Des weiteren gelten folgende Ungleichungen

$$\text{Friedrichsche Ungleichung} \quad \|\varphi\| \leq c_\Omega |\varphi|_1 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

$$\text{Poincarésche Ungleichung} \quad \|\varphi\| \leq c'_\Omega |\varphi|_1 \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega).$$

Die Konstanten c_Ω und c'_Ω hängen jeweils nur vom Durchmesser von Ω ab.

$H^{-1}(\Omega)$ ist der Dualraum von $H_0^1(\Omega)$; die entsprechende duale Paarung wird mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet. Dabei wird $L^2(\Omega)$ mit seinem Dualraum identifiziert. Daher ist

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

und

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_\Omega \varphi \psi \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega), \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Die Spurbildung $u \mapsto \gamma u = u|_\Gamma$ ist ein stetiger linearer Operator von $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Gamma)$. Das Bild dieses Operators wird mit $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ bezeichnet und mit der Graphennorm versehen. Diese wird mit $\|\cdot\|_{\frac{1}{2},\Gamma}$ bezeichnet.

Es ist

$$\|\psi\|_{\frac{1}{2},\Gamma} = \inf \{ \|\varphi\|_1 : \varphi \in H^1(\Omega), \gamma\varphi = \psi \}.$$

$H^{-1}(\Omega)^n$, $H^{-1}(\Omega)^{n \times n}$, $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$, $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^{n \times n}$ sind die kanonischen Produkträume und werden mit den entsprechenden Produktnormen versehen.

Abschließend stellen wir noch einige Bezeichnungen und Eigenschaften für Finite Element Räume zusammen, die wir im Folgenden häufig nutzen werden. Für Details verweisen wir auf [22, §§II.1, II.2].

\mathcal{T} bezeichnet stets eine Unterteilung von Ω mit folgenden Eigenschaften:

- Jedes $K \in \mathcal{T}$ ist ein Dreieck oder Parallelogramm, falls $n = 2$, oder ein Tetraeder oder Parallelepipid, falls $n = 3$ (*Affine Äquivalenz*).
- Je zwei Elemente von \mathcal{T} sind entweder disjunkt oder haben einen Eckpunkt oder eine ganze Kante oder – falls $n = 3$ ist – eine ganze Seitenfläche gemeinsam (*Zulässigkeit*).
- Das Verhältnis $\frac{h_K}{\rho_K}$ ist unabhängig von $K \in \mathcal{T}$ und möglichen Verfeinerungen von \mathcal{T} durch eine Konstante $C_{\mathcal{T}}$ nach oben beschränkt. Dabei ist h_K der Durchmesser von K und ρ_K der Durchmesser des größten in K eingeschriebenen Balles (*Regularität*).

Die affine Äquivalenz bedeutet, dass jedes Element K das Bild des Referenz-Simplex $\widehat{K} = \widehat{K}_S = \{\widehat{x} \in \mathbb{R}^d : x_1 + \dots + x_n \leq 1, x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n\}$ oder Referenz-Würfels $\widehat{K} = \widehat{K}_W = [0, 1]^n$ unter einer *affinen Transformation* F_K ist.

Wir bezeichnen mit \mathcal{N} die Menge aller Eckpunkte und mit \mathcal{E} die Menge aller Kanten ($n = 2$) bzw. Seitenflächen ($n = 3$) aller $K \in \mathcal{T}$. \mathcal{N}_Ω und \mathcal{E}_Ω sind die Mengen aller Eckpunkte bzw. Kanten oder Seitenflächen im Innern von Ω . Für ein Element $K \in \mathcal{T}$ bezeichnen schließlich \mathcal{N}_K und \mathcal{E}_K die Menge aller Eckpunkte von K und die Menge aller Kanten bzw. Seitenflächen von K .

Jede Kante ($n = 2$) bzw. Seitenfläche ($n = 3$) $E \in \mathcal{E}_\Omega$ im Innern von Ω ist die gemeinsame Grenzfläche von genau zwei Elementen, die wir mit K_{E1} und K_{E2} bezeichnen. Jedem $E \in \mathcal{E}_\Omega$ ordnen wir einen Einheitsvektor \mathbf{n}_E zu, der senkrecht auf E steht und von K_{E1} nach K_{E2} zeigt. Für jede stückweise stetige Funktionen φ bezeichnen wir mit $\mathbb{J}_E(\varphi)$ den Sprung von φ über E in Richtung \mathbf{n}_E , d.h.

$$\mathbb{J}_E(\varphi)(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(x + t\mathbf{n}_E) - \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(x - t\mathbf{n}_E) \quad \forall x \in E.$$

Der Sprung $\mathbb{J}_E(\varphi)$ hängt von der Orientierung von \mathbf{n}_E ab. Größen der Form $\mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot \nabla \varphi)$ sind aber von der Orientierung von \mathbf{n}_E unabhängig. Für $E \in \mathcal{E}$ bezeichnet h_E den Durchmesser von E . Wegen der Regularitätsbedingung können Größen der Form $\frac{h_K}{h_{K'}}$ und $\frac{h_K}{h_E}$ mit $K \cap K' \neq \emptyset$ und $E \cap K \neq \emptyset$ nach oben und unten durch die Konstante $C_{\mathcal{T}}$ abgeschätzt werden.

Schließlich benötigen wir verschiedene Umgebungen von Elementeckpunkten $z \in \mathcal{N}$, Kanten bzw. Seitenflächen $E \in \mathcal{E}_\Omega$ und Elementen $K \in \mathcal{T}$ (vgl. Abbildung I.4.1):

$$\begin{aligned} \omega_K &= \bigcup_{K \cap K' \in \mathcal{E}} K', & \tilde{\omega}_K &= \bigcup_{K \cap K' \neq \emptyset} K', \\ \omega_E &= \bigcup_{E \subset \partial K'} K', & \tilde{\omega}_E &= \bigcup_{E \cap K' \neq \emptyset} K', \\ \omega_z &= \bigcup_{z \in K'} K', \end{aligned}$$

Dabei bedeutet $K \cap K' \in \mathcal{E}$, dass K und K' eine Kante bzw. Seitenfläche gemeinsam haben.

Mit der Abkürzung $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$ definieren wir für $k \geq 0$ die Polynomräume

$$\begin{aligned} Q_k &= \text{span}\{x^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^d, \max_{1 \leq i \leq d} \alpha_i \leq k\} \\ \mathbb{P}_k &= \text{span}\{x^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^d, \alpha_1 + \dots + \alpha_d \leq k\} \end{aligned}$$

und

$$\widehat{R}_k = R_k(\widehat{K}) = \begin{cases} Q_k & \text{falls } \widehat{K} \text{ der Referenz-Würfel,} \\ \mathbb{P}_k & \text{falls } \widehat{K} \text{ der Referenz-Simplex} \end{cases}$$

und setzen

$$R_k = R_k(K) = \left\{ \widehat{p} \circ F_K^{-1} : \widehat{p} \in \widehat{R}_k \right\}.$$

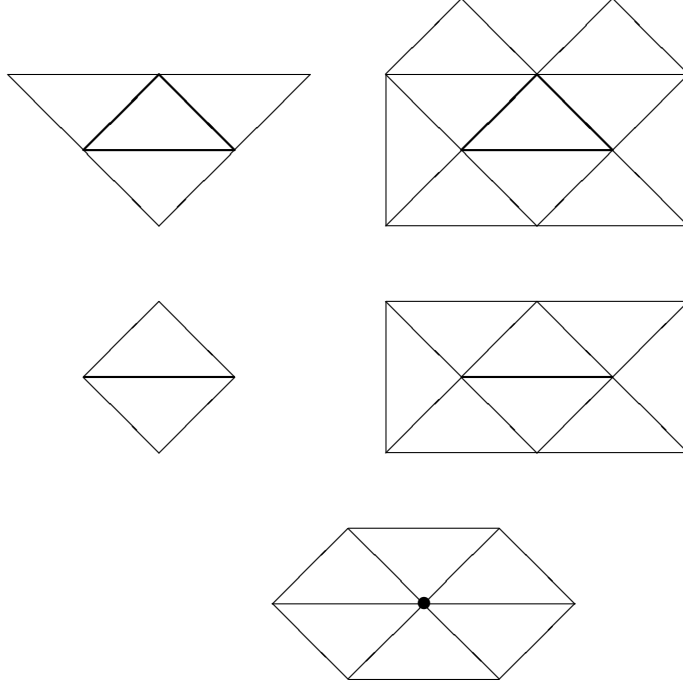


ABBILDUNG I.4.1. Gebiete ω_K , $\tilde{\omega}_K$, ω_E , $\tilde{\omega}_E$ und ω_z

Für die Finite Element Räume verwenden wir folgende Bezeichnungen

$$S^{k,-1}(\mathcal{T}) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \varphi|_K \in R_k(K) \forall K \in \mathcal{T}\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$S^{k,0}(\mathcal{T}) = S^{k,-1}(\mathcal{T}) \cap C(\bar{\Omega}), \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

$$S_0^{k,0}(\mathcal{T}) = S_{\mathcal{T}}^{k,0} \cap H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in S^{k,0}(\mathcal{T}) : \varphi = 0 \text{ auf } \Gamma\}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Für $z \in \mathcal{N}$ bezeichnet $\lambda_z \in S^{1,0}(\mathcal{T})$ die *nodale Basisfunktion*, die durch die Bedingung $\lambda_z(z') = \delta_{zz'}$ für alle $z' \in \mathcal{N}$ eindeutig bestimmt ist. Es ist $\omega_z = \text{supp } \lambda_z$.

Mit $h_{\mathcal{T}} = \max_{K \in \mathcal{T}} h_K$ gelten folgende Approximationseigenschaften für $k \in \mathbb{N}$, $j \in \{0, 1\}$, $\varphi \in H^{k+1}(\Omega)$ und $\psi \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ [22, Satz II.2.8]

$$(I.4.1) \quad \begin{aligned} \inf_{\varphi_{\mathcal{T}} \in S^{k,-1}(\mathcal{T})} \|\varphi - \varphi_{\mathcal{T}}\| &\leq ch_{\mathcal{T}}^{k+1} |\varphi|_{k+1}, \\ \inf_{\varphi_{\mathcal{T}} \in S^{k,0}(\mathcal{T})} |\varphi - \varphi_{\mathcal{T}}|_j &\leq ch_{\mathcal{T}}^{k+1-j} |\varphi|_{k+1}, \\ \inf_{\psi_{\mathcal{T}} \in S_0^{k,0}(\mathcal{T})} |\psi - \psi_{\mathcal{T}}|_j &\leq ch_{\mathcal{T}}^{k+1-j} |\psi|_{k+1}. \end{aligned}$$

Für alle $k \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$, $0 \leq \ell \leq m-1$, $u_{\mathcal{T}} \in S^{k,0}(\mathcal{T})$ und $K \in \mathcal{T}$ gelten zudem die inversen Abschätzungen [22, Satz II.2.9]

$$(I.4.2) \quad |u_{\mathcal{T}}|_{m;K} \leq c \frac{h_K^\ell h_{\hat{K}}^m}{\rho_K^m \rho_{\hat{K}}^\ell} |u_{\mathcal{T}}|_{\ell;K}.$$

Die Konstante c hängt nur von k , m und ℓ ab.

Im Folgenden werden wir häufig den Quasi-Interpolationsoperator aus [22, Definition III.3.1] benutzen. Im Gegensatz zum nodalen Interpolationsoperator ist er auch für L^1 -Funktionen definiert und erlaubt lokale, elementweise Fehlerabschätzungen. Für seine Definition bezeichnen wir für $z \in \mathcal{N}$ mit

$$\bar{\varphi}_z = \frac{1}{|\omega_z|} \int_{\omega_z} \varphi$$

den Mittelwert von φ auf ω_z , wobei $|\omega_z|$ das n -dimensionale Lebesgue-Maß von ω_z ist. Dann ist der Quasi-Interpolationsoperator $\mathcal{J}_{\mathcal{T}} : L^1(\Omega) \rightarrow S_0^{1,0}(\mathcal{T})$ definiert durch

$$\mathcal{J}_{\mathcal{T}}\varphi = \sum_{z \in \mathcal{N}_{\Omega}} \lambda_z \bar{\varphi}_z.$$

Für jede Funktion $\varphi \in H^1(\Omega)$ und jedes Element $K \in \mathcal{T}_{\mathcal{T}}$ gelten die folgenden lokalen Fehlerabschätzungen [22, Satz III.3.4]

$$(I.4.3) \quad \begin{aligned} \|\varphi - \mathcal{J}_{\mathcal{T}}\varphi\|_K &\leq c_1 h_K \|\varphi\|_{1;\tilde{\omega}_K} \\ \|\varphi - \mathcal{J}_{\mathcal{T}}\varphi\|_{\partial K} &\leq c_2 h_K^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{1;\tilde{\omega}_K}. \end{aligned}$$

Die Konstanten c_1 und c_2 hängen nur von der Konstanten $C_{\mathcal{T}}$ aus der Regularitätsbedingung ab.

Schließlich benötigen wir noch die *Blasenfunktionen* aus [22, Definition III.3.5]. Sie sind für jedes Element $K \in \mathcal{T}$ und jede Kante ($d = 2$) bzw. Seitenfläche ($d = 3$) $E \in \mathcal{E}$ definiert durch

$$\psi_K = \alpha_K \prod_{z \in \mathcal{N}_K} \lambda_z, \quad \psi_E = \alpha_E \prod_{z \in \mathcal{N}_E} \lambda_z$$

mit

$$\alpha_K = \begin{cases} (d+1)^{d+1} & \text{falls } K \text{ ein } d\text{-Simplex,} \\ (2^d)^{2^d} & \text{falls } K \text{ ein } d\text{-Parallelepipid,} \end{cases}$$

$$\alpha_E = \begin{cases} 2^2 & \text{falls } E \text{ eine Kante,} \\ d^d & \text{falls } E \text{ ein } (d-1)\text{-Simplex,} \\ (2^{d-1})^{2^{d-1}} & \text{falls } E \text{ ein } (d-1)\text{-Parallelepipid,} \end{cases}$$

Für alle $K \in \mathcal{T}$ und alle $E \in \mathcal{E}$ gilt [22, Lemma III.3.6]

$$\begin{aligned} \psi_K &\in C_0(K), & \psi_E &\in C_0(\omega_E), \\ \psi_K &\in R_{d+1}(K), & \psi_E|_K &\in R_d(K), \quad \forall K \subset \omega_E, \\ \psi_K &\geq 0 \quad \text{auf } K, & \psi_E &\geq 0 \quad \text{auf } \omega_E, \\ \psi_K &= 0 \quad \text{auf } \partial K, & \psi_E &= 0 \quad \text{auf } \partial\omega_E, \\ \max_{x \in K} \psi_K(x) &= 1, & \max_{x \in E} \psi_E(x) &= 1. \end{aligned}$$

Zudem gelten für alle $k \in \mathbb{N}$, alle $v \in R_k(K)$ und alle $\sigma \in R_k(E)$ die folgenden Abschätzungen [22, Lemma III.3.7]

$$\begin{aligned}
 (I.4.4) \quad & c_3 \|v\|_K \leq \left\{ \int_K \psi_K v^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \|v\|_K, \\
 & c_4 h_K^{-1} \|\psi_K v\|_K \leq |\psi_K v|_{1;K} \leq c_5 h_K^{-1} \|\psi_K v\|_K, \\
 & c_6 \|\sigma\|_E \leq \left\{ \int_E \psi_E \sigma^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \|\sigma\|_E, \\
 & c_7 h_E^{-1} \|\psi_E \sigma\|_{\omega_E} \leq |\psi_E \sigma|_{1;\omega_E} \leq c_8 h_E^{-1} \|\psi_E \sigma\|_{\omega_E}, \\
 & \|\psi_E \sigma\|_{\omega_E} \leq c_9 h_E^{\frac{1}{2}} \|\sigma\|_E.
 \end{aligned}$$

Dabei hängen die Konstanten c_3, \dots, c_9 nur von k und $C_{\mathcal{T}}$ ab.

KAPITEL II

Stokes Gleichungen

II.1. Heuristische Vorüberlegungen

Wir betrachten die Stokes Gleichungen (I.2.15) (S. 13) mit homogenen Dirichlet Randbedingungen (I.2.16) (S. 13) in einem beschränkten, zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$, mit Lipschitz Rand Γ

$$(II.1.1) \quad \begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Wir stellen uns die Frage nach einer geeigneten schwachen Formulierung von (II.1.1) und deren eindeutiger Lösbarkeit. Zunächst ist offensichtlich, dass der Druck p höchstens bis auf eine additive Konstante eindeutig sein kann. Diese Konstante wollen wir durch die Forderung

$$\int_{\Omega} p = 0$$

festlegen.

Offensichtlich ist die Massengleichung, d.h. die zweite Gleichung in (II.1.1), äquivalent zu

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega).$$

Da wegen des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n$$

gilt, ist die Massengleichung sogar äquivalent zu

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega).$$

Multipliziere nun die Impulsgleichung, d.h. die erste Gleichung in (II.1.1), mit $\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)^n$, integriere über Ω und wende den Gaußschen Integralsatz an. Dann folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} &= \int_{\Omega} \{-\Delta \mathbf{u} + \nabla p\} \cdot \mathbf{v} \\ &= \int_{\Omega} \{\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - p \operatorname{div} \mathbf{v}\}. \end{aligned}$$

Also ist jede klassische Lösung $\mathbf{u} \in C^2(\Omega)^n \cap C_0(\Omega)^n$, $p \in C^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ von (II.1.1) eine Lösung des folgenden Variationsproblems:

Finde $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n$, $p \in L_0^2(\Omega)$, so dass

$$(II.1.2) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

Umgekehrt ist jede hinreichend glatte Lösung \mathbf{u} , p von (II.1.2) auch eine klassische Lösung von (II.1.1). Mithin ist (II.1.2) ein guter Kandidat für eine schwache Formulierung der Stokes Gleichungen (II.1.1). Entsprechend stellt sich die Frage, ob (II.1.2) eindeutig lösbar ist.

Da $\operatorname{div} \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^n, L_0^2(\Omega))$ ist, ist

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ f.ü. in } \Omega \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n : \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \right\} \end{aligned}$$

ein abgeschlossener Unterraum von $H_0^1(\Omega)^n$ und damit ein Banach-Raum mit der Norm $\|\cdot\|_1$. Offensichtlich gilt für jede Lösung \mathbf{u} , p von (II.1.2) $\mathbf{u} \in V$. Betrachte daher das Variationsproblem:

Finde $\mathbf{u} \in V$, so dass

$$(II.1.3) \quad \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Dann ist für jede Lösung \mathbf{u} , p von (II.1.2) \mathbf{u} auch eine Lösung von (II.1.3). Allerdings ist in (II.1.3) der Druck p eliminiert, und es stellen sich zwei Fragen:

- Besitzt (II.1.3) eine eindeutige Lösung?
- Falls \mathbf{u} eine Lösung von (II.1.3) ist, gibt es dann ein eindeutiges $p \in L_0^2(\Omega)$, so dass \mathbf{u} , p eine Lösung von (II.1.2) ist?

Die erste Frage können wir leicht positiv beantworten. Aus der Friedrichschen Ungleichung folgt nämlich für alle $\mathbf{u} \in V \subset H_0^1(\Omega)^n$

$$\|\mathbf{u}\|_1 = \left\{ \|\mathbf{u}\|^2 + |\mathbf{u}|_1^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ 1 + c_{\Omega}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} |\mathbf{u}|_1.$$

Daher ist die Bilinearform $\mathbf{u}, \mathbf{v} \mapsto \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}$ auf V stetig und koerziv, so dass aus dem Satz von Lax-Milgram [22, Satz I.1.1] sofort die eindeutige Lösbarkeit von (II.1.3) folgt.

Die zweite Frage lässt sich aber nicht so leicht beantworten. Dies wird im wesentlichen der Inhalt der folgenden beiden Abschnitte sein.

Unsere bisherigen Überlegungen zeigen, dass das Problem (II.1.3) durchaus ein Kandidat für eine schwache Formulierung der Stokes Gleichungen (II.1.1) ist, sofern wir uns nur für die Geschwindigkeit \mathbf{u} interessieren. Wir könnten daher versuchen, für die numerische Lösung

die Schwierigkeit mit dem Druck zu umgehen, indem wir direkt das Problem (II.1.3) durch die Konstruktion von Finite Element Räumen $V_{\mathcal{T}} \subset V$ approximieren. Das folgende Beispiel zeigt jedoch, dass dies nicht so einfach ist.

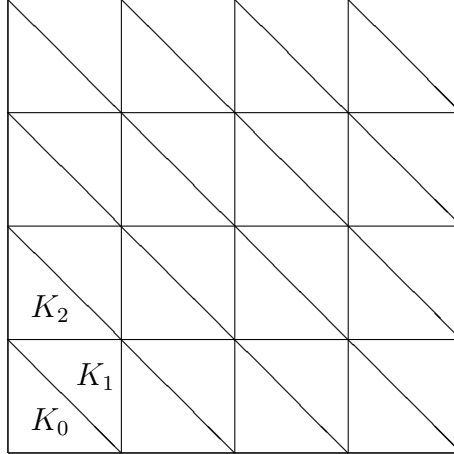


ABBILDUNG II.1.1. Triangulierung des Einheitsquadrates

Betrachte das Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1)^2$. Unterteile Ω in Quadrate der Kantenlänge $h = \frac{1}{N+1}$, $N \in \mathbb{N}^*$, und jedes Quadrat durch die Diagonale von der linken oberen in die rechte untere Ecke in zwei Dreiecke (vgl. Abbildung II.1.1). Setze $V_{\mathcal{T}} = [S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^2 \cap V$, d.h. betrachte divergenzfreie, stetige, lineare Dreieckselemente. Sei $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}$ und $K_0 \in \mathcal{T}$ das Dreieck, das die linke untere Ecke von Ω als Eckpunkt hat. Da alle Eckpunkte von K_0 auf Γ liegen, ist $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} = 0$ auf K_0 . Betrachte nun das Dreieck K_1 das mit K_0 die Hypotenuse gemeinsam hat. Sei z_1 der Eckpunkt von K_1 , der in Ω liegt. Aus $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} = 0$ auf Γ , $\operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} = 0$ in K_1 und dem Gaußschen Integralsatz folgt durch Anwenden der Trapezregel auf die Randintegrale

$$0 = \int_{K_1} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} = \int_{\partial K_1} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n}_{K_1} = \frac{h}{2} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}(z_1) \cdot \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}.$$

Dabei sind \mathbf{n}_{K_1} die äußere Normale an K_1 und $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ die kanonischen Basisvektoren des \mathbb{R}^2 . Betrachte als nächstes das Dreieck K_2 , das an den linken Rand von Ω und an K_1 grenzt. Dann folgt mit dem gleichen Argument wie oben aus der soeben hergeleiteten Beziehung

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{K_2} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} = \int_{\partial K_2} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n}_{K_2} \\ &= \frac{h}{2} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}(z_1) \cdot \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\} - \frac{h}{2} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}(z_1) \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= -\frac{h}{2} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}(z_1) \cdot \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Wegen $\mathbf{v}_{\mathcal{T}}(z_1) \cdot \mathbf{e}_1 = -\mathbf{v}_{\mathcal{T}}(z_1) \cdot \mathbf{e}_2$ folgt insgesamt $\mathbf{v}_{\mathcal{T}}(z_1) = 0$. Also ist $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} = 0$ auf $K_0 \cup K_1 \cup K_2$. Indem wir obige Argumentation sukzessive fortführen, folgt zunächst, dass $\mathbf{v}_{\mathcal{T}}$ auf allen Quadraten, die an den linken Rand von Ω grenzen, verschwindet, und danach, dass $\mathbf{v}_{\mathcal{T}}$ in ganz Ω verschwindet. Also ist $V_{\mathcal{T}} = \{0\}$ und damit gänzlich ungeeignet für eine Approximation von V .

Wenn wir einmal annehmen, dass wir die Schwierigkeiten mit dem Druck in Problem (2) in den Griff bekommen, können wir versuchen, die soeben gefundene Schwierigkeit zu umschiffen, indem wir direkt Problem (II.1.2) diskretisieren. Wir würden dann zwei Finite Element Räume $X_{\mathcal{T}} \subset H_0^1(\Omega)^n$ und $M_{\mathcal{T}} \subset L_0^2(\Omega)$ wählen und (II.1.2) approximieren durch:

Finde $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$, $p_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}$, so dass

$$(II.1.4) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} : \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \\ \int_{\Omega} q_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} &= 0 \quad \forall q_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Aber auch dieser Ansatz stößt auf Schwierigkeiten. Betrachte dazu wieder obige Triangulierung des Einheitsquadrates und wähle

$$X_{\mathcal{T}} = [S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^2, \quad M_{\mathcal{T}} = S^{0,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega).$$

Da für jede Lösung von (II.1.2) $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^2$, $p \in L_0^2(\Omega)$ gilt, ist diese Wahl bei naiver Vorgehensweise durchaus naheliegend. Indem wir in (II.1.4) für $q_{\mathcal{T}}$ die Funktionen $\chi_K - \frac{|K|}{|\Omega|}$, $K \in \mathcal{T}$, einsetzen und

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n} = 0$$

ausnutzen, erhalten wir

$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}.$$

Da aber $\operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in S^{0,-1}(\mathcal{T})$ ist, folgt $\operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = 0$. Also gilt für jede Lösung von (II.1.4) $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in [S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^2 \cap V$ und nach dem zuvor Gezeigten $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} = 0$. Also ist auch (II.1.4) mit obiger Wahl der Räume $X_{\mathcal{T}}$ und $M_{\mathcal{T}}$ für die Approximation von (II.1.2) denkbar ungeeignet.

In den Paragraphen II.4 – II.6 werden wir Methoden entwickeln, die eine effiziente Finite Element Approximation erlauben und die die oben geschilderten Klippen umschiffen.

II.2. Ein abstraktes Variationsproblem

Im Folgenden bezeichnen $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(M, \|\cdot\|_M)$ zwei Hilbert-Räume, X^* und M^* die zugehörigen Dualräume mit den Normen $\|\cdot\|_{X^*}$

$= \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{R})}$ und $\|\cdot\|_{M^*} = \|\cdot\|_{\mathcal{L}(M,\mathbb{R})}$, sowie $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ die entsprechenden dualen Paarungen. Wir betrachten zwei stetige Bilinearformen

$$a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad b : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

mit den zugehörigen Normen

$$\|a\| = \|a\|_{\mathcal{L}^2(X,\mathbb{R})} = \sup_{u,v \in X \setminus \{0\}} \frac{a(u,v)}{\|u\|_X \|v\|_X},$$

$$\|b\| = \|b\|_{\mathcal{L}^2(X \times M,\mathbb{R})} = \sup_{u \in X \setminus \{0\}, \lambda \in M \setminus \{0\}} \frac{b(u,\lambda)}{\|u\|_X \|\lambda\|_M}.$$

Wir wollen die Lösbarkeit des folgenden abstrakten Variationsproblems untersuchen:

Finde zu gegebenem $\ell \in X^*$ und $\chi \in M^*$ ein Paar $(u, \lambda) \in X \times M$ mit

$$(II.2.1) \quad \begin{aligned} a(u,v) + b(v,\lambda) &= \langle \ell, v \rangle_X \quad \forall v \in X \\ b(u,\mu) &= \langle \chi, \mu \rangle_M \quad \forall \mu \in M. \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung definieren wir Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, X^*)$, $B \in \mathcal{L}(X, M^*)$ und $B^* \in \mathcal{L}(M, X^*)$ durch

$$\begin{aligned} \langle Au, v \rangle_X &= a(u,v) \quad \forall u, v \in X, \\ \langle Bu, \lambda \rangle_M &= b(u,\lambda) \quad \forall u \in X, \lambda \in M, \\ \langle B^*\lambda, v \rangle_X &= b(v,\lambda) \quad \forall v \in X, \lambda \in M. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist B^* der duale Operator zu B .

Mit diesen Notationen ist Problem (II.2.1) äquivalent zu:

Finde $(u, \lambda) \in X \times M$ mit

$$\begin{aligned} Au + B^*\lambda &= \ell \\ Bu &= \chi. \end{aligned}$$

Zu gegebenem $\chi \in M^*$ betrachten wir den affinen Raum

$$\begin{aligned} V(\chi) &= \{u \in X : Bu = \chi\} \\ &= \{u \in X : b(u,\mu) = \langle \chi, \mu \rangle_M \quad \forall \mu \in M\} \end{aligned}$$

und setzen

$$V = V(0).$$

Die Polare V° von V ist definiert durch

$$V^\circ = \{g \in X^* : \langle g, v \rangle_X = 0 \quad \forall v \in V\}.$$

Bezeichnet $(\cdot, \cdot)_X$ das Skalarprodukt von X , so ist das orthogonale Komplement V^\perp von V wie üblich definiert durch

$$V^\perp = \{u \in X : (u, v)_X = 0 \quad \forall v \in V\}.$$

Schließlich definieren wir den Operator $\pi \in \mathcal{L}(X^*, V^*)$ durch

$$\langle \pi f, v \rangle_X = \langle f, v \rangle_X \quad \forall v \in V.$$

Mit diesen Notationen ordnen wir Problem (II.2.1) ein anderes Problem zu:

Finde $u \in V(\chi)$ mit

$$(II.2.2) \quad a(u, v) = \langle \ell, v \rangle_X \quad \forall v \in V.$$

In Operatorschreibweise lautet Problem (II.2.2):

Finde $u \in V(\chi)$ mit

$$\pi Au = \pi \ell.$$

Offensichtlich ist jede Lösung von (II.2.1) auch eine Lösung von (II.2.2). Wir suchen notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass auch die Umkehrung gilt.

SATZ II.2.1 (inf-sup Bedingung). *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *Es gibt eine Konstante $\beta > 0$ mit*

$$\inf_{\lambda \in M \setminus \{0\}} \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{b(u, \lambda)}{\|u\|_X \|\lambda\|_M} \geq \beta.$$

(2) *Der Operator B^* ist ein Isomorphismus von M auf V° und*

$$\|B^* \lambda\|_{X^*} \geq \beta \|\lambda\|_M \quad \forall \lambda \in M.$$

(3) *Der Operator B ist ein Isomorphismus von V^\perp auf M^* und*

$$\|Bv\|_{M^*} \geq \beta \|v\|_X \quad \forall v \in V^\perp.$$

BEWEIS. „(1) \Rightarrow (2)“: Wegen der Definition von B^* und der Dualnorm gilt für jedes $\lambda \in M$

$$(II.2.3) \quad \|B^* \lambda\|_{X^*} = \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\langle B^* \lambda, v \rangle_X}{\|v\|_X} = \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{b(v, \lambda)}{\|v\|_X}.$$

Aus (1) und (II.2.3) folgt $\|B^* \lambda\|_{X^*} \geq \beta \|\lambda\|_M$ für jedes $\lambda \in M$. Also ist B^* injektiv und $R(B^*) = B^*(M)$ abgeschlossen in M^* . Aus dem closed range theorem [23, §VIII.5] folgt $R(B^*) = (\ker B)^\circ = V^\circ$.

„(2) \Rightarrow (1)“: Ist B^* ein Isomorphismus von M auf V° gilt $\|\lambda\|_M \leq \|(B^*)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V^\circ, M)} \|B^* \lambda\|_{X^*}$ für alle $\lambda \in M$. Hieraus und (II.2.3) folgt (1) mit $\beta = \|(B^*)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V^\circ, M)}^{-1}$.

„(2) \Leftrightarrow (3)“: Wir zeigen zunächst, dass V° und $(V^\perp)^*$ isometrisch äquivalent sind. Dazu bezeichnen wir mit v^\perp die orthogonale Projektion von $v \in X$ auf V^\perp . Jedem $g \in (V^\perp)^*$ ordnen wir ein Element $\tilde{g} \in X^*$ durch

die Vorschrift $\langle \tilde{g}, v \rangle_X = \langle g, v^\perp \rangle_X$ zu. Offensichtlich ist $\tilde{g} \in V^\circ$ und

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}\|_{X^*} &= \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\langle \tilde{g}, v \rangle_X}{\|v\|_X} = \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\langle g, v^\perp \rangle_X}{\|v\|_X} \\ &\leq \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \|g\|_{(V^\perp)^*} \frac{\|v^\perp\|_X}{\|v\|_X} \\ &\leq \|g\|_{(V^\perp)^*} \end{aligned}$$

sowie wegen $v^\perp = v$ für alle $v \in V^\perp$

$$\begin{aligned} \|g\|_{(V^\perp)^*} &= \sup_{v \in V^\perp \setminus \{0\}} \frac{\langle g, v \rangle_X}{\|v\|_X} = \sup_{v \in V^\perp \setminus \{0\}} \frac{\langle g, v^\perp \rangle_X}{\|v\|_X} \\ &= \sup_{v \in V^\perp \setminus \{0\}} \frac{\langle \tilde{g}, v \rangle_X}{\|v\|_X} \\ &\leq \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\langle \tilde{g}, v \rangle_X}{\|v\|_X} \\ &= \|\tilde{g}\|_{X^*}. \end{aligned}$$

Wegen der isometrischen Äquivalenz von V° und $(V^\perp)^*$ ist B ein Isomorphismus von V^\perp auf M^* mit $\|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(M^*, V^\perp)} \leq \frac{1}{\beta}$ genau dann, wenn B^* ein Isomorphismus von M auf $(V^\perp)^* = V^\circ$ ist mit $\|B^{*-1}\|_{\mathcal{L}(V^\circ, M)} \leq \frac{1}{\beta}$. Dies beweist die Äquivalenz von (2) und (3). \square

Die inf-sup Bedingung aus Satz II.2.1 (1) wurde unabhängig voneinander von I. Babuška und F. Brezzi um 1973 eingeführt. Sie firmiert in der Literatur unter den Bezeichnungen *Brezzi*, *Babuška-Brezzi*, *Babuška-Brezzi-Ladyzhenskaya* oder *inf-sup Bedingung*.

SATZ II.2.2 (Eindeutige Lösbarkeit des Variationsproblems). *Problem (II.2.1) besitzt genau dann zu jedem Paar $(\ell, \chi) \in X^* \times M^*$ eine eindeutige Lösung $(u, \lambda) \in X \times M$ mit*

$$\|u\|_X + \|\lambda\|_M \leq c\{\|\ell\|_{X^*} + \|\chi\|_{M^*}\},$$

wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind

- (1) πA ist ein Isomorphismus von V auf V^* .
- (2) b erfüllt die inf-sup Bedingung aus Satz II.2.1 (1).

BEWEIS. „ \Leftarrow “: Wegen Satz II.2.1 und (2) existiert genau ein $u_0 \in V^\perp$ mit $Bu_0 = \chi$ und es ist

$$\|u_0\|_X \leq \frac{1}{\beta} \|\chi\|_{M^*}.$$

Wegen (1) gibt es genau ein $w \in V$ mit $\pi Aw = \pi(\ell - Au_0)$ und es ist

$$\|w\|_X \leq c_0 \|\pi(\ell - Au_0)\|_{V^*} \leq c_0 \|\ell - Au_0\|_{X^*}$$

mit $c_0 = \|(\pi A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V^*, V)}$. Setze $u = u_0 + w$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|u\|_X &\leq \frac{1}{\beta} \|\chi\|_{M^*} + c_0 \|\ell\|_{X^*} + c_0 \|a\| \|u_0\|_X \\ &\leq \frac{1}{\beta} [1 + c_0 \|a\|] \|\chi\|_{M^*} + c_0 \|\ell\|_{X^*} \end{aligned}$$

und $\pi(\ell - Au) = 0$ bzw. äquivalent $\ell - Au \in V^\circ$.

Wegen Satz II.2.1 und (2) gibt es daher genau ein $\lambda \in M$ mit $B^*\lambda = \ell - Au$ und

$$\begin{aligned} \|\lambda\|_M &\leq \frac{1}{\beta} \|\ell - Au\|_{X^*} \\ &\leq \frac{1}{\beta} [1 + c_0 \|a\|] \|\ell\|_{X^*} + \frac{1}{\beta^2} \|a\| [1 + c_0 \|a\|] \|\chi\|_{M^*}. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist (u, λ) die gesuchte Lösung von (II.2.1).

„ \Rightarrow “: Wir zeigen zunächst (2). Sei dazu $\chi \in M^*$. Dann gibt es nach Voraussetzung genau ein Paar $(u, \lambda) \in X \times M$ mit

$$\begin{aligned} Au + B^*\lambda &= 0 \\ Bu &= \chi. \end{aligned}$$

Also ist $R(B) = M^*$. Mithin ist B eine stetige, bijektive, lineare Abbildung von V^\perp auf M^* . Aus dem Satz über die offene Abbildung [23, §II.5] folgt, dass B ein Isomorphismus ist. Damit folgt (2) aus Satz II.2.1.

Sei nun $u \in V$ mit $\pi Au = 0$, d.h. $Au \in V^\circ$. Wegen (2) und Satz II.2.1 gibt es ein eindeutiges $\lambda \in M$ mit $B^*\lambda = -Au$. Also löst (u, λ) das Problem (II.2.1) mit $\ell = \chi = 0$. Nach Voraussetzung ist somit $u = 0$, d.h. πA ist injektiv. Sei nun $g \in V^*$. Wegen des Satzes von Hahn-Banach [23, §IV.1] gibt es mindestens ein $\ell \in X^*$ mit $\pi\ell = g$. Sei nun $(u, \lambda) \in X \times M$ die eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} Au + B^*\lambda &= \ell \\ Bu &= 0. \end{aligned}$$

Für $v \in V$ folgt

$$\begin{aligned} \langle g, v \rangle_X &= \langle \ell, v \rangle_X = \langle Au, v \rangle_X + \langle B^*\lambda, v \rangle_X = \langle Au, v \rangle_X + \langle Bv, \lambda \rangle_M \\ &= \langle Au, v \rangle_X \end{aligned}$$

und somit $\pi Au = g$. Also ist πA auch surjektiv. Damit folgt (1) aus dem Satz über die offene Abbildung [23, §II.5]. \square

BEMERKUNG II.2.3 (Äquivalenz der Variationsprobleme). (1) Im ersten Teil des Beweises von Satz II.2.2 zeigen wir, dass Problem (II.2.1) mindestens eine Lösung hat, wenn πA ein Isomorphismus und $V(\chi) \neq \emptyset$ ist. Die inf-sup Bedingung aus Satz II.2.1 (1) garantiert, dass $V(\chi) \neq \emptyset$ ist für jedes $\chi \in M^*$.

(2) Satz II.2.2 zeigt, dass die Probleme (II.2.2) und (II.2.1) äquivalent sind, wenn die inf-sup Bedingung aus Satz II.2.1 (1) erfüllt ist.

SATZ II.2.4 (Symmetrische, koerzive Form a). *Die Bilinearform a sei symmetrisch und koerziv auf V , d.h. es gibt ein $\alpha > 0$ mit*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in V.$$

Dann besitzt Problem (II.2.1) genau dann zu jedem Paar $(\ell, \chi) \in X^ \times M^*$ eine eindeutige Lösung, wenn b die inf-sup Bedingung erfüllt.*

BEWEIS. Sei $\ell \in V^*$. Da a auf V koerziv und symmetrisch ist, folgt aus dem Satz von Lax-Milgram [22, Satz I.1.1], dass es genau ein $u \in V$ gibt mit

$$a(u, v) = \langle \ell, v \rangle_X \quad \forall v \in V$$

bzw. äquivalent $\pi Au = \ell$. Außerdem ist

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\alpha} \|\ell\|_{V^*}.$$

Also ist πA ein Isomorphismus von V auf V^* . Damit folgt die Behauptung aus Satz II.2.2. \square

SATZ II.2.5 (Sattelpunktsprobleme). *Die Bilinearform a sei symmetrisch, koerziv auf V und positiv semi-definit auf X , d.h.*

$$a(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in X.$$

Die Bilinearform b erfülle die inf-sup Bedingung von Satz II.2.1 (1). Definiere das Lagrange-Funktional $\mathcal{L} : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = \frac{1}{2}a(u, u) + b(u, \lambda) - \langle \ell, u \rangle_X - \langle \chi, \lambda \rangle_M.$$

Dann ist das Paar $(u, \lambda) \in X \times M$ genau dann eine Lösung von (II.2.1), wenn (u, λ) ein Sattelpunkt von \mathcal{L} ist, d.h., wenn gilt

$$(II.2.4) \quad \mathcal{L}(u, \mu) \leq \mathcal{L}(u, \lambda) \leq \mathcal{L}(v, \lambda) \quad \forall v \in X, \mu \in M.$$

BEWEIS. Wegen

$$D_u \mathcal{L}(u, \lambda)v = a(u, v) + b(v, \lambda) - \langle \ell, v \rangle_X$$

$$D_\lambda \mathcal{L}(u, \lambda)\mu = b(u, \mu) - \langle \chi, \mu \rangle_M$$

sind die kritischen Punkte von \mathcal{L} genau die Lösungen von (II.2.1). Wegen Satz II.2.4 besitzt (II.2.1) eine eindeutige Lösung. Wir müssen also nur noch die Sattelpunkteigenschaft (II.2.4) zeigen.

Die erste Ungleichung von (II.2.4) ist äquivalent zu

$$b(u, \mu - \lambda) \leq \langle \chi, \mu - \lambda \rangle_M \quad \forall \mu \in M.$$

Da M ein Vektorraum ist, ist dies äquivalent zur zweiten Gleichung von (II.2.1).

Die zweite Ungleichung von (II.2.4) ist äquivalent zu

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = \inf_{v \in X} \mathcal{L}(v, \lambda).$$

Da die Bilinearform a auf X positiv semi-definit ist, ist aber jeder kritische Punkt von $v \mapsto \mathcal{L}(v, \lambda)$ ein Minimum. Hieraus folgt die zweite Ungleichung von (II.2.4). \square

II.3. Lösbarkeit der Stokes Gleichungen

Wir betrachten die Stokes Gleichungen (II.1.1) (S. 33) mit homogenen Dirichlet Randbedingungen in einem beschränkten, zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$, mit Lipschitz Rand Γ und das zugehörige Variationsproblem (II.1.2) (S. 34). Dieses entspricht Problem (II.2.1) (S. 37) mit

$$\begin{aligned} X &= H_0^1(\Omega)^n, & M &= L_0^2(\Omega), \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}, & b(\mathbf{u}, p) &= - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{u}, \\ \langle \ell, \mathbf{v} \rangle_X &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, & \langle \chi, q \rangle_M &= 0. \end{aligned}$$

Wegen der Friedrichschen Ungleichung ist $|\cdot|_1$ eine Norm auf X und a daher auf ganz X koerziv. Also sind die Voraussetzungen von Satz II.2.4 (S. 41) an a erfüllt, und wir müssen noch die inf-sup Bedingung für b beweisen, d.h.

$$(II.3.1) \quad \beta = \inf_{p \in L_0^2(\Omega) \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|_1 \|p\|} > 0.$$

Wegen Satz II.2.1 (S. 38) ist (II.3.1) äquivalent dazu, dass div ein Isomorphismus von V^\perp auf $L_0^2(\Omega)$ ist. Da $\operatorname{div} \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^n, L_0^2(\Omega))$ auf V^\perp injektiv und $L_0^2(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(\Omega)$ ist, können wir den Satz von der offenen Abbildung [23, §II.5] heranziehen und müssen nur die Surjektivität von div zeigen.

Wenn wir uns auf C^∞ -Funktionen auf sternförmigen Gebieten beschränken, folgt diese Surjektivität aus dem Satz von Poincaré [17, Satz X.5.16]. Um dies einzusehen, betrachte ein $p \in C^\infty(\Omega)$ und ordne ihm die Differentialform $\varphi = p dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega_n^\infty(\Omega)$ zu. Dann ist φ geschlossen, d.h. $d\varphi = 0$, und nach dem Satz von Poincaré exakt. Also gibt es ein

$$\omega = \sum_{i=1}^n v_i (-1)^i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega_{n-1}^\infty(\Omega)$$

mit $d\omega = \varphi$. Für $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ gilt dann $\operatorname{div} \mathbf{v} = p$. Zwar ist $C^\infty(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ dicht in $L_0^2(\Omega)$, aber dies reicht nicht, um von der Surjektivität von $\operatorname{div} : C^\infty(\Omega)^n \rightarrow C^\infty(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ auf die Surjektivität von $\operatorname{div} : H_0^1(\Omega)^n \rightarrow L_0^2(\Omega)$ zu schließen.

Wenn wir uns auf glatt berandete ebene Gebiete, d.h. $n = 2$ und $\Gamma \in C^2$, einschränken, können wir (II.3.1) mit folgendem Argument

relativ leicht nachweisen. Sei $p \in L_0^2(\Omega)$. Wegen $\int_\Omega p = 0$ besitzt das Neumann Problem

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= p \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma\end{aligned}$$

eine eindeutige schwache Lösung $\varphi \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$. Da $\Gamma \in C^2$ ist, gilt $\varphi \in H^2(\Omega)$. Setze $\mathbf{v} = \nabla\varphi$. Dann ist offensichtlich $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2$ und

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{v} &= p \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma.\end{aligned}$$

Bezeichne mit \mathbf{t} das Tangentenfeld an Γ , so dass $\det(\mathbf{n}, \mathbf{t}) > 0$ ist. Da $\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und $\Gamma \in C^2$ ist, besitzt die biharmonische Gleichung

$$\begin{aligned}\Delta^2\psi &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \psi &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \quad \text{auf } \Gamma\end{aligned}$$

eine eindeutige schwache Lösung $\psi \in H^2(\Omega)$. Setze $\mathbf{w} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)$. Dann ist $\mathbf{w} \in H^1(\Omega)^2$ und

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{w} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} &= -\frac{\partial\psi}{\partial n} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \quad \text{auf } \Gamma \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} &= \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0 \quad \text{auf } \Gamma.\end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^2$ und erfüllt $\operatorname{div} \mathbf{u} = p$.

Um die inf-sup Bedingung (II.3.1) im allgemeinen Fall zu beweisen, müssen wir stärkeres mathematisches Geschütz auffahren.

SATZ II.3.1 (Gradientenabschätzung). *Es gibt eine Konstante c , die nur von Ω abhängt, so dass für alle $p \in L^2(\Omega)$ gilt*

$$\|p\| \leq c \{ \|p\|_{-1} + \|\nabla p\|_{-1} \}.$$

BEWEIS. Einen ausführlichen Beweis findet man in [9, Theorem III.3.2 und Remark III.3.1]. Wir geben im Folgenden nur die wesentlichen Ideen des Beweises an.

1. *Schritt:* Definiere

$$X(\Omega) = \{p \in H^{-1}(\Omega) : \nabla p \in H^{-1}(\Omega)^n\}$$

und

$$\| \|p\| \| = \|p\|_{-1} + \|\nabla p\|_{-1}.$$

Aus der Definition von $H^{-1}(\Omega)$ und der schwachen Ableitung folgt:

- $(X(\Omega), \| \cdot \|)$ ist ein Hilbert-Raum.
- $L^2(\Omega) \hookrightarrow X(\Omega)$.

Da die kanonische Injektion $\iota : L^2(\Omega) \rightarrow X(\Omega)$ injektiv ist, folgt die Behauptung aus dem Satz über die offene Abbildung [23, §II.5], sofern wir die Surjektivität von ι beweisen können. Wir müssen also nur die mengentheoretische Inklusion

$$(II.3.2) \quad X(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

beweisen.

2. *Schritt:* (II.3.2) gilt für den \mathbb{R}^n .

Aus der Charakterisierung der Sobolev Räume über die Fourier-Transformation [9, §I.4] folgt

$$p \in X(\mathbb{R}^n) \iff (1 + |\eta|^2)^{-\frac{1}{2}} \widehat{p}(\eta) \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ und} \\ (1 + |\eta|^2)^{-\frac{1}{2}} \eta_i \widehat{p}(\eta) \in L^2(\mathbb{R}^n), 1 \leq i \leq n.$$

Daher gilt für $p \in X(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\eta|^2)^{-1} |\widehat{p}(\eta)|^2 \left\{ 1 + \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \right\} d\eta = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{p}(\eta)|^2 d\eta < \infty.$$

Also ist $p \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

3. *Schritt:* Es genügt, (II.3.2) für den Halbraum $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*$ zu beweisen. Da Ω einen Lipschitz-Rand hat, gibt es eine Partition der Eins $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ auf Ω mit folgenden Eigenschaften:

- $\text{supp } \alpha_0 \Subset \Omega$.
- $\text{supp } \alpha_i, 1 \leq i \leq k$, liegt in einer Karte von Γ , in der Ω das Lipschitz-stetige Bild einer Nullumgebung in $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*$ ist.

Daher reicht es, für $p \in X(\Omega)$ die Beziehungen $\alpha_i p \in L^2(\Omega), 0 \leq i \leq k$, zu zeigen. Da $\alpha_0 p$ durch Null auf den \mathbb{R}^n fortgesetzt werden kann, kann Schritt 2 auf $\alpha_0 p$ angewandt werden. Die anderen Funktionen $\alpha_i p, 1 \leq i \leq k$, können aber wegen der zweiten Eigenschaft auf Funktionen auf $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*$ transformiert werden.

4. *Schritt:* Mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach zeigt man, dass $C^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ dicht ist in $X(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*)$. Daher muss man (II.3.2) nur noch für glatte Funktionen in $X(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*)$ beweisen. Sei p eine solche Funktion. Wir definieren eine Fortsetzung¹ \tilde{p} von p auf \mathbb{R}^n durch

$$\tilde{p}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \begin{cases} p(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), & \text{falls } x_n > 0, \\ 4p(x_1, \dots, x_{n-1}, -2x_n) \\ -3p(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n), & \text{falls } x_n \leq 0. \end{cases}$$

Dann kann man zeigen, dass $\tilde{p} \in X(\mathbb{R}^n)$ ist und dass die Abbildung $p \mapsto \tilde{p}$ eine stetige lineare Abbildung von $X(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*)$ nach $X(\mathbb{R}^n)$ ist. Damit folgt die Behauptung aus Schritt 2. \square

¹Die Form der Fortsetzung ergibt sich wegen der Definition von H^{-1} durch partielle Integration des Gradienten.

SATZ II.3.2 (Poincaré-Ungleichung in $H^{-1}(\Omega)$). *Es gibt ein Konstante c , die nur von Ω abhängt, so dass für alle $p \in L_0^2(\Omega)$ gilt*

$$\|p\| \leq c \|\nabla p\|_{-1}.$$

BEWEIS. Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L_0^2(\Omega)$ mit

$$\|p_n\| = 1 \text{ und } \|\nabla p_n\|_{-1} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da $L_0^2(\Omega)$ ein Hilbert-Raum ist und da aus der kompakten Einbettung von $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ [22, Satz I.2.19] die kompakte Einbettung von $L^2(\Omega) = L^2(\Omega)^*$ in $H^{-1}(\Omega) = H_0^1(\Omega)^*$ folgt, gibt es ein $p \in L^2(\Omega)$ und eine Teilfolge $(p_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

- $\|p_{n_k} - p\|_{-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$,
 - $p_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p$ schwach in $L^2(\Omega)$, d.h.
- $$\int_{\Omega} p_{n_k} q \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} p q \text{ für alle } q \in L^2(\Omega).$$

Aus der zweiten Eigenschaft und der Definition der schwachen Ableitung folgt für alle $\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)^n$

$$\int_{\Omega} \nabla p_{n_k} \cdot \mathbf{v} = - \int_{\Omega} p_{n_k} \operatorname{div} \mathbf{v} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} = \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v}.$$

Wegen $\|\nabla p_n\|_{-1} \leq \frac{1}{n}$ gilt andererseits

$$\left| \int_{\Omega} \nabla p_{n_k} \cdot \mathbf{v} \right| \leq \|\nabla p_{n_k}\|_{-1} \|\mathbf{v}\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Also ist $\nabla p = 0$ und damit p konstant.

Aus $p_n \in L_0^2(\Omega)$ für all $n \in \mathbb{N}$ und der zweiten Eigenschaft folgt weiter

$$0 = \int_{\Omega} p_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} p.$$

Also ist $p = 0$, und $(p_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\nabla p_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergieren in $H^{-1}(\Omega)$ bzw. $H^{-1}(\Omega)^n$ gegen Null. Wegen Satz II.3.1 ist dies ein Widerspruch zu $\|p_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. \square

SATZ II.3.3 (inf-sup Bedingung für die Stokes Gleichung). *Die inf-sup Bedingung (II.3.1) ist erfüllt.*

BEWEIS. Der Operator $\operatorname{grad} : L_0^2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)^n$ ist injektiv und stetig. Wegen Satz II.3.2 ist sein Bildbereich $R(\operatorname{grad}) = \operatorname{grad}(L_0^2(\Omega))$ ein abgeschlossener Unterraum von $H^{-1}(\Omega)^n$. Wegen des Satzes von der offenen Abbildung [23, §II.5] ist somit grad ein Isomorphismus von $L_0^2(\Omega)$ auf $R(\operatorname{grad})$. Wegen des closed range theorems [23, §VII.5] ist $R(\operatorname{grad}) = \ker(\operatorname{div})^\circ = V^\circ$.² Damit folgt die Behauptung aus Satz II.2.1 (S. 38). \square

²Man beachte, dass $-\operatorname{div}$ der duale Operator von grad ist.

Aus Satz II.3.3 und Satz II.2.4 (S. 41) folgt unmittelbar:

SATZ II.3.4 (Eindeutige schwache Lösbarkeit der Stokes Gleichungen). *Die schwache Formulierung (II.1.2) (S. 34) der Stokes Gleichungen (II.1.1) (S. 33) besitzt für jedes $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^n$ eine eindeutige schwache Lösung $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$, und es gilt*

$$\|\mathbf{u}\|_1 + \|p\| \leq c \|\mathbf{f}\|_{-1}.$$

Die Konstante c hängt nur von Ω ab.

Gemäß [6] gilt folgender Regularitätssatz:

SATZ II.3.5 (Regularitätssatz für die Stokes Gleichungen). *Für die schwache Lösung der Stokes Gleichungen gilt folgende Regularität:*

- (1) *Seien $m \in \mathbb{N}$, $\Gamma \in C^{m+2}$ und $\mathbf{f} \in H^m(\Omega)^n$. Dann gilt für die eindeutige schwache Lösung der Stokes Gleichungen $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n \cap H^{m+2}(\Omega)^n$, $p \in L_0^2(\Omega) \cap H^{m+1}(\Omega)$ und es gibt eine Konstante $c = c(m, \Omega)$ mit*

$$\|\mathbf{u}\|_{m+2} + \|p\|_{m+1} \leq c \|\mathbf{f}\|_m.$$

- (2) *Ist $n = 2$, so gilt die Regularitätsaussage aus Teil (1) mit $m = 0$ auch für konvexe Polygone.*

BEMERKUNG II.3.6 (Inhomogene Stokes Gleichungen). Gelegentlich tritt folgende Verallgemeinerung der Stokes Gleichungen (II.1.1) (S. 33) auf

$$(II.3.3) \quad \begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= r && \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Dabei ist $r \in L^2(\Omega)$ und $\mathbf{g} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$. Aus dem Gaußschen Integralsatz folgt, dass r und \mathbf{g} die *Kompatibilitätsbedingung*

$$\int_{\Omega} r = \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$$

erfüllen müssen, damit (II.3.3) eine Lösung haben kann.

Sei also die Kompatibilitätsbedingung erfüllt. Die schwache Formulierung von (II.3.3) lautet dann:

Finde $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^n$ mit $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ auf Γ und $p \in L_0^2(\Omega)$, so dass

$$(II.3.4) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} && \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} &= \int_{\Omega} r q && \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

Man beachte, dass wir wegen des Gaußschen Integralsatzes und der Kompabilitätsbedingung in der zweiten Gleichung von (II.3.4) nur Funktionen in $L_0^2(\Omega)$ betrachten müssen.

Da $\mathbf{g} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$ ist, gibt es mindestens ein $\mathbf{u}_1 \in H^1(\Omega)^n$ mit $\mathbf{u}_1 = \mathbf{g}$ auf Γ . Wegen der Kompabilitätsbedingung gilt

$$\int_{\Omega} \{r - \operatorname{div} \mathbf{u}_1\} = \int_{\Omega} r - \int_{\Gamma} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Daher definiert $q \mapsto \int_{\Omega} \{r - \operatorname{div} \mathbf{u}_1\} q$ ein stetiges lineares Funktional

$\chi \in L_0^2(\Omega)^*$. Da $\mathbf{u}_1 \in H^1(\Omega)^n$ ist, definiert $\mathbf{v} \mapsto \int_{\Omega} \{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \nabla \mathbf{u}_1 : \nabla \mathbf{v}\}$ ein

stetiges, lineares Funktional $\ell \in H^{-1}(\Omega)^n$. Daher entspricht Problem (II.3.4) mit dem Ansatz $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0$ mit $\mathbf{u}_0 \in H_0^1(\Omega)^n$ dem Problem (II.2.1) (S. 37). Damit folgt die eindeutige Lösbarkeit von (II.3.4) aus Satz II.2.4 (S. 41) und Satz II.3.3. Ebenso folgt die a priori Abschätzung

$$\|\mathbf{u}\|_1 + \|p\| \leq c \left\{ \|\mathbf{f}\|_{-1} + \|r\| + \|\mathbf{g}\|_{\frac{1}{2};\Gamma} \right\}$$

mit einer Konstanten c , die nur von Ω abhängt. Der Regularitätssatz II.3.5 bleibt ebenfalls gültig.

II.4. Ein abstrakter Approximationsatz

Wir greifen das abstrakte Variationsproblem (II.2.1) (S. 37) aus §II.2 auf und benutzen die dortigen Notationen. Für die Diskretisierung wählen wir endlich dimensionale Unterräume $X_{\mathcal{T}} \subset X$ und $M_{\mathcal{T}} \subset M$ und approximieren (II.2.1) durch:

Finde $(u_{\mathcal{T}}, \lambda_{\mathcal{T}}) \in X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}}$ mit

$$(II.4.1) \quad \begin{aligned} a(u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}}) + b(v_{\mathcal{T}}, \lambda_{\mathcal{T}}) &= \langle \ell, v_{\mathcal{T}} \rangle_X \quad \forall v_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \\ b(u_{\mathcal{T}}, \mu_{\mathcal{T}}) &= \langle \chi, \mu_{\mathcal{T}} \rangle_M \quad \forall \mu_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Das diskrete Analogon zu $V = \ker B$ ist dann

$$V_{\mathcal{T}} = \{v_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} : b(v_{\mathcal{T}}, \lambda_{\mathcal{T}}) = 0 \quad \forall \lambda_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}\}.$$

Man beachte, dass $V_{\mathcal{T}}$ i.a. kein Unterraum von V ist.

SATZ II.4.1 (Céa-Lemma für Sattelpunktsprobleme). *Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:*

- (1) a ist symmetrisch und koerziv auf V .
- (2) b erfüllt die inf-sup Bedingung bzgl. $X \times M$.
- (3) (Diskrete Koerzivität) a ist gleichmäßig koerziv auf $V_{\mathcal{T}}$, d.h. es gibt eine von \mathcal{T} unabhängige Konstante $\tilde{\alpha} > 0$ mit

$$a(v_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}}) \geq \tilde{\alpha} \|v_{\mathcal{T}}\|_X^2 \quad \forall v_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}.$$

- (4) (Diskrete inf-sup Bedingung) b erfüllt die inf-sup Bedingung gleichmäßig bzgl. $X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}}$, d.h. es gibt eine von \mathcal{T} unabhängige Konstante $\tilde{\beta} > 0$ mit

$$\inf_{\lambda_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}} \setminus \{0\}} \sup_{u_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \setminus \{0\}} \frac{b(u_{\mathcal{T}}, \lambda_{\mathcal{T}})}{\|u_{\mathcal{T}}\|_X \|\lambda_{\mathcal{T}}\|_M} \geq \tilde{\beta}.$$

Dann besitzen die Probleme (II.2.1) und (II.4.1) jeweils eine eindeutige Lösung $(u, \lambda) \in X \times M$ bzw. $(u_{\mathcal{T}}, \lambda_{\mathcal{T}}) \in X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}}$, und es gilt die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} & \|u - u_{\mathcal{T}}\|_X + \|\lambda - \lambda_{\mathcal{T}}\|_M \\ & \leq c \left\{ \inf_{v_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}} \|u - v_{\mathcal{T}}\|_X + \inf_{\mu_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}} \|\lambda - \mu_{\mathcal{T}}\|_M \right\} \end{aligned}$$

mit einer von \mathcal{T} unabhängigen Konstanten c .

BEWEIS. Die eindeutige Lösbarkeit der Probleme (II.2.1) und (II.4.1) folgt aus Satz II.2.4 (S. 41).

Seien $v_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$ und $\mu_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}$ beliebig. Definiere $\tilde{\ell} \in X^*$ und $\tilde{\chi} \in M^*$ durch

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\ell}, v \rangle_X &= a(u - v_{\mathcal{T}}, v) + b(v, \lambda - \mu_{\mathcal{T}}) \quad \forall v \in X \\ \langle \tilde{\chi}, \mu \rangle_M &= b(u - v_{\mathcal{T}}, \mu) \quad \forall \mu \in M. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \|\tilde{\ell}\|_{X^*} &\leq \|a\|_{\mathcal{L}^2} \|u - v_{\mathcal{T}}\|_X + \|b\|_{\mathcal{L}^2} \|\lambda - \mu_{\mathcal{T}}\|_M \\ \|\tilde{\chi}\|_{M^*} &\leq \|b\|_{\mathcal{L}^2} \|u - v_{\mathcal{T}}\|_X. \end{aligned}$$

Für alle $w_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$ und $\rho_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}$ gilt wegen (II.2.1) und (II.4.1)

$$\begin{aligned} a(u, w_{\mathcal{T}}) + b(w_{\mathcal{T}}, \lambda) &= \langle \tilde{\ell}, w_{\mathcal{T}} \rangle_X = a(u_{\mathcal{T}}, w_{\mathcal{T}}) + b(w_{\mathcal{T}}, \lambda_{\mathcal{T}}) \\ b(u, \rho_{\mathcal{T}}) &= \langle \tilde{\chi}, \rho_{\mathcal{T}} \rangle_M = b(u_{\mathcal{T}}, \rho_{\mathcal{T}}) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\ell}, w_{\mathcal{T}} \rangle_X &= a(u, w_{\mathcal{T}}) + b(w_{\mathcal{T}}, \lambda) - a(v_{\mathcal{T}}, w_{\mathcal{T}}) - b(w_{\mathcal{T}}, \mu_{\mathcal{T}}) \\ &= a(u_{\mathcal{T}}, w_{\mathcal{T}}) + b(w_{\mathcal{T}}, \lambda_{\mathcal{T}}) - a(v_{\mathcal{T}}, w_{\mathcal{T}}) - b(w_{\mathcal{T}}, \mu_{\mathcal{T}}) \\ &= a(u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}, w_{\mathcal{T}}) + b(w_{\mathcal{T}}, \lambda_{\mathcal{T}} - \mu_{\mathcal{T}}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\chi}, \rho_{\mathcal{T}} \rangle_M &= b(u, \rho_{\mathcal{T}}) - b(v_{\mathcal{T}}, \rho_{\mathcal{T}}) \\ &= b(u_{\mathcal{T}}, \rho_{\mathcal{T}}) - b(v_{\mathcal{T}}, \rho_{\mathcal{T}}) \\ &= b(u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}, \rho_{\mathcal{T}}). \end{aligned}$$

Damit folgt aus Satz II.2.1 (S. 38) und Satz II.2.4 (S. 41)

$$\begin{aligned} \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}}\|_X + \|\lambda_{\mathcal{T}} - \mu_{\mathcal{T}}\|_M &\leq c \left\{ \|\tilde{\ell}\|_{X^*} + \|\tilde{\chi}\|_{M^*} \right\} \\ &\leq c^* \{ \|u - v_{\mathcal{T}}\|_X + \|\lambda - \mu_{\mathcal{T}}\|_M \}. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Dreiecksungleichung ergibt dies

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_X + \|\lambda - \lambda_{\mathcal{T}}\|_M \leq \{1 + c^*\} \{\|u - v_{\mathcal{T}}\|_X + \|\lambda - \mu_{\mathcal{T}}\|_M\}.$$

Da $v_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$ und $\mu_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}$ beliebig waren, folgt hieraus die Behauptung. \square

BEMERKUNG II.4.2 (Struktur des diskreten Problems). (1) Problem (II.4.1) ist auch eindeutig lösbar, wenn die Bedingungen (3) und (4) von Satz II.4.1 für jedes feste \mathcal{T} mit von \mathcal{T} abhängigen positiven Konstanten $\tilde{\alpha}(\mathcal{T})$ bzw. $\tilde{\beta}(\mathcal{T})$ gelten. Die Fehlerabschätzung von Satz II.4.1 bleibt ebenfalls gültig. Allerdings folgt aus dem Beweis von Satz II.2.2 (S. 39) und aus Satz II.2.1 (S. 38), dass die Konstanten c^* und c zu $\tilde{\alpha}(\mathcal{T})^{-1}$ bzw. $\tilde{\beta}(\mathcal{T})^{-2}$ proportional sind. Daher gilt die Fehlerabschätzung von Satz II.4.1 nur dann gleichmäßig bzgl. \mathcal{T} , wenn die Größen $\tilde{\alpha}(\mathcal{T})$ und $\tilde{\beta}(\mathcal{T})$ gleichmäßig von Null weg beschränkt sind.

(2) Wenn wir Basen für $X_{\mathcal{T}}$ und $M_{\mathcal{T}}$ wählen, geht Problem (II.4.1) in ein lineares Gleichungssystem über. Die Matrix dieses Gleichungssystems hat die Form $\begin{pmatrix} A_{\mathcal{T}} & B_{\mathcal{T}}^T \\ B_{\mathcal{T}} & 0 \end{pmatrix}$ mit Matrizen $A_{\mathcal{T}}$ und $B_{\mathcal{T}}$ der Dimension $\dim X_{\mathcal{T}} \times \dim X_{\mathcal{T}}$ bzw. $\dim M_{\mathcal{T}} \times \dim X_{\mathcal{T}}$. Die inf-sup Bedingung (4) aus Satz II.4.1 besagt dann u.a., dass die Spalten von $B_{\mathcal{T}}^T$ linear unabhängig sein müssen, d.h. $\text{rang } B_{\mathcal{T}} \geq \dim M_{\mathcal{T}}$. Da andererseits stets $\text{rang } B_{\mathcal{T}} \leq \min\{\dim X_{\mathcal{T}}, \dim M_{\mathcal{T}}\}$ ist, kann die inf-sup Bedingung (4) höchstens dann gelten, wenn $\dim X_{\mathcal{T}} \geq \dim M_{\mathcal{T}}$ ist. Dies ist allerdings eine notwendige und keine hinreichende Bedingung.

SATZ II.4.3 (Konvergenz der diskreten Lösungen). *Die Voraussetzungen seien wie in Satz II.4.1. Zusätzlich gebe es dichte Teilmengen \mathcal{X} von X und \mathcal{M} von M und lineare Operatoren $r_{\mathcal{T}} : \mathcal{X} \rightarrow X_{\mathcal{T}}$ und $\rho_{\mathcal{T}} : \mathcal{M} \rightarrow M_{\mathcal{T}}$ mit*

$$(II.4.2) \quad \begin{aligned} \lim_{\dim X_{\mathcal{T}} \rightarrow \infty} \|r_{\mathcal{T}}v - v\|_X &= 0 \quad \forall v \in \mathcal{X} \\ \lim_{\dim M_{\mathcal{T}} \rightarrow \infty} \|\rho_{\mathcal{T}}\mu - \mu\|_M &= 0 \quad \forall \mu \in \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Dann gilt für die Lösungen (u, λ) und $(u_{\mathcal{T}}, \lambda_{\mathcal{T}})$ der Probleme (II.2.1) (S. 37) und (II.4.1)

$$\lim_{\min\{\dim X_{\mathcal{T}}, \dim M_{\mathcal{T}}\} \rightarrow \infty} \{\|u - u_{\mathcal{T}}\|_X + \|\lambda - \lambda_{\mathcal{T}}\|_M\} = 0.$$

BEWEIS. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es wegen der Dichtheit von \mathcal{X} in X und \mathcal{M} in M ein $u_{\varepsilon} \in \mathcal{X}$ und $\lambda_{\varepsilon} \in \mathcal{M}$ mit

$$\|u - u_{\varepsilon}\|_X + \|\lambda - \lambda_{\varepsilon}\|_M \leq \varepsilon.$$

Nach Voraussetzung gibt es $N_{\varepsilon} > 0$, so dass für $\min\{\dim X_{\mathcal{T}}, \dim M_{\mathcal{T}}\} \geq N_{\varepsilon}$ gilt

$$\|r_{\mathcal{T}}u_{\varepsilon} - u_{\varepsilon}\|_X + \|\rho_{\mathcal{T}}\lambda_{\varepsilon} - \lambda_{\varepsilon}\|_M \leq \varepsilon.$$

Aus Satz II.4.1 folgt dann für $\min\{\dim X_{\mathcal{T}}, \dim M_{\mathcal{T}}\} \geq N_{\varepsilon}$

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_X + \|\lambda - \lambda_{\mathcal{T}}\|_M \leq c \{\|u - r_{\mathcal{T}}u_{\varepsilon}\|_X + \|\lambda - \rho_{\mathcal{T}}\lambda_{\varepsilon}\|_M\} \leq 2c\varepsilon.$$

Da ε beliebig war und die Konstante c nicht von \mathcal{T} abhängt, folgt hieraus die Behauptung. \square

Bei Anwendung auf die Stokes Gleichungen liefert Satz II.4.1 Fehlerabschätzungen für die Geschwindigkeit in der H^1 -Norm und für den Druck in der L^2 -Norm. Der folgende Satz, der dem Dualitätsargument von Aubin-Nitsche [22, Satz I.1.5] für Minimumprobleme entspricht, liefert dann L^2 -Fehlerabschätzungen für die Geschwindigkeit.

SATZ II.4.4 (Satz von Aubin-Nitsche für Sattelpunktsprobleme). *Die Voraussetzungen seien wie in Satz II.4.1. Zusätzlich gebe es einen Hilbert-Raum H mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_H$ und Norm $\|\cdot\|_H$, so dass X dicht ist in H mit stetiger Einbettung. Für jedes $g \in H$ besitzt dann das Problem*

$$(II.4.3) \quad \begin{aligned} a(v, u_g) + b(v, \lambda_g) &= (g, v)_H \quad \forall v \in X \\ b(u_g, \mu) &= 0 \quad \forall \mu \in M \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung $(u_g, \lambda_g) \in X \times M$. Für die Lösungen (u, λ) und $(u_{\mathcal{T}}, \lambda_{\mathcal{T}})$ der Probleme (II.2.1) (S. 37) und (II.4.1) gilt dann die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} &\|u - u_{\mathcal{T}}\|_H \\ &\leq c \{ \|u - u_{\mathcal{T}}\|_X + \|\lambda - \lambda_{\mathcal{T}}\|_M \} \cdot \\ &\quad \sup_{g \in H \setminus \{0\}} \frac{1}{\|g\|_H} \left\{ \inf_{v_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}} \|u_g - v_{\mathcal{T}}\|_X + \inf_{\mu_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}} \|\lambda_g - \mu_{\mathcal{T}}\|_M \right\}. \end{aligned}$$

BEWEIS. Sei $g \in H$ beliebig. Da X stetig in H eingebettet ist, definiert die Abbildung $v \mapsto (g, v)_H$ ein stetiges lineares Funktional auf X . Wegen Satz II.2.4 (S. 41) besitzt daher (II.4.3) eine eindeutige Lösung. Seien $v_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$ und $\mu_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}$ beliebig. Dann folgt aus (II.4.3)

$$b(u_g, \lambda - \lambda_{\mathcal{T}}) = 0$$

und aus (II.2.1) (S. 37) und (II.4.1)

$$a(u - u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}}) + b(v_{\mathcal{T}}, \lambda - \lambda_{\mathcal{T}}) = 0 \quad \text{und} \quad b(u - u_{\mathcal{T}}, \mu_{\mathcal{T}}) = 0.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} &(g, u - u_{\mathcal{T}})_H \\ &= a(u - u_{\mathcal{T}}, u_g) + b(u - u_{\mathcal{T}}, \lambda_g) \\ &= a(u - u_{\mathcal{T}}, u_g) + b(u - u_{\mathcal{T}}, \lambda_g) + b(u_g, \lambda - \lambda_{\mathcal{T}}) \\ &= a(u - u_{\mathcal{T}}, u_g - v_{\mathcal{T}}) + b(u_g - v_{\mathcal{T}}, \lambda - \lambda_{\mathcal{T}}) + b(u - u_{\mathcal{T}}, \lambda_g - \mu_{\mathcal{T}}) \\ &\leq \|a\|_{\mathcal{L}^2} \|u - u_{\mathcal{T}}\|_X \|u_g - v_{\mathcal{T}}\|_X + \|b\|_{\mathcal{L}^2} \|u_g - v_{\mathcal{T}}\|_X \|\lambda - \lambda_{\mathcal{T}}\|_M \\ &\quad + \|b\|_{\mathcal{L}^2} \|u - u_{\mathcal{T}}\|_X \|\lambda_g - \mu_{\mathcal{T}}\|_M. \end{aligned}$$

Da X dicht ist in H , gilt andererseits

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_H = \sup_{g \in H \setminus \{0\}} \frac{(g, u - u_{\mathcal{T}})_H}{\|g\|_H}. \quad \square$$

II.5. Stabile gemischte Finite Elemente

Wir wollen die abstrakten Ergebnisse des vorigen Paragraphen auf Finite Element Diskretisierungen der Stokes Gleichungen anwenden. Dazu wählen wir die Räume X und M und die Bilinearformen a und b wie in §II.3 (S. 42). Zusätzlich setzen wir im Rahmen von §II.4

$$H = L^2(\Omega)^n, \quad \mathcal{X} = H^2(\Omega)^n \cap H_0^1(\Omega)^n, \quad \mathcal{M} = H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega).$$

Im Folgenden bezeichnet \mathcal{T} stets eine affin äquivalente, zulässige und reguläre Unterteilung von Ω wie in §I.4 (S. 26). Zur Vermeidung technischer Schwierigkeiten nehmen wir an, dass der Rand von Ω stückweise gerade ist, d.h. dass Ω ein Polyedergebiet ist.

$X_{\mathcal{T}} \subset X = H_0^1(\Omega)^n$ und $M_{\mathcal{T}} \subset M = L_0^2(\Omega)$ bezeichnen stets zu \mathcal{T} gehörige Finite Element Räume. Wir sagen, das Paar $(X_{\mathcal{T}}, M_{\mathcal{T}})$ sei *stabil*, wenn es ein von \mathcal{T} unabhängiges $\tilde{\beta} > 0$ gibt mit

$$(II.5.1) \quad \inf_{p_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}} \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}}{|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_1 \|p_{\mathcal{T}}\|} \geq \tilde{\beta}.$$

Jedem Paar $(X_{\mathcal{T}}, M_{\mathcal{T}})$ ordnen wir zwei maximal gewählte Zahlen $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ mit $[S_0^{\mu,0}(\mathcal{T})]^n \subset X_{\mathcal{T}}$ und $S^{\nu,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega) \subset M_{\mathcal{T}}$ oder $S^{\nu,0}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega) \subset M_{\mathcal{T}}$ zu. Offensichtlich können wir o.E. annehmen, dass $\mu \geq 1$ ist und dass $\nu \geq 1$ gilt, falls die Elemente in $M_{\mathcal{T}}$ stetig sind.

Für den Operator $r_{\mathcal{T}}$ aus Satz II.4.3 (S. 49) wählen wir die nodale Interpolation in den Elementeckpunkten. Für den Operator $\rho_{\mathcal{T}}$ aus Satz II.4.3 wählen wir die L^2 -Projektion auf $S^{0,-1}(\mathcal{T})$, falls die Elemente in $M_{\mathcal{T}}$ unstetig sind, oder den Quasi-Interpolationsoperator aus §I.4 (S. 26), falls die Elemente in $M_{\mathcal{T}}$ stetig sind. Dann ist jeweils die Bedingung (II.4.2) (S. 49) aus Satz II.4.3 erfüllt.

Damit ergibt sich aus den Sätzen II.4.1 (S. 47), II.4.3 (S. 49), II.4.4 (S. 50), II.3.4 (S. 46) und II.3.5 (S. 46) und den Approximationseigenschaften aus §I.4 (S. 26):

SATZ II.5.1 (Fehlerabschätzung für stabile Finite Element Räume für die Stokes Gleichungen). *Das Paar $(X_{\mathcal{T}}, M_{\mathcal{T}})$ sei stabil. Dann besitzt das diskrete Stokes Problem*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} : \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \rangle \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \\ \int_{\Omega} q_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} &= 0 \quad \forall q_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}} \end{aligned}$$

zu jedem $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^n$ eine eindeutige Lösung $(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}) \in X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}}$. Bezeichne mit $(\mathbf{u}, p) \in X \times M$ die eindeutige schwache Lösung der entsprechenden Stokes Gleichungen. Dann gilt

$$\lim_{h_{\mathcal{T}} \rightarrow 0} \{ \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_1 + \|p - p_{\mathcal{T}}\| \} = 0.$$

Gibt es ein $m \in \mathbb{N}^*$ mit $\mathbf{u} \in H^{m+1}(\Omega)^n$, $p \in H^m(\Omega)$, so gilt zusätzlich (II.5.2)

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_1 + \|p - p_{\mathcal{T}}\| \leq c_1 \left\{ h_{\mathcal{T}}^{\min\{\mu, m\}} |\mathbf{u}|_{m+1} + h_{\mathcal{T}}^{\min\{\nu+1, m\}} |p|_m \right\}.$$

Ist außerdem $n = 2$ und Ω konvex, so gilt

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\| \leq c_2 h_{\mathcal{T}} \{ \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_1 + \|p - p_{\mathcal{T}}\| \}.$$

Die Konstanten c_1 und c_2 hängen nur von Ω und der Konstanten $C_{\mathcal{T}}$ in der Regularitätsbedingung an \mathcal{T} ab.

BEMERKUNG II.5.2 (Optimalität der Fehlerabschätzung; optimale Finite Element Räume). (1) Wegen Satz II.5.1 liegt die Hauptarbeit bei der Konstruktion geeigneter Finite Element Diskretisierungen im Nachweis der Stabilität, d.h. der Abschätzung (II.5.1).

(2) Die Fehlerabschätzung (II.5.2) ist optimal, da für Lösungen der Stokes Gleichungen die Regularität des Druckes i.a. um eine Differenzierungsstufe niedriger ist als die Regularität der Geschwindigkeit.

(3) Wegen der Abschätzung (II.5.2) sind stabile Paare $(X_{\mathcal{T}}, M_{\mathcal{T}})$ mit $\nu = \mu - 1$ optimal. Unter diesem Gesichtspunkt sind die Paare $([S_0^{\mu,0}(\mathcal{T})]^n, S^{\mu-1,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega))$ und $([S_0^{\mu,0}(\mathcal{T})]^n, S^{\mu-1,0}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega))$ für $\mu \geq 2$ optimal, sofern sie stabil sind.

-1	+1	-1	+1
+1	-1	+1	-1
-1	+1	-1	+1
+1	-1	+1	-1

ABBILDUNG II.5.1. Schachbrett-Instabilität des Q1/Q0 Elementes

BEISPIEL II.5.3 (Instabilität der P1/P0 und Q1/Q0 Elemente). (1) Betrachte das Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1)^2$ und eine Courant-Triangulierung \mathcal{T} bestehend aus rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecken mit Katheten der Länge $h = \frac{1}{N+1}$ und Hypotenusen parallel zu $(-1, 1)$. Dann ist das Paar $([S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^2, S^{0,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega))$ instabil. Denn es ist $\dim[S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^2 = 2N^2$ und $\dim S^{0,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega) = 2(N+1)^2 - 1 > 2N^2$. Dies ergänzt die heuristischen Überlegungen vom Ende von §II.1 (S. 33).

(2) Betrachte das Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1)^2$ und eine Unterteilung \mathcal{T} von Ω in Quadrate der Kantenlänge $h = \frac{1}{N+1}$ mit $N \geq 2$. Wir betrachten das Paar $([S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^2, S_{\mathcal{T}}^{0,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega))$, das sog. *Q1/Q0 Element*. Wegen $\dim[S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^2 = 2N^2$ und $\dim S_{\mathcal{T}}^{0,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega) = (N+1)^2 - 1 = 2N^2 - (N-1)^2 + 1 < 2N^2$ könnte dieses Paar stabil sein. Sei $p_{\mathcal{T}}$ die stückweise konstante Funktion, die auf dem Quadrat K_{ij} mit linker unterer Ecke (ih, jh) den Wert $(-1)^{i+j}$ hat (vgl. Abbildung II.5.1). Dann ist offensichtlich $p_{\mathcal{T}} \in S_{\mathcal{T}}^{0,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega)$. Sei $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in [S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^2$ beliebig. Aus dem Gaußschen Integralsatz folgt für alle $0 \leq i, j \leq N$ unter Anwendung der Trapezregel für die Linienintegrale

$$\begin{aligned} \int_{K_{ij}} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} &= (-1)^{i+j} \int_{K_{ij}} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = (-1)^{i+j} \int_{\partial K_{ij}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n}_{K_{ij}} \\ &= (-1)^{i+j} \frac{h}{2} \{ (\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{e}_1)((i+1)h, jh) + (\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{e}_1)((i+1)h, (j+1)h) \\ &\quad - (\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{e}_1)(ih, (j+1)h) - (\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{e}_1)(ih, jh) \\ &\quad + (\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{e}_2)((i+1)h, (j+1)h) \\ &\quad + (\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{e}_2)(ih, (j+1)h) \\ &\quad - (\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{e}_2)(ih, jh) - (\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{e}_2)((i+1)h, jh) \}. \end{aligned}$$

Summation über alle Paare (i, j) liefert wegen der homogenen Randbedingung für $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}$

$$\int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = 0.$$

Da $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in [S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^2$ beliebig war, kann das Paar nicht stabil sein. Der soeben beschriebene Effekt wird als *Schachbrett-Instabilität des Q1/Q0 Elementes* bezeichnet.

Bevor wir nach diesen ersten negativen Erfahrungen stabile Raumpaare $(X_{\mathcal{T}}, M_{\mathcal{T}})$ konstruieren, geben wir zwei Kriterien an, die diese Konstruktion erleichtern werden.

SATZ II.5.4 (Fortin-Kriterium). *Das Paar $(X_{\mathcal{T}}, M_{\mathcal{T}})$ ist genau dann stabil, wenn es eine von \mathcal{T} unabhängige Konstante c und einen linearen Operator $\pi_{\mathcal{T}} : X \rightarrow X_{\mathcal{T}}$ mit*

$$\begin{aligned} |\pi_{\mathcal{T}} \mathbf{u}|_1 &\leq c |\mathbf{u}|_1 \quad \forall \mathbf{u} \in X \\ \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div}(\pi_{\mathcal{T}} \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in X, p_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}} \end{aligned}$$

gibt.

BEWEIS. „ \Rightarrow “: Sei $\mathbf{u} \in X$ beliebig. Dann definieren

$$\begin{aligned} \langle \ell, \mathbf{v} \rangle_X &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in X \\ \langle \chi, q \rangle_M &= \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \quad \forall q \in M \end{aligned}$$

zwei stetige lineare Funktionale auf X bzw. M . Offensichtlich ist $(\mathbf{u}, 0)$ die eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} r \operatorname{div} \mathbf{v} &= \langle \ell, \mathbf{v} \rangle_X \quad \forall \mathbf{v} \in X \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{w} &= \langle \chi, q \rangle_M \quad \forall q \in M. \end{aligned}$$

Da das Paar $(X_{\mathcal{T}}, M_{\mathcal{T}})$ stabil ist, besitzt das entsprechende diskrete Problem eine eindeutige Lösung $(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}) \in X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}}$, und es gilt

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_1 + \|0 - p_{\mathcal{T}}\| \leq c \{ \|\ell\|_{X^*} + \|\chi\|_{M^*} \}$$

mit einer von \mathcal{T} unabhängigen Konstanten c . Setze $\pi_{\mathcal{T}} \mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathcal{T}}$. Offensichtlich ist die zweite Bedingung erfüllt. Die erste Bedingung folgt aus obiger Abschätzung und

$$\|\ell\|_{X^*} + \|\chi\|_{M^*} \leq c^* |\mathbf{u}|_1.$$

„ \Leftarrow “: Sei $p_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}$ beliebig mit $\|p_{\mathcal{T}}\| = 1$. Wegen Satz II.3.3 (S. 45) gibt es ein $\beta > 0$, das weder von $p_{\mathcal{T}}$ noch von \mathcal{T} abhängt, und ein $\mathbf{v} \in X$ mit

$$|\mathbf{v}|_1 = 1 \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v} \geq \beta.$$

Dann folgt

$$|\pi_{\mathcal{T}} \mathbf{v}|_1 \leq c \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div}(\pi_{\mathcal{T}} \mathbf{v}) \geq \beta.$$

Also ist

$$\sup_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}}{|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_1} \geq \frac{\int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div}(\pi_{\mathcal{T}} \mathbf{v})}{|\pi_{\mathcal{T}} \mathbf{v}|_1} \geq \frac{\beta}{c}. \quad \square$$

BEMERKUNG II.5.5 (Commuting diagram property). Bezeichne mit $\Pi_{\mathcal{T}} : L_0^2(\Omega) \rightarrow M_{\mathcal{T}}$ die L^2 -Projektion. Dann besagt die zweite Bedingung von Satz II.5.4

$$\Pi_{\mathcal{T}}(\operatorname{div} \mathbf{v}) = \operatorname{div}(\pi_{\mathcal{T}} \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in X,$$

d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X = H_0^1(\Omega)^n & \xrightarrow{\operatorname{div}} & M = L_0^2(\Omega) \\ \pi_{\mathcal{T}} \downarrow & & \downarrow \Pi_{\mathcal{T}} \\ X_{\mathcal{T}} & \xrightarrow{\operatorname{div}} & M_{\mathcal{T}} \end{array}$$

ist kommutativ. Daher wird diese Bedingung häufig auch als *commuting diagram property* bezeichnet.

SATZ II.5.6 (Abgeschwächte Stabilität). *Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:*

(1) *Durch*

$$\|\varphi\|_{\mathcal{T}} = \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \|\nabla \varphi\|_K^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} h_E \|\mathbb{J}_E(\varphi)\|_E^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

wird eine Norm auf $M_{\mathcal{T}}$ definiert.

(2) *Es ist $[S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^n \subset X_{\mathcal{T}}$.*

(3) *Es gibt ein von \mathcal{T} unabhängiges $\beta^* > 0$ mit*

$$\inf_{p_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}} \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}}{|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_1 \|p_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{T}}} \geq \beta^*.$$

Dann ist das Paar $(X_{\mathcal{T}}, M_{\mathcal{T}})$ stabil.

BEWEIS. Sei $p_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}$ mit $\|p_{\mathcal{T}}\| = 1$ beliebig. Wegen Bedingung (1) existiert $\eta = \|p_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{T}}$. Wegen Satz II.3.3 (S. 45) gibt es ein $\beta > 0$, das weder von $p_{\mathcal{T}}$ noch von \mathcal{T} abhängt, und ein $\mathbf{v} \in X$ mit

$$|\mathbf{v}|_1 = 1 \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v} \geq \beta.$$

Setze $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} = \mathcal{J}_{\mathcal{T}} \mathbf{v}$, wobei $\mathcal{J}_{\mathcal{T}}$ der Quasi-Interpolationsoperator aus §I.4 ist. Wegen Bedingung (2) ist $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$. Wegen der Fehlerabschätzungen (I.4.3) (S. 31) für $\mathcal{J}_{\mathcal{T}}$ gibt es Konstanten c_1, c_2 , die nicht von \mathcal{T} abhängen, mit

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_1 &\leq c_1 |\mathbf{v}|_1 = c_1 \\ \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^{-2} \|\nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\mathcal{T}})\|_K^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} h_E^{-1} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_E^2 \right\}^{\frac{1}{2}} &\leq c_2 |\mathbf{v}|_1 = c_2. \end{aligned}$$

Wegen der Eigenschaften von \mathbf{v} ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} &= \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v} + \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \mathbf{v}) \\ &\geq \beta + \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Elementweise partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \mathbf{v}) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \left\{ - \int_K \nabla p_{\mathcal{T}} \cdot (\mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \mathbf{v}) + \int_{\partial K} p_{\mathcal{T}} \mathbf{n}_K \cdot (\mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \mathbf{v}) \right\} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \nabla p_{\mathcal{T}} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \int_E \mathbb{J}_E(p_{\mathcal{T}}) \mathbf{n}_E \cdot (\mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Anwenden der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt somit

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \mathbf{v}) \\
& \leq \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K \|\nabla p_{\mathcal{T}}\|_K h_K^{-1} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_K \\
& \quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} h_E^{\frac{1}{2}} \|\mathbb{J}_E(p_{\mathcal{T}})\|_E h_E^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_E \\
& \leq \|p_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^{-2} \|\nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\mathcal{T}})\|_K^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} h_E^{-1} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_E^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
& \leq c_2 \eta.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\sup_{\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}}{|\mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_1} \geq \frac{\int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}}{|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_1} \geq \frac{1}{c_1} (\beta - c_2 \eta).$$

Zusammen mit Bedingung (3) folgt hieraus

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}}{|\mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_1} & \geq \max \left\{ \beta^* \eta, \frac{1}{c_1} (\beta - c_2 \eta) \right\} \\
& \geq \min_{z \geq 0} \max \left\{ \beta^* z, \frac{1}{c_1} (\beta - c_2 z) \right\} \\
& = \beta^* \frac{\frac{\beta}{c_1}}{\beta^* + \frac{c_2}{c_1}} \\
& = \frac{\beta \beta^*}{c_1 \beta^* + c_2}. \quad \square
\end{aligned}$$

BEMERKUNG II.5.7 (Erfüllbarkeit der Voraussetzungen). Bedingung (1) von Satz II.5.6 ist erfüllt, falls die Funktionen in $M_{\mathcal{T}}$ elementweise stetig differenzierbar sind. Bedingung (2) ist für alle praxisrelevanten Finite Element Räume erfüllt.

Beispiel II.5.3 und Satz II.5.6 legen die Vermutung nahe, dass man bei stückweise konstanten bzw. linearen Druckapproximationen den Geschwindigkeitsraum mit zusätzlichen Freiheitsgraden auf den Elementrändern bzw. im Elementinnern anreichern muss, um eine stabile Diskretisierung zu erhalten. Für diese zusätzlichen Freiheitsgrade benutzen wir die Blasenfunktionen aus §I.4 (S. 26).

SATZ II.5.8 (Bernardi-Raugel-Element). *Das Paar $([S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^n \oplus \mathcal{B}_{\mathcal{E}}, S^{0,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega))$ mit $\mathcal{B}_{\mathcal{E}} = \operatorname{span}\{\psi_E \mathbf{n}_E : E \in \mathcal{E}_{\Omega}\}$ ist stabil.*

BEWEIS. Wir wenden Satz II.5.4 an. Sei dazu $p_{\mathcal{T}} \in S^{0,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega)$ und $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n$ sowie $\mathcal{J}_{\mathcal{T}} : H_0^1(\Omega)^n \rightarrow [S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^n$ der Quasi-Interpolationsoperator aus §I.4 (S. 26). Definiere $\pi_{\mathcal{T}} : X \rightarrow X_{\mathcal{T}}$ durch

$$\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{u} = \mathcal{J}_{\mathcal{T}}\mathbf{u} + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \psi_E \mathbf{n}_E \left\{ \int_E (\mathbf{u} - \mathcal{J}_{\mathcal{T}}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_E \right\} \left\{ \int_E \psi_E \right\}^{-1}.$$

Dann gilt für jedes $E \in \mathcal{E}_{\Omega}$ und jedes $\mathbf{u} \in X$

$$(II.5.3) \quad \int_E (\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_E = \int_E \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_E.$$

Da $\nabla p_{\mathcal{T}}$ elementweise verschwindet und $\mathbb{J}_E(p_{\mathcal{T}})$ auf den Kanten bzw. Seitenflächen konstant ist, erhalten wir mit elementweiser partieller Integration für jedes $\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{w} &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_{\partial K} p_{\mathcal{T}} \mathbf{n}_K \cdot \pi_{\mathcal{T}}\mathbf{w} = \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \int_E \mathbb{J}_E(p_{\mathcal{T}}) \mathbf{n}_E \cdot \pi_{\mathcal{T}}\mathbf{w} \\ &= \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \mathbb{J}_E(p_{\mathcal{T}}) \int_E \mathbf{n}_E \cdot \pi_{\mathcal{T}}\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Diese Identität mit $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ und $\mathbf{w} = \pi_{\mathcal{T}}\mathbf{u}$ und (II.5.3) beweisen die zweite Bedingung aus Satz II.5.4.

Zum Nachweis der ersten Bedingung benutzen wir die Eigenschaften (I.4.3) (S. 31) von $\mathcal{J}_{\mathcal{T}}$ und (I.4.4) (S. 32) der Blasenfunktionen. Zudem bezeichnen wir mit $|E|$ das $(n-1)$ -dimensionale Lebesgue-Maß von E und nutzen aus, dass $|E| \leq ch_E^{n-1}$ ist. Aus diesen Eigenschaften und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt für jedes Element $K \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} |\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{u}|_{1;K} &\leq |\mathcal{J}_{\mathcal{T}}\mathbf{u}|_{1;K} \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_K} |\psi_E|_{1;K} \left| \int_E (\mathbf{u} - \mathcal{J}_{\mathcal{T}}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_E \right| \left| \int_E \psi_E \right|^{-1} \\ &\leq c_1 |\mathbf{u}|_{1;\tilde{\omega}_K} + \sum_{E \in \mathcal{E}_K} c_2 h_E^{-n/2} |E|^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u} - \mathcal{J}_{\mathcal{T}}\mathbf{u}\|_E \\ &\leq c_1 |\mathbf{u}|_{1;\tilde{\omega}_K} + \sum_{E \in \mathcal{E}_K} c_3 h_E^{-\frac{n}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}} |\mathbf{u}|_{1;\tilde{\omega}_K} \\ &\leq c_4 |\mathbf{u}|_{1;\tilde{\omega}_K}. \end{aligned}$$

Nach Summation über alle Elemente folgt

$$|\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{u}|_1 \leq |\mathbf{u}|_1.$$

Dies beweist die erste Bedingung aus Satz II.5.4. \square

Wegen $\mathcal{B}_{\mathcal{E}} \subset [S_0^{n,0}(\mathcal{T})]^n$ folgt aus Satz II.5.8 unmittelbar:

KOROLLAR II.5.9 (Stabilität der $Pn/P0$ - und $Qn/Q0$ -Elemente).
Das Paar $([S_0^{n,0}(\mathcal{T})]^n, S_{\mathcal{T}}^{0,-1} \cap L_0^2(\Omega))$ ist stabil.

SATZ II.5.10 (Mini-Element). *Das Paar $([S_0^{1,0}(\mathcal{T}) \oplus \mathcal{B}_\mathcal{T}]^n, S^{1,0}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega))$ mit $\mathcal{B}_\mathcal{T} = \text{span}\{\psi_K : K \in \mathcal{T}\}$ ist stabil.*

BEWEIS. Wir wenden wieder Satz II.5.4 an. Diesmal definieren wir $\pi_\mathcal{T} : H_0^1(\Omega)^n \rightarrow X_\mathcal{T}$ durch

$$\pi_\mathcal{T} \mathbf{u} = \mathcal{J}_\mathcal{T} \mathbf{u} + \sum_{K \in \mathcal{T}} \psi_K \int_K (\mathbf{u} - \mathcal{J}_\mathcal{T} \mathbf{u}) \left\{ \int_K \psi_K \right\}^{-1}.$$

Dabei ist wieder $\mathcal{J}_\mathcal{T}$ der Quasi-Interpolationsoperator aus §I.4 (S. 26). Für alle $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n$ und alle $K \in \mathcal{T}$ gilt

$$(II.5.4) \quad \int_K \pi_\mathcal{T} \mathbf{u} = \int_K \mathbf{u}.$$

Seien $p_\mathcal{T} \in S_\mathcal{T}^{1,0} \cap L_0^2(\Omega)$ und $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n$. Da $p_\mathcal{T}$ stetig und $\nabla p_\mathcal{T}$ elementweise konstant ist, folgt mit dem Gaußschen Integralsatz für jedes $\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$

$$\int_\Omega p_\mathcal{T} \operatorname{div} \mathbf{w} = - \int_\Omega \nabla p_\mathcal{T} \cdot \mathbf{w} = - \sum_{K \in \mathcal{T}} \nabla p_\mathcal{T}|_K \cdot \int_K \mathbf{w}.$$

Diese Identität mit $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ und $\mathbf{w} = \pi_\mathcal{T} \mathbf{u}$ und (II.5.4) beweisen die zweite Bedingung aus Satz II.5.4.

Zum Nachweis der ersten Bedingung benutzen wir die Eigenschaften (I.4.3) (S. 31) von $\mathcal{J}_\mathcal{T}$ und (I.4.4) (S. 32) der Blasenfunktionen. Zudem bezeichnen wir mit $|K|$ das n -dimensionale Lebesgue-Maß von K und nutzen aus, dass $|K| \leq ch_E^n$ ist. Aus diesen Eigenschaften und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt für jedes Element $K \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} |\pi_\mathcal{T} \mathbf{u}|_{1;K} &\leq |\mathcal{J}_\mathcal{T} \mathbf{u}|_{1;K} + |\psi_K|_{1;K} \left| \int_K (\mathbf{u} - \mathcal{J}_\mathcal{T} \mathbf{u}) \right| \left| \int_K \psi_K \right|^{-1} \\ &\leq c_1 |\mathbf{u}|_{1;\tilde{\omega}_K} + c_2 h_K^{-\frac{n}{2}-1} |K|^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u} - \mathcal{J}_\mathcal{T} \mathbf{u}\|_K \\ &\leq c_3 |\mathbf{u}|_{1;\tilde{\omega}_K}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die erste Bedingung von Satz II.5.4. \square

SATZ II.5.11 (Taylor-Hood-Element). *Das Paar $([S_0^{2,0}(\mathcal{T})]^n, S^{1,0}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega))$ ist stabil.*

BEWEIS. Wir beschränken uns auf den einfachsten Fall ebener Dreieckselemente. Der allgemeine Fall wird ganz analog behandelt, erfordert aber größeren technischen Aufwand.

Wir wenden diesmal Satz II.5.6 an. Offensichtlich müssen wir nur noch Bedingung (3) nachweisen. Sei dazu $p_\mathcal{T} \in S^{1,0}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega)$ beliebig. Da $p_\mathcal{T}$ stetig und $\nabla p_\mathcal{T}$ elementweise konstant ist, gilt für jedes $\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$

$$\int_\Omega p_\mathcal{T} \operatorname{div} \mathbf{w} = - \int_\Omega \nabla p_\mathcal{T} \cdot \mathbf{w} = - \sum_{K \in \mathcal{T}} \nabla p_\mathcal{T}|_K \cdot \int_K \mathbf{w}.$$

Jeder Kante $E \in \mathcal{E}_\Omega$ ordnen wir einen parallelen Einheitsvektor \mathbf{t}_E zu. Wegen der Regularität von \mathcal{T} gibt es eine Konstante c_0 , so dass für alle $z \in \mathbb{R}^2$ und alle $K \in \mathcal{T}$ gilt

$$|z|^2 \leq c_0 \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega \cap \partial K} |\mathbf{t}_E \cdot z|^2.$$

Definiere $\mathbf{u}_\mathcal{T} \in [S_0^{2,0}(\mathcal{T})]^n$ durch

$$\mathbf{u}_\mathcal{T} = - \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \psi_E h_E^2 \frac{\partial p_\mathcal{T}}{\partial \mathbf{t}_E} \mathbf{t}_E.$$

Bezeichne mit m_E den Mittelpunkt der Kante E . Dann gilt für jedes Dreieck K

$$\int_K \mathbf{u}_\mathcal{T} = \frac{1}{3} |K| \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega \cap \partial K} \mathbf{u}_\mathcal{T}(m_E) = -\frac{1}{3} |K| \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega \cap \partial K} h_E^2 \frac{\partial p_\mathcal{T}}{\partial \mathbf{t}_E} \mathbf{t}_E$$

und daher

$$\begin{aligned} \int_\Omega p_\mathcal{T} \operatorname{div} \mathbf{u}_\mathcal{T} &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega \cap \partial K} \frac{1}{3} |K| h_E^2 \left| \frac{\partial p_\mathcal{T}}{\partial \mathbf{t}_E} \right|^2 \\ &\geq c_0^{-1} \sum_{K \in \mathcal{T}} \frac{1}{3} |K| |\nabla p_\mathcal{T}|^2 \min_{E \in \mathcal{E}_\Omega \cap \partial K} h_E^2 \\ &\geq c \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \|\nabla p_\mathcal{T}\|_K^2 \\ &= c \|p_\mathcal{T}\|_\mathcal{T}^2. \end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass wegen der Regularität von \mathcal{T}

$$\min_{E \in \mathcal{E}_\Omega \cap \partial K} h_E^2 \geq c h_K^2$$

ist mit einer von K unabhängigen Konstanten.

Durch Transformation auf das Referenzelement prüfen wir andererseits leicht nach, dass für alle $K \in \mathcal{T}$ gilt

$$|\mathbf{u}_\mathcal{T}|_{1;K}^2 \leq c h_K^{-2} |K| \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega \cap \partial K} |\mathbf{u}_\mathcal{T}(m_E)|^2$$

mit einer von K unabhängigen Konstanten. Damit folgt

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_\mathcal{T}|_1^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}} |\mathbf{u}_\mathcal{T}|_{1;K}^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{T}} c h_K^{-2} |K| \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega \cap \partial K} h_E^4 \left| \frac{\partial p_\mathcal{T}}{\partial \mathbf{t}_E} \right|^2 \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}} c^* h_K^2 |K| |\nabla p_\mathcal{T}|^2 \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} c^* h_K^2 \|\nabla p_\mathcal{T}\|_K^2 \\ &= c^* \|p_\mathcal{T}\|_\mathcal{T}^2. \end{aligned}$$

Dies beweist Bedingung (3) von Satz II.5.6. □

SATZ II.5.12 (Modifiziertes Taylor-Hood-Element). *Bezeichne mit $\mathcal{T}_{\frac{1}{2}}$ die Unterteilung, die aus \mathcal{T} durch Verbinden der Kantenmittelpunkte entsteht. Dann ist das Paar $([S_0^{1,0}(\mathcal{T}_{\frac{1}{2}})]^n, S^{1,0}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega))$ stabil.*

BEWEIS. Der Beweis ist völlig analog zu dem von Satz II.5.11. Man muss lediglich die Blasenfunktionen ψ_E durch die Basisfunktionen von $S_0^{1,0}(\mathcal{T}_{\frac{1}{2}})$ zu den Kantenmittelpunkten ersetzen. \square

SATZ II.5.13 (Taylor-Hood-Elemente höherer Ordnung). *Das Paar $([S_0^{k,0}(\mathcal{T})]^2, S^{k-1,0}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega))$ ist für jedes $k \geq 3$ stabil.*

BEWEIS. Wir betrachten nur den einfachsten Fall ebener Dreieckselemente und $k = 3$. Der allgemeine Fall ist in [2, 3, 4] behandelt. Die Beweisidee für $k = 3$ und ebene Dreieckselemente ist die gleiche wie im Beweis von Satz II.5.11. Zusätzlich benötigen wir eine Quadraturformel der Ordnung 4. Bezeichne dazu die Eckpunkte von $K \in \mathcal{T}$ mit $z_{K,1}, z_{K,2}, z_{K,3}$ und setze

$$\begin{aligned} z_{K,123} &= \frac{1}{3}(z_{K,1} + z_{K,2} + z_{K,3}), \\ z_{K,ij} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{12}}{12}\right) z_{K,i} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{12}}{12}\right) z_{K,j}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \ i \neq j, \\ \omega_1 &= \frac{9}{20}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{60}, \quad \omega_3 = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $K \in \mathcal{T}$ und alle $\varphi \in \mathbb{P}_4(K)$

$$\int_K \varphi = |K| \left\{ \omega_1 \varphi(z_{K,123}) + \omega_2 \sum_{i=1}^3 \varphi(z_{K,i}) + \omega_3 \sum_{i \neq j} \varphi(z_{K,ij}) \right\}.$$

Sei $p_{\mathcal{T}} \in S^{2,0}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega)$ beliebig. Dann gibt es ein $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in [S_0^{3,0}(\mathcal{T})]^2$ mit folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}(z_{K,i}) &= 0 \\ \mathbf{u}_{\mathcal{T}}(z_{K,123}) &= -|K| \nabla p_{\mathcal{T}}(z_{K,123}) \\ \mathbf{u}_{\mathcal{T}}(z_{K,ij}) &= -h_E^2 \frac{\partial p_{\mathcal{T}}}{\partial \mathbf{t}_E}(z_{K,ij}) \mathbf{t}_E \end{aligned}$$

für alle $K \in \mathcal{T}$ und alle relevanten Indizes i, j . Da $p_{\mathcal{T}}$ stetig und $\nabla p_{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{u}_{\mathcal{T}}$ elementweise in \mathbb{P}_4 ist, folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} &= - \int_{\Omega} \nabla p_{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} |K| \left\{ \omega_1 |K| |\nabla p_{\mathcal{T}}(z_{K,123})|^2 + \omega_3 \sum_{i \neq j} h_E^2 \left| \frac{\partial p_{\mathcal{T}}}{\partial \mathbf{t}_E}(z_{K,ij}) \right|^2 \right\} \\ &\geq c \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 |K| \left\{ |\nabla p_{\mathcal{T}}(z_{K,123})|^2 + \sum_{i \neq j} \left| \frac{\partial p_{\mathcal{T}}}{\partial \mathbf{t}_E}(z_{K,ij}) \right|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Durch Transformation auf das Referenzelement folgt andererseits für jedes $K \in \mathcal{T}$

$$|K| \left\{ |\nabla p_{\mathcal{T}}(z_{K,123})|^2 + \sum_{i \neq j} \left| \frac{\partial p_{\mathcal{T}}}{\partial \mathbf{t}_E}(z_{K,ij}) \right|^2 \right\} \geq c^* \|\nabla p_{\mathcal{T}}\|_K^2.$$

Also ist

$$\int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \geq c \|\nabla p_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{T}}^2.$$

Durch Transformation auf das Referenzelement folgt wiederum für jedes $K \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_{1;K}^2 &\leq c \left\{ |\mathbf{u}_{\mathcal{T}}(z_{K,123})|^2 + \sum_{i \neq j} |\mathbf{u}_{\mathcal{T}}(z_{K,ij})|^2 \right\} \\ &= c \left\{ |K|^2 |\nabla p_{\mathcal{T}}(z_{K,123})|^2 + \sum_{i \neq j} h_E^4 \left| \frac{\partial p_{\mathcal{T}}}{\partial \mathbf{t}_E}(z_{K,ij}) \right|^2 \right\} \\ &\leq c^* h_K^2 |K| \left\{ |\nabla p_{\mathcal{T}}(z_{K,123})|^2 + \sum_{i \neq j} h_E^4 \left| \frac{\partial p_{\mathcal{T}}}{\partial \mathbf{t}_E}(z_{K,ij}) \right|^2 \right\} \\ &\leq c'' h_K^2 \|\nabla p_{\mathcal{T}}\|_K^2. \end{aligned}$$

Also ist auch $|\mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_1 \leq c \|p_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{T}}$. Hieraus folgt Bedingung (3) von Satz II.5.6. Die beiden anderen Bedingungen sind offensichtlich erfüllt. \square

SATZ II.5.14 (Dreieckselemente höherer Ordnung mit unstetigen Drücken). *Betrachte ebene Dreieckselemente. Für $K \in \mathcal{T}$ und $m \geq 2$ bezeichne*

$$\tilde{\mathbb{P}}_{m-2}(K) = \operatorname{span} \{x_1^i x_2^{m-2-i} : 0 \leq i \leq m-2\}$$

den Raum der homogenen Polynome vom Grad $m-2$ auf K . Setze

$$B_{\mathcal{T},m} = \operatorname{span} \left\{ \psi_K v : v \in \tilde{\mathbb{P}}_{m-2}(K), K \in \mathcal{T} \right\}$$

mit ψ_K wie in §I.4 (S. 26). Dann ist das Paar $([S_0^{m,0}(\mathcal{T}) \oplus B_{\mathcal{T},m}]^2, S^{m-1,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega))$ für jedes $m \geq 2$ stabil.

BEWEIS. Sei $p_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}$ mit $\|p_{\mathcal{T}}\| = 1$ beliebig. Bezeichne mit $\bar{p}_{\mathcal{T}} \in S^{0,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega)$ die L^2 -Projektion von $p_{\mathcal{T}}$ auf $S^{0,-1}(\mathcal{T})$. Dann ist wegen der Poincaréschen Ungleichung

$$\|p_{\mathcal{T}} - \bar{p}_{\mathcal{T}}\| \leq \frac{1}{\pi} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \|\nabla p_{\mathcal{T}}\|_K^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Da wir ebene Dreieckselemente betrachten und $m \geq 2$ ist, gilt $[S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^2 \oplus \mathcal{B}_{\mathcal{E}} \subset X_{\mathcal{T}}$ mit $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ wie in Satz II.5.8. Also gibt es ein $\beta^* > 0$, das weder von $p_{\mathcal{T}}$ noch von \mathcal{T} abhängt, und ein $\bar{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$ mit

$$|\bar{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}}|_1 = 1 \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} \bar{p}_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}} \geq \beta^* \|\bar{p}_{\mathcal{T}}\|.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}} &= \int_{\Omega} \bar{p}_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}} + \int_{\Omega} (p_{\mathcal{T}} - \bar{p}_{\mathcal{T}}) \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}} \\
&\geq \beta^* \|\bar{p}_{\mathcal{T}}\| - \|p_{\mathcal{T}} - \bar{p}_{\mathcal{T}}\| \sqrt{2} |\bar{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}}|_1 \\
&\geq \beta^* \|p_{\mathcal{T}}\| - \beta^* \|p_{\mathcal{T}} - \bar{p}_{\mathcal{T}}\| - \sqrt{2} \|p_{\mathcal{T}} - \bar{p}_{\mathcal{T}}\| \\
&\geq \beta^* - (\sqrt{2} + \beta^*) \frac{1}{\pi} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \|\nabla p_{\mathcal{T}}\|_K^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Mit

$$\eta = \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \|\nabla p_{\mathcal{T}}\|_K^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\text{(II.5.5)} \quad \sup_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}}{|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_1} &\geq \frac{\int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}}}{|\bar{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}}|_1} \\
&\geq \beta^* - (\sqrt{2} + \beta^*) \frac{1}{\pi} \eta.
\end{aligned}$$

Betrachte nun

$$\hat{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}} = - \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \psi_K \nabla p_{\mathcal{T}}.$$

Da $\nabla p_{\mathcal{T}}$ elementweise in \mathbb{P}_{m-2} ist, ist $\hat{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$. Da $\hat{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}}$ auf den Dreieckskanten verschwindet, folgt mit elementweiser partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}} &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}} = - \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \nabla p_{\mathcal{T}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \int_K \psi_K |\nabla p_{\mathcal{T}}|^2.
\end{aligned}$$

Damit folgt aus (I.4.4) (S. 32)

$$\int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}} \geq c_1 \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \|\nabla p_{\mathcal{T}}\|_K^2 = c_1 \eta^2$$

und

$$|\hat{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}}|_1 \leq c_2 \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \|\nabla p_{\mathcal{T}}\|_K^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = c_2 \eta.$$

Also ist

$$\text{(II.5.6)} \quad \sup_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}}{|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_1} \geq \frac{\int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}}}{|\hat{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}}|_1} \geq \frac{c_1}{c_2} \eta.$$

Aus den Abschätzungen (II.5.5) und (II.5.6) ergibt sich die behauptete Stabilität mit den gleichen Argumenten wie im Beweis von Satz II.5.6. \square

BEMERKUNG II.5.15 (Höhere Raumdimensionen). Satz II.5.14 lässt sich mit einer kleinen Modifikation auf n -dimensionale simpliziale Elemente mit $n \geq 3$ übertragen. Da die Funktionen ψ_E stückweise Polynome vom Grad n sind, ist $\mathcal{B}_{\mathcal{E}} \subset [S_0^{n,0}(\mathcal{T})]^n$. Daher überträgt sich der Beweis von Satz II.5.14 direkt auf den Fall $m \geq n$ und liefert die Stabilität der Paare $([S_0^{m,0}(\mathcal{T}) \oplus B_{\mathcal{T},m}]^n, S^{m-1,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega))$ für alle $m \geq n$. Für $2 \leq m < n$ erhält man analog die Stabilität der Paare $([S_0^{m,0}(\mathcal{T}) \oplus B_{\mathcal{T},m}]^n \oplus \mathcal{B}_{\mathcal{E}}, S^{m-1,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega))$.

BEMERKUNG II.5.16 (Scott-Vogelius-Elemente). Für ebene Dreiecksnetze, die einer Zusatzbedingung genügen, kann man auf den Term $B_{\mathcal{T},m}$ in Satz II.5.14 verzichten [14]. Zur Beschreibung dieser Zusatzbedingung nennen wir einen Dreieckseckpunkt *singulär* (vgl. Abbildung II.5.2), wenn die Kanten, die sich in diesem Punkt treffen, auf zwei Geraden liegen. Ist der Dreieckseckpunkt x nicht singulär, bezeichnen wir mit k die Zahl der angrenzenden Dreiecke und mit $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ die anliegenden Winkel und setzen $R(x) = \max\{|\alpha_i + \alpha_j - \pi| : 1 \leq i, j \leq k, i - j = 1 \pmod{k}\}$. Die erwähnte Zusatzbedingung an die Triangulierung fordert nun, dass die Triangulierung keine singulären Dreieckseckpunkte enthält und dass $\inf_{\mathcal{T}} \min_{x \in \mathcal{N}} R(x) > 0$ ist.

Die Notwendigkeit dieser Zusatzbedingung kann man sich wie folgt klar machen. Betrachte vier Dreiecke K_1, \dots, K_4 , die einen singulären Eckpunkt x_0 gemeinsam haben. Bezeichne mit \mathbf{t}_1 und \mathbf{t}_2 die normierten Richtungsvektoren der beiden Geraden, auf denen die von x_0 ausgehenden Dreieckskanten liegen. Sei $\mathbf{v} \in [S_0^{m,0}(\mathcal{T})]^2$ beliebig. Dann ist $\operatorname{div} \mathbf{v}$ elementweise eine Linearkombination der Ausdrücke $\frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i}{\partial \mathbf{t}_j}$, $1 \leq i, j \leq 2$, und die entsprechenden Koeffizienten sind auf allen vier Dreiecken die selben. Da \mathbf{v} stetig ist, folgt für $i \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} \lim_{K_1 \ni x \rightarrow x_0} \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i}{\partial \mathbf{t}_1}(x) &= \lim_{K_2 \ni x \rightarrow x_0} \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i}{\partial \mathbf{t}_1}(x) \\ \lim_{K_3 \ni x \rightarrow x_0} \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i}{\partial \mathbf{t}_1}(x) &= \lim_{K_4 \ni x \rightarrow x_0} \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i}{\partial \mathbf{t}_1}(x) \\ \lim_{K_1 \ni x \rightarrow x_0} \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i}{\partial \mathbf{t}_2}(x) &= \lim_{K_4 \ni x \rightarrow x_0} \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i}{\partial \mathbf{t}_2}(x) \\ \lim_{K_2 \ni x \rightarrow x_0} \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i}{\partial \mathbf{t}_2}(x) &= \lim_{K_3 \ni x \rightarrow x_0} \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i}{\partial \mathbf{t}_2}(x). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\sum_{i=1}^4 (-1)^i \lim_{K_i \ni x \rightarrow x_0} \operatorname{div} \mathbf{v}(x) = 0.$$

Also ist $\operatorname{div}([S_0^{m,0}(\mathcal{T})]^2)$ in einem echten Unterraum von $S^{m-1,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega)$ enthalten. Wäre aber das Paar $([S_0^{m,0}(\mathcal{T})]^2, S^{m-1,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega))$ stabil, so folgte wegen $\operatorname{div}([S_0^{m,0}(\mathcal{T})]^2) \subset S^{m-1,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega)$ sogar die Gleichheit $\operatorname{div}([S_0^{m,0}(\mathcal{T})]^2) = S^{m-1,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega)$.

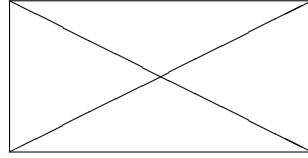


ABBILDUNG II.5.2. Singulärer Punkt

II.6. Petrov-Galerkin Stabilisierung

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen, insbesondere die Sätze II.5.8 (S. 56), II.5.10 (S. 58) und II.5.14 (S. 61), zeigen, dass man (fast) jedes Paar $(X_{\mathcal{T}}, M_{\mathcal{T}})$ stabilisieren kann, indem man Funktionen der Form $\psi_K \mathbf{v}$, $\psi_E \mathbf{w}$ zu dem Geschwindigkeitsraum $X_{\mathcal{T}}$ hinzufügt. Dieses Ergebnis ist zwar theoretisch sehr beruhigend, für die Praxis aber nur zum Teil befriedigend. Denn zum einen wird der Geschwindigkeitsraum und damit die Zahl der Unbekannten vergrößert und zum anderen möchte man häufig unbedingt mit den ursprünglichen Ansatzräumen arbeiten, da sie z.B. besonders einfache Datenstrukturen erlauben. Ein Beispiel hierfür ist die in der Praxis sehr beliebte sog. *equal order interpolation*, d.h. $X_{\mathcal{T}} = [S_0^{m,0}(\mathcal{T})]^n$, $M_{\mathcal{T}} = S^{m,0}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega)$, bei der Druck und Geschwindigkeit die gleichen Freiheitsgrade haben. In diesem Abschnitt wollen wir daher einen anderen Zugang betrachten, bei dem für die Stabilisierung die Bilinearformen a und b und die linearen Funktionale ℓ und χ modifiziert werden. Das folgende Beispiel motiviert unsere Vorgehensweise und zeigt zugleich, dass die Zugänge dieses und des letzten Paragraphen in gewissem Sinne äquivalent sind.

BEISPIEL II.6.1 (Mini-Element). Wir betrachten das Mini-Element aus Satz II.5.10 (S. 58) für eine ebene Dreieckszerlegung. Sei $(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}})$ die eindeutige Lösung des diskreten Stokes Problems

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} : \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in [S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^2 \oplus \mathcal{B}_{\mathcal{T}} \\ \int_{\Omega} q_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} &= 0 \quad \forall q_{\mathcal{T}} \in S^{1,0}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

Dabei nehmen wir der Einfachheit halber an, dass $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^2$ ist. Die Geschwindigkeit $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}$ lässt sich eindeutig in einen „linearen Anteil“ $\mathbf{u}_{\mathcal{T},L} \in [S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^2$ und einen „Blasenanteil“ $\mathbf{u}_{\mathcal{T},B} \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ zerlegen: $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \mathbf{u}_{\mathcal{T},L} + \mathbf{u}_{\mathcal{T},B}$. Da $\mathbf{u}_{\mathcal{T},B}$ auf den Elementrändern und $\Delta \mathbf{v}_{\mathcal{T}}$ für jedes

$\mathbf{v}_\mathcal{T} \in [S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^2$ auf den Elementen verschwinden, ergibt sich mit dem Gaußschen Integralsatz für jedes $\mathbf{v}_\mathcal{T} \in [S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^2$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T},B} : \nabla \mathbf{v}_\mathcal{T} = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T},B} : \nabla \mathbf{v}_\mathcal{T} = - \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \mathbf{u}_{\mathcal{T},B} \cdot \Delta \mathbf{v}_\mathcal{T} = 0.$$

Also ist

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T},L} : \nabla \mathbf{v}_\mathcal{T} - \int_{\Omega} p_\mathcal{T} \operatorname{div} \mathbf{v}_\mathcal{T} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_\mathcal{T} \quad \forall \mathbf{v}_\mathcal{T} \in [S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^2.$$

Ebenso folgt für die Koeffizienten $\boldsymbol{\alpha}_K$ in der Darstellung

$$\mathbf{u}_{\mathcal{T},B} = \sum_{K \in \mathcal{T}} \boldsymbol{\alpha}_K \psi_K$$

für $i \in \{1, 2\}$ und $K \in \mathcal{T}$ die Identität

$$\begin{aligned} & \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_i \psi_K \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\psi_K \mathbf{e}_i) \\ &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T},L} : \nabla (\psi_K \mathbf{e}_i) + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T},B} : \nabla (\psi_K \mathbf{e}_i) - \int_{\Omega} p_\mathcal{T} \operatorname{div} (\psi_K \mathbf{e}_i) \\ &= \boldsymbol{\alpha}_{K,i} \int_K |\nabla \psi_K|^2 + \int_K \frac{\partial p_\mathcal{T}}{\partial x_i} \psi_K \end{aligned}$$

und damit

$$\boldsymbol{\alpha}_K = \left\{ \int_K [\mathbf{f} - \nabla p_\mathcal{T}] \psi_K \right\} \left\{ \int_K |\nabla \psi_K|^2 \right\}^{-1}.$$

Definieren wir zur Abkürzung

$$\tilde{\gamma}_K = \left\{ \int_K |\nabla \psi_K|^2 \right\}^{-1}$$

und setzen die gewonnene Darstellung für $\mathbf{u}_{\mathcal{T},B}$ in die diskrete Massen-
gleichung ein, erhalten wir für jedes $q_\mathcal{T} \in S^{1,0}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} q_\mathcal{T} \operatorname{div} \mathbf{u}_\mathcal{T} \\ &= \int_{\Omega} q_\mathcal{T} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T},L} + \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K q_\mathcal{T} \operatorname{div} (\boldsymbol{\alpha}_K \psi_K) \\ &= \int_{\Omega} q_\mathcal{T} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T},L} - \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \psi_K \boldsymbol{\alpha}_K \cdot \nabla q_\mathcal{T} \\ &= \int_{\Omega} q_\mathcal{T} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T},L} - \sum_{K \in \mathcal{T}} \tilde{\gamma}_K \left\{ \int_K \psi_K \nabla q_\mathcal{T} \right\} \cdot \left\{ \int_K \psi_K [\mathbf{f} - \nabla p_\mathcal{T}] \right\}. \end{aligned}$$

Also ist $(\mathbf{u}_{\mathcal{T},L}, p_{\mathcal{T}}) \in [S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^2 \times [S^{1,0}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega)]$ die Lösung des modifizierten Problems

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T},L} : \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in [S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^2 \\ \int_{\Omega} q_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T},L} + (p_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}})_{\mathcal{T}} &= \chi_{\mathcal{T}}(q_{\mathcal{T}}) \quad \forall q_{\mathcal{T}} \in S^{1,0}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} (p_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}})_{\mathcal{T}} &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \gamma_K \int_K \nabla p_{\mathcal{T}} \cdot \nabla q_{\mathcal{T}} \\ \chi_{\mathcal{T}}(q_{\mathcal{T}}) &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \tilde{\gamma}_K \left\{ \int_K \psi_K \nabla q_{\mathcal{T}} \right\} \cdot \left\{ \int_K \psi_K \mathbf{f} \right\} \\ \gamma_K &= \tilde{\gamma}_K |K|^{-1} \left\{ \int_K \psi_K \right\}^2. \end{aligned}$$

Man beachte, dass γ_K zu h_K^2 proportional ist.

Wir betrachten im Folgenden eine affin äquivalente, zulässige und reguläre Unterteilung \mathcal{T} eines polyhedralen Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, wie in §I.4 (S. 26) und zugehörige Finite Element Räume $X_{\mathcal{T}} \subset H_0^1(\Omega)^n$ und $M_{\mathcal{T}} \subset L_0^2(\Omega)$. Wie in §II.5 (S. 51) ordnen wir diesen Räumen maximal gewählte Zahlen $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ mit $[S_0^{\mu,0}(\mathcal{T})]^n \subset X_{\mathcal{T}}$ und $S^{\nu,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega) \subset M_{\mathcal{T}}$ oder $S^{\nu,0}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega) \subset M_{\mathcal{T}}$ zu. Zusätzlich nehmen wir an, dass die Funktionen in $X_{\mathcal{T}}$ bzw. $M_{\mathcal{T}}$ elementweise zwei- bzw. einmal stetig differenzierbar sind. Insbesondere ist dann $\|\cdot\|_{\mathcal{T}}$ aus Satz II.5.6 (S. 54) eine Norm auf $M_{\mathcal{T}}$. Jedem Element $K \in \mathcal{T}$ und jeder Kante bzw. Fläche $E \in \mathcal{E}_{\Omega}$ ordnen wir zwei positive Parameter δ_K und δ_E zu. Die Wahl dieser Größen ist zunächst beliebig, wird aber später eingeschränkt. Wir definieren nun auf $X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}}$ eine Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{T}}$, eine Bilinearform $B_{\mathcal{T}}$ und ein lineares Funktional $\ell_{\mathcal{T}}$ durch

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{T}} &= \left\{ |\mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_1^2 + \|p_{\mathcal{T}}\|^2 + \|p_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{T}}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ B_{\mathcal{T}}([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}], [\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}]) &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} : \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} + \int_{\Omega} q_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}} \delta_K h_K^2 \int_K [-\Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \nabla p_{\mathcal{T}}] \cdot \nabla q_{\mathcal{T}} \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \delta_E h_E \int_E \mathbb{J}_E(p_{\mathcal{T}}) \mathbb{J}_E(q_{\mathcal{T}}) \\ \ell_{\mathcal{T}}([\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}]) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{T}} + \sum_{K \in \mathcal{T}} \delta_K h_K^2 \int_K \mathbf{f} \cdot \nabla q_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Dabei setzen wir der Einfachheit halber voraus, dass der Quellterm \mathbf{f} der Stokes Gleichungen quadrat-integrierbar ist. Man beachte, dass die δ_K - und δ_E -Terme in $B_{\mathcal{T}}$ und $\ell_{\mathcal{T}}$ die zusätzlichen Stabilisierungsterme

sind. Die Sprungterme in $B_{\mathcal{T}}$ verschwinden, wenn eine stetige Druckapproximation, d.h. $M_{\mathcal{T}} \subset C(\bar{\Omega})$, verwendet wird. Ebenso verschwindet der Term $\Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}}$ in $B_{\mathcal{T}}$, wenn die Geschwindigkeit stückweise linear ist.

Das neue diskrete Problem lautet nun:

Finde $[\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}] \in X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}}$, so dass für alle $[\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}] \in X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}}$ gilt

$$(II.6.1) \quad B_{\mathcal{T}}([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}], [\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}]) = \ell_{\mathcal{T}}([\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}]).$$

Wir untersuchen zunächst die Stabilität von $B_{\mathcal{T}}$ und damit die eindeutige Lösbarkeit von (II.6.1). Dazu definieren wir

$$\delta_{\max} = \max \left\{ \max_{K \in \mathcal{T}} \delta_K, \max_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \delta_E \right\},$$

$$\delta_{\min} = \begin{cases} \min \left\{ \min_{K \in \mathcal{T}} \delta_K, \min_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \delta_E \right\} & \text{falls } M_{\mathcal{T}} \not\subset C(\bar{\Omega}), \\ \min_{K \in \mathcal{T}} \delta_K & \text{falls } M_{\mathcal{T}} \subset C(\bar{\Omega}). \end{cases}$$

SATZ II.6.2 (inf-sup-Stabilität). *Es gibt eine Konstante $\delta_0 > 0$, die nur von der Konstanten $C_{\mathcal{T}}$ in der Regularitätsbedingung an \mathcal{T} abhängt, so dass für alle Parameter δ_K, δ_E mit $\delta_{\max} \leq \delta_0$ und $\delta_{\min} > 0$ gilt: Es gibt eine Konstante β , die nur von δ_{\min} abhängt, mit*

$$\inf_{[\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}] \in X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}} \setminus \{0\}} \sup_{[\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}] \in X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}} \setminus \{0\}} \frac{B_{\mathcal{T}}([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}], [\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}])}{\|[\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]\|_{\mathcal{T}} \|[\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}]\|_{\mathcal{T}}} \geq \beta.$$

Es ist $\beta \approx \delta_{\min}$.

BEWEIS. 1. *Schritt:* Wir zeigen, dass es ein δ_0 der beschriebenen Art gibt, so dass für alle Parameter δ_K, δ_E mit $\delta_{\max} \leq \delta_0$ und $\delta_{\min} > 0$ und alle $[\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}] \in X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}}$ gilt

$$B_{\mathcal{T}}([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}], [\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]) \geq \frac{1}{2} \delta_{\min} \left\{ \|[\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]\|_{\mathcal{T}}^2 - \|p_{\mathcal{T}}\|^2 \right\}.$$

Sei dazu $[\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}] \in X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}}$ beliebig. Dann folgt aus der Definition von $B_{\mathcal{T}}$

$$\begin{aligned} & B_{\mathcal{T}}([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}], [\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]) \\ &= \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}}|^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}} \delta_K h_K^2 \int_K [-\Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \nabla p_{\mathcal{T}}] \cdot \nabla p_{\mathcal{T}} \\ & \quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \delta_E h_E \int_E |\mathbb{J}_E(p_{\mathcal{T}})|^2 \\ & \geq |\mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_1^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}} \delta_K h_K^2 \|\nabla p_{\mathcal{T}}\|_K^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \delta_E h_E \|\mathbb{J}_E(p_{\mathcal{T}})\|_E^2 \\ & \quad - \sum_{K \in \mathcal{T}} \delta_K h_K^2 \|\Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_K \|\nabla p_{\mathcal{T}}\|_K. \end{aligned}$$

Aus (I.4.2) (S. 30) folgt

$$\|\Delta \mathbf{v}_\mathcal{T}\|_K \leq c_0 h_K^{-1} |\mathbf{v}_\mathcal{T}|_{1;K}$$

mit einer nur von $C_\mathcal{T}$ abhängigen Konstanten c_0 . Setzen wir dies in obige Abschätzung ein und wenden die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für Summen an, erhalten wir mit der Definition von $\|\cdot\|_\mathcal{T}$ aus Satz II.5.6 (S. 54)

$$\begin{aligned} & B_\mathcal{T}([\mathbf{u}_\mathcal{T}, p_\mathcal{T}], [\mathbf{u}_\mathcal{T}, p_\mathcal{T}]) \\ & \geq |\mathbf{u}_\mathcal{T}|_1^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}} \delta_K h_K^2 \|\nabla p_\mathcal{T}\|_K^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \delta_E h_E \|\mathbb{J}_E(p_\mathcal{T})\|_E^2 \\ & \quad - \sum_{K \in \mathcal{T}} c_0 \delta_K^{\frac{1}{2}} |\mathbf{u}_\mathcal{T}|_{1;K} \delta_K^{\frac{1}{2}} h_K \|\nabla p_\mathcal{T}\|_K \\ & \geq \sum_{K \in \mathcal{T}} \left(1 - \frac{1}{2} c_0^2 \delta_K\right) |\mathbf{u}_\mathcal{T}|_{1;K}^2 + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}} \delta_K h_K^2 \|\nabla p_\mathcal{T}\|_K^2 \\ & \quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \delta_E h_E \|\mathbb{J}_E(p_\mathcal{T})\|_E^2 \\ & \geq \left(1 - \frac{1}{2} c_0^2 \delta_{\max}\right) |\mathbf{u}_\mathcal{T}|_1^2 + \frac{1}{2} \delta_{\min} \|p_\mathcal{T}\|_\mathcal{T}^2. \end{aligned}$$

Setze $\delta_0 = \frac{2}{1+c_0^2}$. Dann folgt aus $\delta_{\max} \leq \delta_0$

$$1 - \frac{1}{2} c_0^2 \delta_{\max} \geq 1 - \frac{1}{2} c_0^2 \delta_0 = \frac{1}{1+c_0^2} = \frac{1}{2} \delta_0 \geq \frac{1}{2} \delta_{\max} \geq \frac{1}{2} \delta_{\min}.$$

Also ist dann

$$\begin{aligned} B_\mathcal{T}([\mathbf{u}_\mathcal{T}, p_\mathcal{T}], [\mathbf{u}_\mathcal{T}, p_\mathcal{T}]) & \geq \frac{1}{2} \delta_{\min} \{|\mathbf{u}_\mathcal{T}|_1^2 + \|p_\mathcal{T}\|_\mathcal{T}^2\} \\ & = \frac{1}{2} \delta_{\min} \{|||[\mathbf{u}_\mathcal{T}, p_\mathcal{T}]|||_\mathcal{T}^2 - \|p_\mathcal{T}\|_\mathcal{T}^2\}. \end{aligned}$$

2. Schritt: Sei δ_0 wie im 1. Schritt und $0 < \delta_{\min} \leq \delta_{\max} \leq \delta_0$. Wir zeigen nun die inf-sup-Bedingung für $B_\mathcal{T}$. Sei dazu $[\mathbf{u}_\mathcal{T}, p_\mathcal{T}] \in X_\mathcal{T} \times M_\mathcal{T}$ mit $|||[\mathbf{u}_\mathcal{T}, p_\mathcal{T}]|||_\mathcal{T} = 1$ beliebig. Gemäß Satz II.3.3 (S. 45) gibt es ein $\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$ mit

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = -p_\mathcal{T} \quad \text{und} \quad |\mathbf{w}|_1 \leq c_\Omega \|p_\mathcal{T}\|.$$

Sei $\mathbf{w}_\mathcal{T} = \mathcal{J}_\mathcal{T} \mathbf{w} \in [S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^n \subset X_\mathcal{T}$ die Quasi-Interpolierende von \mathbf{w} wie in §I.4 (S. 26). Dann ist

$$|\mathbf{w}_\mathcal{T}|_1 \leq c_1 c_\Omega \|p_\mathcal{T}\|$$

und

$$\begin{aligned}
& B_{\mathcal{T}}([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}], [\mathbf{w}_{\mathcal{T}}, 0]) \\
&= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} : \nabla \mathbf{w}_{\mathcal{T}} - \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \\
&= - \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{w} + \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\mathcal{T}}) + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} : \nabla \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \\
&= \|p_{\mathcal{T}}\|^2 + \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\mathcal{T}}) + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} : \nabla \mathbf{w}_{\mathcal{T}} \\
&\geq \|p_{\mathcal{T}}\|^2 + \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\mathcal{T}}) - |\mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_1 |\mathbf{w}_{\mathcal{T}}|_1 \\
&\geq \|p_{\mathcal{T}}\|^2 - c_1 c_{\Omega} \|p_{\mathcal{T}}\| |\mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_1 + \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\mathcal{T}}).
\end{aligned}$$

Als nächstes integrieren wir den letzten Summanden elementweise partiell und nutzen die Approximationseigenschaften (I.4.3) (S. 31) von $\mathcal{J}_{\mathcal{T}}$ aus. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\mathcal{T}}) \\
&= - \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \nabla p_{\mathcal{T}} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\mathcal{T}}) + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \int_E \mathbb{J}_E(p_{\mathcal{T}})(\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\mathcal{T}}) \cdot \mathbf{n}_E \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}} \|\nabla p_{\mathcal{T}}\|_K \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\mathcal{T}}\|_K + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \|\mathbb{J}_E(p_{\mathcal{T}})\|_E \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\mathcal{T}}\|_E \\
&\leq \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \|\nabla p_{\mathcal{T}}\|_K^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} h_E \|\mathbb{J}_E(p_{\mathcal{T}})\|_E^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^{-2} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\mathcal{T}}\|_K^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} h_E^{-1} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\mathcal{T}}\|_E^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|p_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{T}} c_2 |\mathbf{w}|_1 \\
&\leq c_2 c_{\Omega} \|p_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{T}} \|p_{\mathcal{T}}\|.
\end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Abschätzung für $B_{\mathcal{T}}([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}], [\mathbf{w}_{\mathcal{T}}, 0])$ ein, erhalten wir wegen $\|[\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]\|_{\mathcal{T}}^2 = |\mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_1^2 + \|p_{\mathcal{T}}\|^2 + \|p_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{T}}^2 = 1$

$$\begin{aligned}
B_{\mathcal{T}}([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}], [\mathbf{w}_{\mathcal{T}}, 0]) &\geq \|p_{\mathcal{T}}\|^2 - c_1 c_{\Omega} \|p_{\mathcal{T}}\| |\mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_1 - c_2 c_{\Omega} \|p_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{T}} \|p_{\mathcal{T}}\| \\
&\geq \frac{1}{4} \|p_{\mathcal{T}}\|^2 - c_1^2 c_{\Omega}^2 |\mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_1^2 - c_2^2 c_{\Omega}^2 \|p_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{T}}^2 \\
&\geq \frac{1}{4} \|p_{\mathcal{T}}\|^2 - c_3^2 c_{\Omega}^2 \{|\mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_1^2 + \|p_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{T}}^2\} \\
&= \left(c_3^2 c_{\Omega}^2 + \frac{1}{4} \right) \|p_{\mathcal{T}}\|^2 - c_3^2 c_{\Omega}^2
\end{aligned}$$

mit $c_3 = \max\{c_1, c_2\}$. Aus dieser Abschätzung und Schritt 1 folgt

$$\begin{aligned}
& \sup_{[\mathbf{v}_T, q_T] \in X_T \times M_T \setminus \{0\}} \frac{B_T([\mathbf{u}_T, p_T], [\mathbf{v}_T, q_T])}{\|[\mathbf{v}_T, q_T]\|_T} \\
& \geq \max \left\{ \frac{B_T([\mathbf{u}_T, p_T], [\mathbf{u}_T, p_T])}{\|[\mathbf{u}_T, p_T]\|_T}, \frac{B_T([\mathbf{u}_T, p_T], [\mathbf{w}_T, 0])}{\|[\mathbf{w}_T, 0]\|_T} \right\} \\
& \geq \max \left\{ \frac{1}{2} \delta_{\min} - \frac{1}{2} \delta_{\min} \|p_T\|^2, \frac{\frac{1}{4} + c_3^2 c_\Omega^2}{c_1 c_\Omega} \|p_T\| - \frac{c_3^2 c_\Omega}{c_1} \|p_T\|^{-1} \right\} \\
& \geq \min_{z \in \mathbb{R}_+^*} \max \left\{ \frac{1}{2} \delta_{\min} - \frac{1}{2} \delta_{\min} z^2, \frac{\frac{1}{4} + c_3^2 c_\Omega^2}{c_1 c_\Omega} z - \frac{c_3^2 c_\Omega}{c_1} z^{-1} \right\} \\
& > 0.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil die Funktion $z \mapsto \frac{1}{2} \delta_{\min} - \frac{1}{2} \delta_{\min} z^2$ auf $(0, 1)$ monoton fallend und positiv, die Funktion $z \mapsto \frac{\frac{1}{4} + c_3^2 c_\Omega^2}{c_1 c_\Omega} z - \frac{c_3^2 c_\Omega}{c_1} z^{-1}$ auf $\left(\sqrt{\frac{c_3^2 c_\Omega^2}{\frac{1}{4} + c_3^2 c_\Omega^2}}, \infty \right)$ monoton wachsend und positiv und $\sqrt{\frac{c_3^2 c_\Omega^2}{\frac{1}{4} + c_3^2 c_\Omega^2}} < 1$ ist. \square

Aus Satz II.6.2 folgt unmittelbar, dass das diskrete Problem (II.6.1) eindeutig lösbar ist. Der folgende Satz gibt eine Fehlerabschätzung für diese Lösung.

SATZ II.6.3 (Fehlerabschätzung). *Die Bezeichnungen und Voraussetzungen seien wie in Satz II.6.2. Bezeichne mit $[\mathbf{u}, p] \in X \times M$ die eindeutige schwache Lösung der Stokes Gleichungen und mit $[\mathbf{u}_T, p_T] \in X_T \times M_T$ die eindeutige Lösung von (II.6.1). Es sei $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^n$, $p \in H^1(\Omega)$. Dann ist*

$$\begin{aligned}
\|[\mathbf{u} - \mathbf{u}_T, p - p_T]\|_T \leq c \inf_{[\mathbf{v}_T, q_T] \in X_T \times M_T} \left\{ \|[\mathbf{u} - \mathbf{v}_T, p - q_T]\|_T \right. \\
\left. + \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \|\Delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}_T)\|_K^2 \right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

mit $c \approx \delta_{\max} \beta^{-1}$. Weiter gebe es ein $m \in \mathbb{N}^*$ mit $\mathbf{u} \in H^{m+1}(\Omega)^n$ und $p \in H^m(\Omega)$. Dann ist

$$\|[\mathbf{u} - \mathbf{u}_T, p - p_T]\|_T \leq c \left\{ h^{\min\{\mu, m\}} \|\mathbf{u}\|_{m+1} + h^{\min\{\nu+1, m\}} \|p\|_m \right\}.$$

BEWEIS. Sei $[\mathbf{v}_T, q_T] \in X_T \times M_T$ beliebig. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned}
\|[\mathbf{u} - \mathbf{u}_T, p - p_T]\|_T & \leq \|[\mathbf{u} - \mathbf{v}_T, p - q_T]\|_T \\
& \quad + \|[\mathbf{u}_T - \mathbf{v}_T, p_T - q_T]\|_T.
\end{aligned}$$

Aus Satz II.6.2 ergibt sich

$$\begin{aligned} & \|\|[\mathbf{u}_\mathcal{T} - \mathbf{v}_\mathcal{T}, p_\mathcal{T} - q_\mathcal{T}]\|\|_\mathcal{T} \\ & \leq \frac{1}{\beta} \sup_{[\mathbf{w}_\mathcal{T}, r_\mathcal{T}] \in X_\mathcal{T} \times M_\mathcal{T}} \frac{B_\mathcal{T}([\mathbf{u}_\mathcal{T} - \mathbf{v}_\mathcal{T}, p_\mathcal{T} - q_\mathcal{T}], [\mathbf{w}_\mathcal{T}, r_\mathcal{T}])}{\|\|[\mathbf{w}_\mathcal{T}, r_\mathcal{T}]\|\|_\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Für jedes $[\mathbf{w}_\mathcal{T}, r_\mathcal{T}] \in X_\mathcal{T} \times M_\mathcal{T}$ mit $\|\|[\mathbf{w}_\mathcal{T}, r_\mathcal{T}]\|\|_\mathcal{T} = 1$ ist

$$\begin{aligned} & B_\mathcal{T}([\mathbf{u}_\mathcal{T} - \mathbf{v}_\mathcal{T}, p_\mathcal{T} - q_\mathcal{T}], [\mathbf{w}_\mathcal{T}, r_\mathcal{T}]) \\ & = B_\mathcal{T}([\mathbf{u} - \mathbf{v}_\mathcal{T}, p - q_\mathcal{T}], [\mathbf{w}_\mathcal{T}, r_\mathcal{T}]) + B_\mathcal{T}([\mathbf{u}_\mathcal{T} - \mathbf{u}, p_\mathcal{T} - p], [\mathbf{w}_\mathcal{T}, r_\mathcal{T}]). \end{aligned}$$

Aus der Definition von $B_\mathcal{T}$ und $\ell_\mathcal{T}$ folgt die Galerkin Orthogonalität

$$\begin{aligned} & B_\mathcal{T}([\mathbf{u}_\mathcal{T} - \mathbf{u}, p_\mathcal{T} - p], [\mathbf{w}_\mathcal{T}, r_\mathcal{T}]) \\ & = \ell_\mathcal{T}([\mathbf{w}_\mathcal{T}, r_\mathcal{T}]) - B_\mathcal{T}([\mathbf{u}, p], [\mathbf{w}_\mathcal{T}, r_\mathcal{T}]) \\ & = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}_\mathcal{T} + \sum_{K \in \mathcal{T}} \delta_K h_K^2 \int_K \mathbf{f} \cdot \nabla r_\mathcal{T} \\ & \quad - \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{w}_\mathcal{T} + \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{w}_\mathcal{T} - \int_\Omega r_\mathcal{T} \operatorname{div} \mathbf{u} \\ & \quad - \sum_{K \in \mathcal{T}} \delta_K h_K^2 \int_K [-\Delta \mathbf{u} + \nabla p] \cdot \nabla r_\mathcal{T} - \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \delta_E h_E \int_E \mathbb{J}_E(p) \mathbb{J}_E(r_\mathcal{T}) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass \mathbf{u}, p die starke Form (I.2.15) (S. 13) der Stokes Gleichungen löst und wegen $p \in H^1(\Omega)$ die Sprünge von p über die Elementränder verschwinden.

Aus der Definition von $B_\mathcal{T}$ und von $\|\|\cdot\|\|_\mathcal{T}$ folgt weiter mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} & B_\mathcal{T}([\mathbf{u} - \mathbf{v}_\mathcal{T}, p - q_\mathcal{T}], [\mathbf{w}_\mathcal{T}, r_\mathcal{T}]) \\ & \leq |\mathbf{u} - \mathbf{v}_\mathcal{T}|_1 |\mathbf{w}_\mathcal{T}|_1 + \sqrt{n} \|p - q_\mathcal{T}\| |\mathbf{w}_\mathcal{T}|_1 + \sqrt{n} \|r_\mathcal{T}\| |\mathbf{u} - \mathbf{v}_\mathcal{T}|_1 \\ & \quad + \sum_{K \in \mathcal{T}} \delta_K h_K^2 \{ \|\Delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}_\mathcal{T})\|_K + \|\nabla(p - q_\mathcal{T})\|_K \} \|\nabla r_\mathcal{T}\|_K \\ & \quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \delta_E h_E \|\mathbb{J}_E(p - q_\mathcal{T})\|_E \|\mathbb{J}_E(r_\mathcal{T})\|_E \\ & \leq c \left\{ \|\|[\mathbf{u} - \mathbf{v}_\mathcal{T}, p - q_\mathcal{T}]\|\|_\mathcal{T}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \|\Delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}_\mathcal{T})\|_K^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \|\|[\mathbf{w}_\mathcal{T}, r_\mathcal{T}]\|\|_\mathcal{T}. \end{aligned}$$

Aus diesen Abschätzungen folgt die erste Fehlerabschätzung des Satzes. Die zweite Fehlerabschätzung des Satzes folgt aus der ersten und den Approximationseigenschaften (I.4.1) (S. 30) der Finite Element Räume. \square

Ein wesentlicher Schritt im Beweis von Satz II.6.3 ist die sog. *Galerkin Orthogonalität* des Fehlers. Sie gilt, da die zusätzlichen Stabilitätsterme in $B_{\mathcal{T}}$ und $\ell_{\mathcal{T}}$ konsistent sind, d.h. für die schwache Lösung der Stokes Gleichungen verschwinden.

Wie in Bemerkung II.5.2(3) (S. 52) ist wieder die Wahl $\nu = \mu - 1$ optimal.

Anders als in Satz II.5.1 (S. 51) benötigt die erste Fehlerabschätzung von Satz II.6.3, die dem Céa-Lemma entspricht, schon eine höhere Regularität der Lösung der Stokes Gleichungen. Satz II.6.3 kommt nicht mit der Regularität aus, die für die schwache Variationsformulierung benötigt wird. Diese zusätzliche Regularitätsvoraussetzung spiegelt sich auch in praktischen Rechnungen wider. Und zwar in Form eines Genauigkeitsverlustes bei Stokes Problemen, deren Lösung nicht die nötige Regularität aufweist, z.B. bei polygonalen Gebieten mit einspringenden Ecken.

II.7. Nicht-konforme Methoden

Bisher haben wir stets konforme Methoden betrachtet, d.h. es galt $X_{\mathcal{T}} \subset X$ und $M_{\mathcal{T}} \subset M$. Die wesentliche Bedingung ist hierbei natürlich die globale Stetigkeit der diskreten Geschwindigkeitsfelder. Wie in [22, §IV.1] wollen wir diese Restriktion nun aufgeben. Dafür werden wir eine Approximation erhalten, die exakt divergenzfrei ist und eine explizite lokale Basis des Raumes $V_{\mathcal{T}}$ besitzt.

Im Folgenden bezeichnet \mathcal{T} eine ebene, zulässige und reguläre Triangulierung des *einfach zusammenhängenden* polygonalen Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Für jede Dreieckskante E in \mathcal{E} bezeichnet m_E den Mittelpunkt. In Analogie zu [22, §IV.1] definieren wir den Raum der *Crouzeix-Raviart Elemente* durch

$$\begin{aligned} X_{\mathcal{T}} = \{ \varphi \in L^2(\Omega)^2 : \varphi|_K \in \mathbb{P}_1 \forall K \in \mathcal{T}, \\ \mathbb{J}_E(\varphi)(m_E) = 0 \forall E \in \mathcal{E}_{\Omega}, \\ \varphi(m_E) = 0 \forall E \in \mathcal{E}_{\Gamma} \}. \end{aligned}$$

Die Funktionen in $X_{\mathcal{T}}$ sind eindeutig bestimmt durch ihre Werte in den Kantenmittelpunkten. Durch

$$|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{T}} = \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} |\mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_{1;K}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

wird eine Norm auf $X_{\mathcal{T}}$ definiert. Für die Druckapproximation wählen wir

$$M_{\mathcal{T}} = S^{0,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega).$$

Wir definieren diskrete Analoga $a_{\mathcal{T}}$, $b_{\mathcal{T}}$ und $\ell_{\mathcal{T}}$ von a , b und ℓ durch

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} : \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \\ b_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}) &= - \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \\ \ell_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass diese Bilinear- bzw. Linearformen auch für Argumente aus X bzw. M definiert sind und mit a , b bzw. ℓ übereinstimmen, wenn die entsprechenden Argumente alle aus den Räumen X bzw. M sind.

Das diskrete Stokes Problem, das wir im Folgenden betrachten werden, lautet dann:

Finde $(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}) \in X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}}$ mit

$$(II.7.1) \quad \begin{aligned} a_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}) &= \ell_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \\ b_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}) &= 0 \quad \forall q_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

LEMMA II.7.1 (Koerzivität von $a_{\mathcal{T}}$ und inf-sup Bedingung für $b_{\mathcal{T}}$).

(1) Für alle $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$ gilt

$$a_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \geq |\mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{T}}^2.$$

(2) Es gibt ein $\tilde{\beta} > 0$, das nicht von \mathcal{T} abhängt, mit

$$\inf_{p_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}} \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \setminus \{0\}} \frac{b_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}})}{|\mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{T}} \|p_{\mathcal{T}}\|} \geq \tilde{\beta}.$$

(3) Sei

$$V_{\mathcal{T}} = \{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} : b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}) = 0 \forall p_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}\}.$$

Dann ist $V_{\mathcal{T}} \neq \{0\}$ und

$$V_{\mathcal{T}} = \{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} : \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} = 0\}.$$

BEWEIS. *ad (1)*: Folgt direkt aus der Definition von $a_{\mathcal{T}}$ und $|\cdot|_{\mathcal{T}}$.

ad (2): Wir definieren zunächst einen linearen Operator $\pi_{\mathcal{T}} : X \rightarrow X_{\mathcal{T}}$ durch

$$(\pi_{\mathcal{T}} \mathbf{v})(m_E) = \begin{cases} \frac{1}{|E|} \int_E \mathbf{v} & \text{falls } E \in \mathcal{E}_{\Omega}, \\ 0 & \text{falls } E \in \mathcal{E}_{\Gamma}. \end{cases}$$

Seien $q_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}$ und $\mathbf{v} \in X$ beliebig. Da die Mittelpunktsregel die Ordnung 1 hat, folgt für jedes $K \in \mathcal{T}$ und jedes $E \in \mathcal{E}_K$

$$\int_E \mathbf{n}_K \cdot (\pi_{\mathcal{T}} \mathbf{v}) = |E| \mathbf{n}_K \cdot (\pi_{\mathcal{T}} \mathbf{v})(m_E) = \int_E \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{v}$$

und daher

$$\begin{aligned}
& b_{\mathcal{T}}(\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v}, q_{\mathcal{T}}) \\
&= - \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K q_{\mathcal{T}} \operatorname{div}(\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v}) = - \sum_{K \in \mathcal{T}} q_{\mathcal{T}} \int_K \operatorname{div}(\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v}) \\
&= - \sum_{K \in \mathcal{T}} q_{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{E \in \mathcal{E}_K} \int_E \mathbf{n}_K \cdot (\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v}) \right\} \\
\text{(II.7.2)} \quad &= - \sum_{K \in \mathcal{T}} q_{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{E \in \mathcal{E}_K} \int_E \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{v} \right\} \\
&= - \sum_{K \in \mathcal{T}} q_{\mathcal{T}} \int_K \operatorname{div} \mathbf{v} = - \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K q_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v} = b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}, q_{\mathcal{T}}) \\
&= b(\mathbf{v}, q_{\mathcal{T}}).
\end{aligned}$$

Seien nun $\mathbf{v} \in X$ und $K \in \mathcal{T}$ beliebig. Da $\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v}$ und $\mathbf{n}_K \cdot \nabla(\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v})$ auf den Kanten von K linear bzw. konstant sind und $\Delta(\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v})$ elementweise verschwindet, folgt mit der Mittelpunktsregel und dem Gaußschen Integralsatz

$$\begin{aligned}
|\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v}|_{1;K}^2 &= \int_K \nabla(\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v}) : \nabla(\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v}) \\
&= \int_{\partial K} \mathbf{n}_K \cdot \nabla(\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v}) \cdot \pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v} - \int_K \Delta(\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v}) \cdot \pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v} \\
&= \sum_{E \in \mathcal{E}_K} \mathbf{n}_K \cdot \nabla(\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v}) \cdot \int_E \pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v} \\
&= \sum_{E \in \mathcal{E}_K} \mathbf{n}_K \cdot \nabla(\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v}) \cdot \int_E \mathbf{v} \\
&= \int_{\partial K} \mathbf{n}_K \cdot \nabla(\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} - \int_K \Delta(\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \\
&= \int_K \nabla(\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v}) : \nabla \mathbf{v} \\
&\leq |\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v}|_{1;K} |\mathbf{v}|_{1;K}.
\end{aligned}$$

Summation über alle $K \in \mathcal{T}$ und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für Summen ergeben

$$|\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v}|_{\mathcal{T}}^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{T}} |\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v}|_{1;K} |\mathbf{v}|_{1;K} \leq |\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v}|_{\mathcal{T}} |\mathbf{v}|_1.$$

Also ist

$$\text{(II.7.3)} \quad |\pi_{\mathcal{T}}\mathbf{v}|_{\mathcal{T}} \leq |\mathbf{v}|_1.$$

Sei nun $p_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}$ mit $\|p_{\mathcal{T}}\| = 1$ beliebig. Wegen Satz II.3.3 (S. 45) gibt es ein $\beta > 0$, das weder von \mathcal{T} noch von $p_{\mathcal{T}}$ abhängt, und ein $\mathbf{v} \in X$

mit

$$|\mathbf{v}|_1 = 1 \quad \text{und} \quad - \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v} \geq \beta.$$

Aus (II.7.2) und (II.7.3) folgt

$$|\pi_{\mathcal{T}} \mathbf{v}|_{\mathcal{T}} \leq 1$$

und

$$b_{\mathcal{T}}(\pi_{\mathcal{T}} \mathbf{v}, p_{\mathcal{T}}) = b(\mathbf{v}, p_{\mathcal{T}}) = - \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v} \geq \beta.$$

Hieraus folgt die gleichmäßige inf-sup Bedingung mit $\tilde{\beta} = \beta$.

ad (3): Wegen Satz II.2.1 (S. 38) und Teil (2) ist $V_{\mathcal{T}} \neq \{0\}$. Da die Mittelpunktsregel die Ordnung 1 hat, gilt für jedes $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$

$$\begin{aligned} b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, 1) &= - \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \\ &= - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{E \in \mathcal{E}_K} \int_E \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n}_K \\ &= - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{E \in \mathcal{E}_K} |E| \mathbf{v}_{\mathcal{T}}(m_E) \cdot \mathbf{n}_K \\ &= - \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} |E| \mathbb{J}_E(\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n}_E)(m_E) - \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Gamma}} |E| \mathbf{v}_{\mathcal{T}}(m_E) \cdot \mathbf{n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist

$$V_{\mathcal{T}} = \{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} : b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}) = 0 \forall q_{\mathcal{T}} \in S^{0,-1}(\mathcal{T})\}.$$

Da andererseits $\operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}$ für $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$ stückweise konstant ist, folgt hieraus die Behauptung. \square

Wegen Lemma II.7.1 und Satz II.2.4 (S. 41) besitzt Problem (II.7.1) stets eine eindeutige Lösung. Außerdem ist (II.7.1) äquivalent zu:

Finde $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}$ mit

$$(II.7.4) \quad a_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = \ell_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}.$$

Als nächstes schätzen wir den Konsistenzfehler von (II.7.4) ab.

LEMMA II.7.2 (Konsistenzfehler). *Sei $(\mathbf{u}, p) \in X \times M$ die eindeutige schwache Lösung der Stokes Gleichungen. Es gelte $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^2$ und $p \in H^1(\Omega)$. Dann gilt für alle $\mathbf{w} \in V \oplus V_{\mathcal{T}}$ für den Konsistenzfehler $L_{\mathcal{T}}(\mathbf{w})$*

$$|L_{\mathcal{T}}(\mathbf{w})| = |a_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - \ell_{\mathcal{T}}(\mathbf{w})| \leq ch_{\mathcal{T}}\{|\mathbf{u}|_2 + |p|_1\} |\mathbf{w}|_{\mathcal{T}}.$$

Die Konstante c hängt nur von der Konstanten $C_{\mathcal{T}}$ in der Regularitätsbedingung an \mathcal{T} ab.

BEWEIS. Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis von [22, Satz IV.1.3]. Sei $\mathbf{w} \in V \oplus V_{\mathcal{T}}$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{T}}(\mathbf{w}) &= a_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - \ell_{\mathcal{T}}(\mathbf{w}) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \{\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{w} - \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}\} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \{\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{w} + \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \nabla p \cdot \mathbf{w}\}. \end{aligned}$$

Durch elementweise partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} &\sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \{\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{w} + \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\} \\ &= \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \int_E \mathbb{J}_E((\mathbf{n}_E \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w}) + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Gamma}} \int_E (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Bezeichne mit

$$\bar{\mathbf{w}}_E = \frac{1}{|E|} \int_E \mathbf{w}$$

den Mittelwert von \mathbf{w} auf $E \in \mathcal{E}$ und mit $I_{\mathcal{T}} : X \cap H^2(\Omega)^2 \rightarrow [S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^2 \subset X_{\mathcal{T}}$ den nodalen Interpolationsoperator. Da $\frac{\partial I_{\mathcal{T}} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_E}$ für jede Kante $E \in \mathcal{E}$ konstant und $\int_E (\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}}_E) = 0$ ist, folgt

$$\begin{aligned} &\sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \{\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{w} + \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\} \\ &= \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \int_E \mathbb{J}_E((\mathbf{n}_E \cdot \nabla(\mathbf{u} - I_{\mathcal{T}} \mathbf{u})) \cdot (\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}}_E)) \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Gamma}} \int_E (\mathbf{n} \cdot \nabla(\mathbf{u} - I_{\mathcal{T}} \mathbf{u})) \cdot (\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}}_E). \end{aligned}$$

Im Beweis von [22, Satz IV.1.3] haben wir gezeigt, dass jeder Summand auf der rechten Seite dieser Gleichung durch $ch_E |\mathbf{w}|_{1;K} |\mathbf{u}|_2$ abgeschätzt werden kann. Dabei ist K ein Dreieck mit $E \subset \partial K$. Dies liefert mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung die Abschätzung

$$\left| \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \{\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{w} + \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\} \right| \leq ch_{\mathcal{T}} |\mathbf{u}|_2 |\mathbf{w}|_{\mathcal{T}}.$$

Wir betrachten nun den Term $-\sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \nabla p \cdot \mathbf{w}$. Elementweise partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} - \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \nabla p \cdot \mathbf{w} &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K p \operatorname{div} \mathbf{w} \\ &\quad - \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \int_E \mathbb{J}_E(p \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_E) - \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Gamma}} \int_E p \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Die Linienintegrale auf der rechten Seite dieser Gleichung können wie oben mit $p\mathbf{n}_E$ an Stelle von $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_E}$ abgeschätzt werden. Wir erhalten dann für diesen Beitrag

$$\left| \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \int_E \mathbb{J}_E(p\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_E) + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Gamma} \int_E p\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \right| \leq ch_{\mathcal{T}} |p|_1 |\mathbf{w}|_{\mathcal{T}}.$$

Ist $\mathbf{w} \in V$, so ist natürlich

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K p \operatorname{div} \mathbf{w} = 0,$$

und wir sind fertig. Sei also $\mathbf{w} \in V_{\mathcal{T}}$. Bezeichne mit $\Pi_{\mathcal{T}} : L_0^2(\Omega) \rightarrow M_{\mathcal{T}}$ die L^2 -Projektion. Dann folgt mit der Poincaréschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K p \operatorname{div} \mathbf{w} &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K (p - \Pi_{\mathcal{T}} p) \operatorname{div} \mathbf{w} \\ &\leq \|p - \Pi_{\mathcal{T}} p\| |\mathbf{w}|_{\mathcal{T}} \\ &\leq ch_{\mathcal{T}} |p|_1 |\mathbf{w}|_{\mathcal{T}}, \end{aligned}$$

und wir haben auch in diesem Fall die Behauptung bewiesen. \square

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun eine Fehlerabschätzung für die Diskretisierung (II.7.1) beweisen.

SATZ II.7.3 (Fehlerabschätzung für die Crouzeix-Raviart Diskretisierung der Stokes Gleichungen). *Seien $(\mathbf{u}, p) \in X \times M$ die eindeutige schwache Lösung der Stokes Gleichungen und $(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}) \in X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}}$ die eindeutige Lösung von (II.7.1). Es gelte $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^2$ und $p \in H^1(\Omega)$. Dann gilt die Fehlerabschätzung*

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{T}} + \|p - p_{\mathcal{T}}\| \leq c_1 h_{\mathcal{T}} \{|\mathbf{u}|_2 + |p|_1\}.$$

Ist zusätzlich Ω konvex, so ist

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\| \leq c_2 h_{\mathcal{T}}^2 \{|\mathbf{u}|_2 + |p|_1\}.$$

Die Konstanten c_1 und c_2 hängen nur von Ω und der Konstanten $C_{\mathcal{T}}$ in der Regularitätsbedingung an \mathcal{T} ab.

BEWEIS. Für den Geschwindigkeitsfehler können wir die abstrakten Fehlerabschätzungen [22, Sätze IV.1.1 und IV.1.2] für nicht-konforme Methoden anwenden. Zusammen mit der Abschätzung des Konsistenzfehlers aus Lemma II.7.2 ergeben diese Sätze die Fehlerabschätzungen

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{T}} \leq 2 \inf_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}} |\mathbf{u} - \mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{T}} + ch_{\mathcal{T}} \{|\mathbf{u}|_2 + |p|_1\}$$

und

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\| &\leq \sup_{\mathbf{g} \in L^2(\Omega)^2; \|\mathbf{g}\|=1} \{ |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{T}} |\mathbf{u}_{\mathbf{g}} - \mathbf{u}_{\mathbf{g}, \mathcal{T}}|_{\mathcal{T}} \\ &\quad + ch_{\mathcal{T}} \{|\mathbf{u}_{\mathbf{g}}|_2 + |p_{\mathbf{g}}|_1\} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{T}} \\ &\quad + ch_{\mathcal{T}} \{|\mathbf{u}|_2 + |p|_1\} |\mathbf{u}_{\mathbf{g}} - \mathbf{u}_{\mathbf{g}, \mathcal{T}}|_{\mathcal{T}} \}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen $(\mathbf{u}_{\mathbf{g}}, p_{\mathbf{g}}) \in X \times M$ und $\mathbf{u}_{\mathbf{g},h} \in V_{\mathcal{T}}$ die eindeutige schwache Lösung der Stokes Gleichungen mit rechter Seite $\mathbf{g} \in L^2(\Omega)^2$ bzw. des entsprechenden diskreten Problems (II.7.1).

Wegen des Regularitätssatzes II.3.5 (S. 46) müssen wir für die Fehlerabschätzung der Geschwindigkeit nur noch den Approximationsfehler $\inf_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}} |\mathbf{u} - \mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{T}}$ abschätzen. Dazu beachten wir, dass $\mathbf{u} \in V$ ist und dass für den Operator $\pi_{\mathcal{T}}$ aus dem Beweis von Lemma II.7.1 (2) gilt $\pi_{\mathcal{T}}(V) \subset V_{\mathcal{T}}$. Daher ist

$$\inf_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}} |\mathbf{u} - \mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{T}} \leq |\mathbf{u} - \pi_{\mathcal{T}}\mathbf{u}|_{\mathcal{T}}.$$

Bezeichne wieder mit $I_{\mathcal{T}} : X \cap H^2(\Omega)^2 \rightarrow [S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^2 \subset X_{\mathcal{T}}$ den nodalen Interpolationsoperator. Wegen $\pi_{\mathcal{T}}I_{\mathcal{T}}\mathbf{u} = I_{\mathcal{T}}\mathbf{u}$ folgt dann aus (II.7.3)

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} - \pi_{\mathcal{T}}\mathbf{u}|_{\mathcal{T}} &\leq |\mathbf{u} - I_{\mathcal{T}}\mathbf{u}|_{\mathcal{T}} + |I_{\mathcal{T}}\mathbf{u} - \pi_{\mathcal{T}}\mathbf{u}|_{\mathcal{T}} \\ &= |\mathbf{u} - I_{\mathcal{T}}\mathbf{u}|_{\mathcal{T}} + |\pi_{\mathcal{T}}(I_{\mathcal{T}}\mathbf{u} - \mathbf{u})|_{\mathcal{T}} \\ &\leq 2|\mathbf{u} - I_{\mathcal{T}}\mathbf{u}|_{\mathcal{T}} \\ &\leq 2|\mathbf{u} - I_{\mathcal{T}}\mathbf{u}|_1 \\ &\leq ch_{\mathcal{T}}|\mathbf{u}|_2. \end{aligned}$$

Damit sind die Fehlerabschätzungen für die Geschwindigkeit bewiesen. Bezeichne wieder mit $\Pi_{\mathcal{T}} : L_0^2(\Omega) \rightarrow M_{\mathcal{T}}$ die L^2 -Projektion. Dann ist

$$\|p - p_{\mathcal{T}}\| \leq \|p - \Pi_{\mathcal{T}}p\| + \|\Pi_{\mathcal{T}}p - p_{\mathcal{T}}\|$$

und

$$\|p - \Pi_{\mathcal{T}}p\| \leq ch_{\mathcal{T}}|p|_1.$$

Aus Lemma II.7.1 (2) folgt weiter

$$\|\Pi_{\mathcal{T}}p - p_{\mathcal{T}}\| \leq \tilde{\beta}^{-1} \sup_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \setminus \{0\}} \frac{b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \Pi_{\mathcal{T}}p - p_{\mathcal{T}})}{|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{T}}}.$$

Sei $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$ mit $|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{T}} = 1$ beliebig. Dann ist

$$b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \Pi_{\mathcal{T}}p - p_{\mathcal{T}}) = b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \Pi_{\mathcal{T}}p - p) + b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p - p_{\mathcal{T}})$$

und

$$b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \Pi_{\mathcal{T}}p - p) \leq \sqrt{2}|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{T}}\|p - \Pi_{\mathcal{T}}p\| \leq ch_{\mathcal{T}}|p|_1.$$

Aus (II.7.1) folgt weiter

$$\begin{aligned} &b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p - p_{\mathcal{T}}) \\ &= b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p) + a_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) - \ell_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \\ &= a_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \mathbf{u}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \{\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - p \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\} \\ &= a_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \mathbf{u}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \{\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}} + \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - p \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \nabla p \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\}. \end{aligned}$$

Für den ersten Summanden erhalten wir mit den schon bewiesenen Fehlerabschätzungen für die Geschwindigkeit

$$a_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \mathbf{u}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \leq |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{T}} |\mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{T}} \leq ch_{\mathcal{T}} \{|\mathbf{u}|_2 + |p|_1\}.$$

Für den zweiten Summanden erhalten wir mit elementweiser partieller Integration und dem Beweis von Lemma II.7.2

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \{ \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}} + \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - p \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \nabla p \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \} \\ &= \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \left\{ \int_E \mathbb{J}_E((\mathbf{n}_E \cdot \nabla(\mathbf{u} - I_{\mathcal{T}}\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) - \int_E \mathbb{J}_E(p\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n}_E) \right\} \\ & \quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Gamma}} \left\{ \int_E (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \int_E p\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n} \right\} \\ & \leq ch_{\mathcal{T}} |\mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_{\mathcal{T}} \{|\mathbf{u}|_2 + |p|_1\} \\ & \leq ch_{\mathcal{T}} \{|\mathbf{u}|_2 + |p|_1\}. \end{aligned}$$

Damit ist auch die Fehlerabschätzung für den Druck bewiesen. \square

Zum Abschluss dieses Paragraphen wollen wir noch eine lokale Basis von $V_{\mathcal{T}}$ konstruieren. Dazu berechnen wir zunächst $\dim V_{\mathcal{T}}$. Bezeichne mit NT , NE_0 und NV_0 die Zahl der Dreiecke, der inneren Kanten und der inneren Eckpunkte von \mathcal{T} . Da Ω einfach zusammenhängend ist, folgt aus der Eulerschen Polyederformel $NT - NE_0 + NV_0 = 1$. Da $X_{\mathcal{T}}$ und $M_{\mathcal{T}}$ die inf-sup Bedingung erfüllen, ergibt sich $\dim V_{\mathcal{T}} = \dim X_{\mathcal{T}} - \dim M_{\mathcal{T}} = 2NE_0 - NT + 1 = NE_0 + NV_0$. Jedem $E \in \mathcal{E}_{\Omega}$ ordnen wir nun einen Einheitstangentenvektor \mathbf{t}_E und die eindeutig bestimmte, stückweise lineare Funktion φ_E mit

$$\varphi_E(m_{E^*}) = \delta_{EE^*} \quad \forall E^* \in \mathcal{E}$$

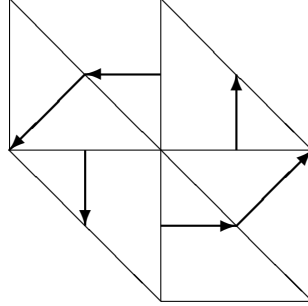
zu. Setze

$$\mathbf{w}_E = \varphi_E \mathbf{t}_E \quad \forall E \in \mathcal{E}_{\Omega}.$$

Für jeden Dreieckseckpunkt x in \mathcal{N} sei \mathcal{E}_x die Menge aller Dreiecksseiten, die x als einen Endpunkt haben. Ausgehend von einer beliebigen Kante in \mathcal{E}_x werden die restlichen Kanten in \mathcal{E}_x fortlaufend in mathematisch positiver Orientierung durchnummeriert. Für $E \in \mathcal{E}_x$ bezeichnen $\mathbf{t}_{E,x}$ und $\mathbf{n}_{E,x}$ zwei orthogonale Einheitsvektoren, derart dass $\mathbf{t}_{E,x}$ tangential zu E ist, von x wegweist und $\det[\mathbf{t}_{E,x}, \mathbf{n}_{E,x}] > 0$ ist. Setze (vgl. Abbildung II.7.1)

$$\mathbf{w}_x = \sum_{E \in \mathcal{E}_x} \frac{1}{|E|} \varphi_E \mathbf{n}_{E,x}.$$

Da die Vektorfelder \mathbf{w}_E und \mathbf{w}_x zu den Kanten tangential bzw. normal sind, sind sie linear unabhängig. Außerdem ist offensichtlich stets $\mathbf{w}_E \in V_{\mathcal{T}}$. Seien nun $K \in \mathcal{T}$ ein Dreieck, $x \in \mathcal{N}$ ein Eckpunkt

ABBILDUNG II.7.1. Funktion \mathbf{w}_x

von K und E_1, E_2 die beiden Kanten von K , die den Punkt x gemeinsam haben. Dann folgt aus dem Gaußschen Integralsatz mit der Mittelpunktsregel für die Linienintegrale

$$\begin{aligned} \int_K \operatorname{div} \mathbf{w}_x &= \int_{\partial K} \mathbf{w}_x \cdot \mathbf{n}_K = \sum_{i=1}^2 |E_i| \mathbf{w}_x(m_{E_i}) \cdot \mathbf{n}_K = \sum_{i=1}^2 \mathbf{n}_{E_i, x} \cdot \mathbf{n}_K \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist auch stets $\mathbf{w}_x \in V_{\mathcal{T}}$. Dies beweist

$$V_{\mathcal{T}} = \operatorname{span}\{\mathbf{w}_E, \mathbf{w}_x : E \in \mathcal{E}, x \in \mathcal{N}\}.$$

Wir haben nun die Wahl, ob wir das diskrete Problem (II.7.1) oder (II.7.4) numerisch lösen. Das Problem (II.7.1) hat eine dünn besetzte Steifigkeitsmatrix mit $2NE_0 + NT - 1 = 3NE_0 - NV_0$ Zeilen und Spalten. Diese Matrix ist symmetrisch, aber indefinit, d.h. sie besitzt positive und negative Eigenwerte. Problem (II.7.1) liefert uns direkt die diskreten Geschwindigkeiten und Drücke.

Da $V_{\mathcal{T}}$ eine lokale Basis besitzt, ist die Steifigkeitsmatrix von (II.7.4) ebenfalls dünn besetzt. Sie hat $NE_0 + NV_0$ Zeilen und Spalten, ist also viel kleiner als die Steifigkeitsmatrix von (II.7.1). Außerdem ist sie symmetrisch und positiv definit. Allerdings hat sie eine Kondition von $O(h_{\mathcal{T}}^{-4})$, während die Kondition der Steifigkeitsmatrix von (II.7.1) $O(h_{\mathcal{T}}^{-2})$ ist [8].

Problem (II.7.4) liefert uns auch nur die diskreten Geschwindigkeiten. Allerdings lassen sich die diskreten Drücke leicht aus den diskreten Geschwindigkeiten berechnen. Um dies einzusehen, betrachte eine beliebige innere Kante $E \in \mathcal{E}_{\Omega}$ und setze die Funktion $\varphi_E \mathbf{n}_E$ als Testfunktion $\mathbf{v}_{\mathcal{T}}$ in (II.7.1) ein. Da die Mittelpunktsregel die Ordnung 1 hat, ergibt sich mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\begin{aligned} \ell_{\mathcal{T}}(\varphi_E \mathbf{n}_E) - a_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \varphi_E \mathbf{n}_E) &= b_{\mathcal{T}}(\varphi_E \mathbf{n}_E, p_{\mathcal{T}}) = - \int_E \mathbb{J}_E(\varphi_E p_{\mathcal{T}}) \\ &= - |E| \mathbb{J}_E(\varphi_E(m_E) p_{\mathcal{T}}) \\ &= - |E| \mathbb{J}_E(p_{\mathcal{T}}). \end{aligned}$$

Also können die Sprünge des Druckes $p_{\mathcal{T}}$ über die Kanten leicht aus $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}$ berechnet werden. Wir wählen nun ein beliebiges Dreieck K , das eine Kante auf dem Rand Γ hat, aus, setzen dort $\tilde{p}_{\mathcal{T}} = 0$ und bestimmen $\tilde{p}_{\mathcal{T}}$ auf den restlichen Dreiecken, indem wir sukzessiv von Dreieck zu Dreieck fortschreiten und jeweils den Sprung von $p_{\mathcal{T}}$ über die gemeinsame Kante zu $\tilde{p}_{\mathcal{T}}$ hinzu addieren. Anschließend bestimmen wir

$$P = \sum_{K \in \mathcal{T}} \frac{|K|}{|\Omega|} \tilde{p}_{\mathcal{T}|K}$$

und subtrahieren P von $\tilde{p}_{\mathcal{T}}$. Dies liefert den gesuchten Druck $p_{\mathcal{T}}$ mit Mittelwert 0.

II.8. Stromfunktionsformulierung

Die Methoden der vorigen Abschnitte diskretisieren alle die schwache Formulierung der Stokes Gleichungen aus II.3 (S. 42) und approximieren simultan das Geschwindigkeitsfeld und den Druck. Sie liefern i.a. Geschwindigkeitsfelder, die nur näherungsweise divergenzfrei sind. Im vorigen Abschnitt konnten wir exakte Divergenzfreiheit der diskreten Geschwindigkeitsfelder erzielen, erkaufte dies aber durch Aufgabe der H^1 -Konformität. In diesem Paragraphen betrachten wir andere schwache Formulierungen der Stokes Gleichungen, die konforme Diskretisierungen mit exakt divergenzfreien Geschwindigkeitsfeldern erlauben. Wir werden sehen, dass wir diesen Vorteil durch andere Nachteile erkaufen.

Wir betrachten die Stokes Gleichungen (II.1.1) (S. 33) mit homogenen Dirichlet Randbedingungen in einem beschränkten, offenen, *einfach zusammenhängenden* Gebiet Ω im \mathbb{R}^2 . Insbesondere ist der Rand Γ von Ω zusammenhängend. Für die neue schwache Formulierung definieren wir die Operatoren $\mathbf{curl} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)^2$ und $\text{curl} : H^1(\Omega)^2 \rightarrow L^2(\Omega)$ durch

$$\mathbf{curl} \varphi = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \quad \text{curl} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}.$$

Wie man leicht nachrechnet, gelten folgende Identitäten für alle $\varphi \in H^2(\Omega)$ und $\mathbf{v} \in H^2(\Omega)^2$

$$\text{curl}(\mathbf{curl} \varphi) = -\Delta \varphi, \quad \mathbf{curl}(\text{curl} \mathbf{v}) = -\Delta \mathbf{v} + \nabla(\text{div} \mathbf{v}).$$

Außerdem folgt aus dem Gaußschen Integralsatz für alle $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2$ und $\varphi \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{curl} \varphi = \int_{\Omega} \text{curl} \mathbf{v} \varphi + \int_{\Gamma} \varphi \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}.$$

Dabei ist \mathbf{t} ein Einheitstangentenfeld an Γ .

SATZ II.8.1 (Eigenschaften des **curl**-Operators). *Der Operator **curl** ist ein Isomorphismus von $H_0^1(\Omega)$ auf*

$$H_0(\text{div}) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2 : \text{div } \mathbf{v} = 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \Gamma\}.$$

BEWEIS. Offensichtlich bildet **curl** den Raum $H_0^1(\Omega)$ in $H_0(\text{div})$ ab. Die Abbildung ist auch injektiv. Denn aus **curl** $\varphi = 0$ folgt $\nabla\varphi = 0$ und damit $\varphi = \text{const}$ und wegen der Randbedingung $\varphi = 0$. Wegen des Satzes von der offenen Abbildung [23, §II.5] müssen wir also nur noch die Surjektivität von **curl** zeigen. Sei dazu $\mathbf{v} \in H_0(\text{div})$ und $\mathbf{v}^\perp = (v_2, -v_1)^T$. Aus $\text{div } \mathbf{v} = 0$ folgt $\frac{\partial v_1^\perp}{\partial x_2} = \frac{\partial v_2^\perp}{\partial x_1}$, d.h. $D\mathbf{v}^\perp$ ist symmetrisch. Da Ω einfach zusammenhängend ist, folgt aus dem Satz von Poincaré [17, Satz VIII.3.16], dass \mathbf{v}^\perp ein Gradientenfeld ist, d.h. $\mathbf{v}^\perp = \nabla\psi$. Hieraus folgt $\mathbf{v} = \mathbf{curl } \psi$. Da Γ zusammenhängend und $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ auf Γ ist, ist ψ konstant auf Γ . Wegen $\mathbf{v} = \mathbf{curl } \psi$ ist also o.E. $\psi = 0$ auf Γ . Dies beweist die Surjektivität. \square

Sei nun (\mathbf{u}, p) eine hinreichend glatte Lösung der Stokes Gleichungen (II.1.1) (S. 33). Wegen Satz II.8.1 existiert ein eindeutiges $\psi \in H_0^1(\Omega)$ mit $\mathbf{u} = \mathbf{curl } \psi$. Dieses heißt die *Stromfunktion* von \mathbf{u} . Aus $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0$ auf Γ folgt zusätzlich $\mathbf{n} \cdot \nabla\psi = \mathbf{t} \cdot \mathbf{curl } \psi = 0$ auf Γ . Setzen wir obige Darstellung für \mathbf{u} in die Impulsgleichung, d.h. die erste Gleichung von (II.1.1), ein und bilden deren curl, so erhalten wir wegen $\text{curl}(\nabla p) = 0$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{f} &= \text{curl}\{-\Delta\mathbf{u} + \nabla p\} \\ &= -\Delta(\text{curl } \mathbf{u}) + \text{curl}(\nabla p) \\ &= -\Delta(\text{curl}(\mathbf{curl } \psi)) \\ &= \Delta^2\psi. \end{aligned}$$

Also ist die Stromfunktion ψ eine Lösung der *biharmonischen Gleichung*

$$(II.8.1) \quad \begin{aligned} \Delta^2\psi &= \text{curl } \mathbf{f} && \text{in } \Omega \\ \psi &= 0 && \text{auf } \Gamma \\ \mathbf{n} \cdot \nabla\psi &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Sei nun umgekehrt ψ eine hinreichend glatte Lösung der biharmonischen Gleichung (II.8.1). Setze $\mathbf{u} = \mathbf{curl } \psi$. Dann ist $\text{div } \mathbf{u} = 0$. Aus den Randbedingungen an ψ folgt $\nabla\psi = 0$ auf Γ und damit $\mathbf{u} = \mathbf{curl } \psi = 0$ auf Γ . Weiter ist $\text{curl}\{\mathbf{f} + \Delta\mathbf{u}\} = \text{curl } \mathbf{f} - \Delta^2\psi = 0$ in Ω . Daher gilt für jedes $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$0 = \int_{\Omega} \text{curl}\{\mathbf{f} + \Delta\mathbf{u}\} \varphi = \int_{\Omega} \{\mathbf{f} + \Delta\mathbf{u}\} \cdot \mathbf{curl } \varphi.$$

Also ist wegen Satz II.8.1 $\mathbf{f} + \Delta\mathbf{u} \in V^\perp$. Wegen Satz II.3.3 (S. 45) und Satz II.2.1 (S. 38) gibt es daher ein $p \in L_0^2(\Omega)$ mit $\mathbf{f} + \Delta\mathbf{u} = \nabla p$. Also

ist (\mathbf{u}, p) eine Lösung der Stokes Gleichungen (II.1.1) (S. 33). In diesem Sinne sind die Stokes Gleichungen (II.1.1) und die Biharmonische Gleichung (II.8.1) äquivalent.

Die schwache Formulierung von (II.8.1) lautet:

Finde $\psi \in H_0^2(\Omega)$ mit

$$(II.8.2) \quad \int_{\Omega} \Delta\psi \Delta\varphi = \int_{\Omega} \operatorname{curl} \mathbf{f} \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^2(\Omega).$$

Dabei ist $H_0^2(\Omega) = \{\varphi \in H^2(\Omega) : \varphi = \mathbf{n} \cdot \nabla\varphi = 0 \text{ auf } \Gamma\}$. Problem (II.8.2) ist offensichtlich die Euler-Lagrange-Gleichung des Variationsproblems

$$J(\psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta\psi)^2 - \int_{\Omega} \operatorname{curl} \mathbf{f} \psi \rightarrow \min \quad \text{in } H_0^2(\Omega).$$

Problem (II.8.2) passt also in den abstrakten Rahmen von [22, §I.1] für koerzive Minimumprobleme und erscheint daher auf den ersten Blick leichter für die Numerik zugänglich als die bisher betrachtete Sattelpunktsformulierung der Stokes Gleichungen. Der erste Eindruck täuscht aber. Denn (II.8.2) ist ein Minimumproblem über $H_0^2(\Omega)$ und erfordert daher die Konstruktion von Finite Element Funktionen, die global stetig differenzierbar sind. Dies ist sehr aufwändig.

Man kann versuchen, diese Schwierigkeit zu umgehen, indem man eine gemischte Formulierung von (II.8.2) mit $\Delta\psi$ als zusätzlicher Unbekannten betrachtet. Im Rahmen der abstrakten Theorie von §II.2 (S. 36) entspricht dies der Wahl

$$\begin{aligned} X &= H^1(\Omega), & M &= H_0^1(\Omega) \\ a(u, v) &= \int_{\Omega} uv, & b(v, \lambda) &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \lambda. \end{aligned}$$

Die Ergebnisse von §II.2 sind jedoch nicht anwendbar, da die Bilinearform a nicht koerziv auf dem Kern V von b ist. Dies führt zu erheblichen Problemen bei der Analyse und Approximation des zu (II.8.2) gehörenden gemischten Problems. Ein anderer Nachteil der biharmonischen Gleichung (II.8.2) ist das Fehlen jedweder Information über den Druck, der häufig die physikalisch interessante Größe ist.

Wir wollen im Folgenden zeigen, wie man die geschilderten Schwierigkeiten umgehen kann und eine „vernünftige“ Stromfunktionsformulierung der Stokes Gleichungen erhält, die zudem die effiziente Berechnung des Druckes erlaubt. Diese Vorteile werden durch verschärfte Regularitätsanforderungen an die Lösung der Stokes Gleichungen und sub-optimale Fehlerabschätzungen für die Finite Element Approximation erkauft.

LEMMA II.8.2 (Eigenschaft von $H_0^1(\Omega)^2 \cap H_0(\text{div})$). Für alle $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^2 \cap H_0(\text{div})$ und alle $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2$ gilt

$$\int_{\Omega} \text{curl } \mathbf{u} \text{ curl } \mathbf{v} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}.$$

BEWEIS. Sei $\mathbf{u} \in \mathcal{V} = \{\mathbf{w} \in C_0^\infty(\Omega)^2 : \text{div } \mathbf{w} = 0\}$. Dann folgt aus dem Gaußschen Integralsatz für alle $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{curl } \mathbf{u} \text{ curl } \mathbf{v} &= \int_{\Omega} \mathbf{curl}(\text{curl } \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \\ &= \int_{\Omega} [-\Delta \mathbf{u} + \nabla(\text{div } \mathbf{u})] \cdot \mathbf{v} = - \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Da \mathcal{V} in $H_0^1(\Omega)^2 \cap H_0(\text{div})$ dicht ist, folgt die Behauptung. \square

Bezeichne mit

$$(II.8.3) \quad \omega = \text{curl } \mathbf{u}$$

die *Wirbelstärke* des Geschwindigkeitsfeldes. Aus Lemma II.8.2 und der schwachen Formulierung der Stokes Gleichungen aus §II.3 (S. 42) ergibt sich für alle $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \text{div } \mathbf{v} \\ &= \int_{\Omega} \text{curl } \mathbf{u} \text{ curl } \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \text{div } \mathbf{v} \\ &= \int_{\Omega} \omega \text{ curl } \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \text{div } \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Da (II.8.3) zu

$$\int_{\Omega} \omega \mu = \int_{\Omega} \text{curl } \mathbf{u} \mu \quad \forall \mu \in L^2(\Omega)$$

äquivalent ist, erhalten wir folgende schwache Formulierung der Stokes Gleichungen (II.1.1) (S. 33):

Finde $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^2$, $p \in L_0^2(\Omega)$ und $\omega \in L^2(\Omega)$ mit

$$(II.8.4) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \omega \text{ curl } \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \text{div } \mathbf{v} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2 \\ \int_{\Omega} q \text{div } \mathbf{u} &= 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \\ \int_{\Omega} \omega \mu - \int_{\Omega} \text{curl } \mathbf{u} \mu &= 0 \quad \forall \mu \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Problem (II.8.4) ordnet sich in den abstrakten Rahmen von §II.2 (S. 36) ein mit der Wahl

$$\begin{aligned} X &= H_0^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega) \\ M &= L^2(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \\ a([\mathbf{u}, \omega], [\mathbf{v}, \theta]) &= \int_{\Omega} \omega \theta \\ b([\mathbf{v}, \theta], [\lambda, p]) &= \int_{\Omega} (\operatorname{curl} \mathbf{v} - \theta) \lambda - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass man hierfür die Identität $\lambda = \omega$ in schwacher Form zu den Gleichungen von (II.8.4) hinzufügen muss.

Problem (II.8.4) ist für unsere Zwecke noch nicht geeignet, da es zu starke Regularitätsanforderungen an das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} und damit an die Wirbelstärke ω stellt. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, schwächen wir die Regularitätsbedingungen an \mathbf{u} ab und verschärfen die an p und λ . Dies führt auf folgendes Variationsproblem:

Finde $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^2$, $\omega \in L^2(\Omega)$, $\lambda \in H^1(\Omega)$ und $p \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ mit

$$(II.8.5) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{curl} \lambda \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2 \\ \int_{\Omega} \omega \theta - \int_{\Omega} \lambda \theta &= 0 \quad \forall \theta \in L^2(\Omega) \\ \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \operatorname{curl} \mu - \int_{\Omega} \omega \mu &= 0 \quad \forall \mu \in H^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla q \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \forall q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

Problem (II.8.5) ordnet sich in den abstrakten Rahmen von §II.2 (S. 36) ein mit der Wahl

$$\begin{aligned} X &= L^2(\Omega)^2 \times L^2(\Omega) \\ M &= H^1(\Omega) \times [H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)] \\ a([\mathbf{u}, \omega], [\mathbf{v}, \theta]) &= \int_{\Omega} \omega \theta \\ b([\mathbf{v}, \theta], [\lambda, p]) &= \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \operatorname{curl} \lambda - \int_{\Omega} \theta \lambda + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Die Probleme (II.8.4) und (II.8.5) sind offensichtlich äquivalent in dem üblichen Sinne, dass jede hinreichend glatte Lösung des einen Problems eine Lösung des anderen Problems ist und umgekehrt.

Wegen Satz II.8.1 ist jede Lösung \mathbf{u} von (II.8.5) von der Form $\mathbf{u} = \operatorname{curl} \psi$ mit $\psi \in H_0^1(\Omega)$. Wählen wir die Testfunktion \mathbf{v} in (II.8.5) von der Form $\mathbf{v} = \operatorname{curl} \varphi$ mit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, so erhalten wir das Problem:

Finde $\psi \in H_0^1(\Omega)$, $\omega \in L^2(\Omega)$ und $\lambda \in H^1(\Omega)$ mit

$$(II.8.6) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{curl} \lambda \cdot \mathbf{curl} \varphi &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{curl} \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \omega \theta - \int_{\Omega} \lambda \theta &= 0 \quad \forall \theta \in L^2(\Omega) \\ \int_{\Omega} \mathbf{curl} \psi \cdot \mathbf{curl} \mu - \int_{\Omega} \omega \mu &= 0 \quad \forall \mu \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Wählen wir andererseits die Testfunktion \mathbf{v} in (II.8.5) von der Form $\mathbf{v} = \nabla q$ mit $q \in H^1(\Omega)$, so erhalten wir das Problem:

Finde $p \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ mit

$$(II.8.7) \quad \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla q = \int_{\Omega} (\mathbf{f} - \mathbf{curl} \lambda) \cdot \nabla q \quad \forall q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)^2.$$

Also spaltet das Problem (II.8.5) äquivalent in die beiden entkoppelten Probleme (II.8.6) und (II.8.7) auf. Problem (II.8.6) ist eine gemischte Formulierung der biharmonischen Gleichung (II.8.1); Problem (II.8.7) ist die schwache Formulierung einer Poisson Gleichung mit Neumann Randbedingungen.

SATZ II.8.3 (Lösbarkeit der Stromfunktionsformulierung). *Seien $\Gamma \in C^2$ oder Ω konvex und $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^2$. Dann besitzen die Probleme (II.8.5) und (II.8.6), (II.8.7) jeweils eine eindeutige Lösung.*

BEWEIS. Die eindeutige Lösbarkeit der Probleme (II.8.6) und (II.8.7) folgt offensichtlich aus der eindeutigen Lösbarkeit von Problem (II.8.5).

Gemäß Satz II.3.5 (S. 46) besitzen die Stokes Gleichungen eine eindeutige schwache Lösung (\mathbf{u}, p) . Wegen der Voraussetzungen an Γ bzw. Ω ist $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^2$, $p \in H^1(\Omega)$. Wegen Satz II.8.1 ist $\mathbf{u} = \mathbf{curl} \psi$, und ψ , $\omega = \mathbf{curl} \mathbf{u}$, $\lambda = \omega$ und p lösen Problem (II.8.5). Wir müssen also nur noch zeigen, dass es keine weitere Lösung von (II.8.5) gibt, d.h. dass Problem (II.8.5) mit $\mathbf{f} = 0$ nur die triviale Lösung zulässt.

Aus der ersten Gleichung von (II.8.6) folgt in diesem Fall $\mathbf{curl} \lambda = \mathbf{curl} \omega = 0$. Also ist ω ein Gradientenfeld. Aus der dritten Gleichung von (II.8.6) folgt aber, dass ω senkrecht steht auf allen Gradientenfeldern. Also ist $\lambda = \omega = 0$. Da die Bilinearform $\psi, \mu \mapsto \int_{\Omega} \mathbf{curl} \psi \cdot \mathbf{curl} \mu$ auf $H_0^1(\Omega)$ koerziv ist, folgt wiederum mit der dritten Gleichung von (II.8.6), dass auch $\psi = 0$ ist. Aus (II.8.7) folgt dann $\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla q = 0$ für alle $q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ Wegen der Poincaréschen Ungleichung impliziert dies $p = 0$. \square

Für die Finite Element Diskretisierung von (II.8.6) und (II.8.7) nehmen wir von nun an stets an, dass Ω ein *konvexes Polygon* ist. (Die Konvexität benötigen wir wegen Satz II.8.3.) \mathcal{T} sei eine affin äquivalente, zulässige und reguläre Unterteilung von Ω in Dreiecke oder Vierecke wie in §I.4 (S. 26). Wir wählen Finite Element Räume $\Phi_{\mathcal{T}} \subset H_0^1(\Omega)$,

$\Theta_{\mathcal{T}} \subset L^2(\Omega)$, $M_{\mathcal{T}} \subset H^1(\Omega)$, $Q_{\mathcal{T}} \subset H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ und betrachten die folgenden beiden diskreten Analoga der Probleme (II.8.6) und (II.8.7):

Finde $\psi_{\mathcal{T}} \in \Phi_{\mathcal{T}}$, $\omega_{\mathcal{T}} \in \Theta_{\mathcal{T}}$ und $\lambda_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}$ mit

$$(II.8.8) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{curl} \lambda_{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{curl} \varphi_{\mathcal{T}} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{curl} \varphi_{\mathcal{T}} \quad \forall \varphi_{\mathcal{T}} \in \Phi_{\mathcal{T}} \\ \int_{\Omega} \omega_{\mathcal{T}} \theta_{\mathcal{T}} - \int_{\Omega} \lambda_{\mathcal{T}} \theta_{\mathcal{T}} &= 0 \quad \forall \theta_{\mathcal{T}} \in \Theta_{\mathcal{T}} \\ \int_{\Omega} \mathbf{curl} \psi_{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{curl} \mu_{\mathcal{T}} \\ - \int_{\Omega} \omega_{\mathcal{T}} \mu_{\mathcal{T}} &= 0 \quad \forall \mu_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

und

Finde $p_{\mathcal{T}} \in Q_{\mathcal{T}}$ mit

$$(II.8.9) \quad \int_{\Omega} \nabla p_{\mathcal{T}} \cdot \nabla q_{\mathcal{T}} = \int_{\Omega} (\mathbf{f} - \mathbf{curl} \lambda_{\mathcal{T}}) \cdot \nabla q_{\mathcal{T}} \quad \forall q_{\mathcal{T}} \in Q_{\mathcal{T}}.$$

Für den Beweis einer Fehlerabschätzung benötigen wir einen Projektionsoperator $P_{\mathcal{T}} : H^1(\Omega) \rightarrow \Theta_{\mathcal{T}}$, der durch

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla (P_{\mathcal{T}} \mu - \mu) \cdot \nabla \theta_{\mathcal{T}} &= 0 \quad \forall \theta_{\mathcal{T}} \in \Theta_{\mathcal{T}} \\ P_{\mathcal{T}} \mu - \mu &\in L_0^2(\Omega) \end{aligned}$$

definiert ist.

SATZ II.8.4 (Lösbarkeit und Fehlerabschätzung). (1) Es gelte $\Phi_{\mathcal{T}} \subset M_{\mathcal{T}} \subset \Theta_{\mathcal{T}}$. Dann besitzt Problem (II.8.8) eine eindeutige Lösung. Bezeichne mit $\psi \in H_0^1(\Omega)$, $\omega \in L^2(\Omega)$, $\lambda \in H^1(\Omega)$ die eindeutige Lösung von (II.8.6) und setze

$$K(h_{\mathcal{T}}) = \sup_{\theta_{\mathcal{T}} \in \Theta_{\mathcal{T}} \setminus \{0\}} \frac{\|\theta_{\mathcal{T}}\|_1}{\|\theta_{\mathcal{T}}\|}.$$

Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} &\|\psi - \psi_{\mathcal{T}}\|_1 + \|\omega - \omega_{\mathcal{T}}\| \\ &\leq c \left\{ (1 + K(h_{\mathcal{T}})) \left[\inf_{\varphi_{\mathcal{T}} \in \Phi_{\mathcal{T}}} \|\psi - \varphi_{\mathcal{T}}\|_1 + \inf_{\theta_{\mathcal{T}} \in \Theta_{\mathcal{T}}} \|\omega - \theta_{\mathcal{T}}\| \right] \right. \\ &\quad \left. + \|\omega - P_{\mathcal{T}} \omega\| \right\}. \end{aligned}$$

(2) Problem (II.8.9) besitzt eine eindeutige Lösung. Jedes $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^2$ besitze eine Zerlegung der Form $\mathbf{u} = \nabla q + \mathbf{curl} \varphi$ mit $q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ und $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ und es gelte

$$(II.8.10) \quad \|q - P_{\mathcal{T}} q\|_1 + \inf_{\varphi_{\mathcal{T}} \in \Phi_{\mathcal{T}}} \|\varphi - \varphi_{\mathcal{T}}\|_1 \leq ch_{\mathcal{T}} \|\mathbf{u}\|_1.$$

Bezeichne mit $p \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ die eindeutige Lösung von (II.8.7). Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$\|p - p_{\mathcal{T}}\| \leq c \left\{ h_{\mathcal{T}} \inf_{q_{\mathcal{T}} \in Q_{\mathcal{T}}} \|p - q_{\mathcal{T}}\|_1 + \|\omega - \omega_{\mathcal{T}}\| + \inf_{\theta_{\mathcal{T}} \in \Theta_{\mathcal{T}}} [h_{\mathcal{T}} K(h_{\mathcal{T}}) \|\omega_{\mathcal{T}} - \theta_{\mathcal{T}}\| + h_{\mathcal{T}} \|\omega - \theta_{\mathcal{T}}\|_1] \right\}.$$

BEWEIS. [12, Theorem III.2.6 und III.2.7] \square

Es gebe zwei Zahlen $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$ mit $\nu_1 \leq \nu_2$ und $S^{\nu_1, -1}(\mathcal{T}) \subset \Theta_{\mathcal{T}} \subset S^{\nu_2, -1}(\mathcal{T})$. Dann folgt durch Transformation auf das Referenzelement

$$\begin{aligned} c_1 \max_{K \in \mathcal{T}} h_K^{-1} &\leq \sup_{\theta_{\mathcal{T}} \in S^{\nu_1, -1}(\mathcal{T})} \frac{\|\theta_{\mathcal{T}}\|_1}{\|\theta_{\mathcal{T}}\|} \\ &\leq K(h_{\mathcal{T}}) \\ &\leq \sup_{\theta_{\mathcal{T}} \in S^{\nu_2, -1}(\mathcal{T})} \frac{\|\theta_{\mathcal{T}}\|_1}{\|\theta_{\mathcal{T}}\|} \leq c_2 \max_{K \in \mathcal{T}} h_K^{-1}. \end{aligned}$$

Eine Zerlegung wie in Teil (2) von Satz II.8.4 heißt *Helmholtz-Zerlegung*. Sie existiert für alle einfach zusammenhängenden Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Die wesentliche Annahme in Teil (2) von Satz II.8.4 ist die Abschätzung (II.8.10).

Aus Satz II.8.4 und den Approximationsresultaten aus §I.4 (S. 26) folgt unmittelbar:

SATZ II.8.5 (A priori Fehlerabschätzung). *Die Bezeichnungen und Voraussetzungen seien wie in Satz II.8.4. Zusätzlich sei \mathcal{T} uniform, d.h. es gibt ein $c > 0$ mit $\max_{K \in \mathcal{T}} h_K \leq c \min_{K \in \mathcal{T}} h_K$. Weiter sei*

$$\Theta_{\mathcal{T}} = M_{\mathcal{T}} = S^{\ell, 0}(\mathcal{T}), \quad \Phi_{\mathcal{T}} = S_0^{\ell, 0}(\mathcal{T}), \quad Q_{\mathcal{T}} = S_{\mathcal{T}}^{k, 0} \cap L_0^2(\Omega)$$

mit $\ell \in \mathbb{N}^*$ und $k = \max\{1, \ell - 1\}$. Schließlich gelte für die Lösung von (II.8.6) und (II.8.7) die Regularitätsannahme $\psi \in H^{m+1}(\Omega)$, $\Delta\psi \in H^m(\Omega)$, $p \in H^{\max\{1, m-1\}}(\Omega)$ für ein m mit $1 \leq m \leq \ell$. Dann gilt für die Lösung von (II.8.8) und (II.8.9) die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} &\|\psi - \psi_{\mathcal{T}}\|_1 + \|\omega - \omega_{\mathcal{T}}\| + \|p - p_{\mathcal{T}}\| \\ &\leq c \left\{ h_{\mathcal{T}}^{m-1} \left[\|\psi\|_{m+1} + \|\Delta\psi\|_m + \|p\|_{\max\{1, m-1\}} \right] + h_{\mathcal{T}}^m \|\Delta\psi\|_m \right\}. \end{aligned}$$

Die Fehlerabschätzung von Satz II.8.5 ist nicht optimal. Dies liegt an dem Term $K(h_{\mathcal{T}})$ in Satz II.8.4. Dieser Term tritt auf, da im abstrakten Rahmen von §II.2 (S. 36) die Bilinearform a zu Problem (II.8.6) nur bzgl. der L^2 -Norm koerziv ist.

Satz II.8.5 liefert für $\ell = 1$ keine Konvergenz der Finite Element Approximation. Für diesen Fall kann man mit einer verbesserten Technik immer noch eine Fehlerabschätzung der Ordnung $O(h_{\mathcal{T}}^{\frac{1}{2}})$ zeigen, sofern $\psi \in H^3(\Omega)$ ist.

II.9. Numerische Lösung der diskreten Probleme

Wir betrachten die abstrakte Situation aus §II.4 (S. 47). Gegeben sind endlich dimensionale Räume $X_{\mathcal{T}}$, $M_{\mathcal{T}}$ und stetige Bilinearformen $a : X_{\mathcal{T}} \times X_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}$, $b : X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ sowie stetige Linearformen $\ell : X_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}$, $\chi : M_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) a ist gleichmäßig $X_{\mathcal{T}}$ koerziv, d.h. es gibt ein von $X_{\mathcal{T}}$ unabhängiges $\alpha > 0$ mit

$$a(u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}}) \geq \alpha \|u_{\mathcal{T}}\|_{X_{\mathcal{T}}}^2 \quad \forall u_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}.$$

- (2) b erfüllt die uniforme inf-sup Bedingung, d.h. es gibt ein von $X_{\mathcal{T}}$ unabhängiges $\beta > 0$ mit

$$\inf_{\lambda_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}} \setminus \{0\}} \sup_{u_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \setminus \{0\}} \frac{b(u_{\mathcal{T}}, \lambda_{\mathcal{T}})}{\|u_{\mathcal{T}}\|_{X_{\mathcal{T}}} \|\lambda_{\mathcal{T}}\|_{M_{\mathcal{T}}}} \geq \beta.$$

Zu lösen ist das diskrete Problem (II.4.1) (S. 47).

Für die Stokes Gleichungen sind $X_{\mathcal{T}}$, $M_{\mathcal{T}}$ Finite Element Räume mit $X_{\mathcal{T}} \subset H_0^1(\Omega)^n$, $M_{\mathcal{T}} \subset L_0^2(\Omega)$ und

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{X_{\mathcal{T}}} &= |\cdot|_1, & \|\cdot\|_{M_{\mathcal{T}}} &= \|\cdot\|, \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}, & b(\mathbf{v}, p) &= - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v}, \\ \ell(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, & \chi(q) &= 0. \end{aligned}$$

Wir führen auf $X_{\mathcal{T}}$ und $M_{\mathcal{T}}$ Skalarprodukte $(\cdot, \cdot)_{X_{\mathcal{T}}}$ und $(\cdot, \cdot)_{M_{\mathcal{T}}}$ ein. *Diese müssen nicht die entsprechenden Normen induzieren.* Vielmehr werden sie in der Praxis skalierte Euklidische Skalarprodukte sein. Mit diesen Skalarprodukten definieren wir Operatoren $A_{\mathcal{T}} : X_{\mathcal{T}} \rightarrow X_{\mathcal{T}}$, $B_{\mathcal{T}} : X_{\mathcal{T}} \rightarrow M_{\mathcal{T}}$ und $B_{\mathcal{T}}^* : M_{\mathcal{T}} \rightarrow X_{\mathcal{T}}$ sowie Elemente $f_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$, $\varphi_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}$ durch

$$\begin{aligned} (A_{\mathcal{T}}u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}})_{X_{\mathcal{T}}} &= a(u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}}) \quad \forall u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \\ (B_{\mathcal{T}}u_{\mathcal{T}}, \lambda_{\mathcal{T}})_{M_{\mathcal{T}}} &= b(u_{\mathcal{T}}, \lambda_{\mathcal{T}}) \quad \forall u_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}, \lambda_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}} \\ (B_{\mathcal{T}}^*\lambda_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}})_{X_{\mathcal{T}}} &= b(v_{\mathcal{T}}, \lambda_{\mathcal{T}}) \quad \forall v_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}, \lambda_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}} \\ (f_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}})_{X_{\mathcal{T}}} &= \ell(u_{\mathcal{T}}) \quad \forall u_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \\ (\varphi_{\mathcal{T}}, \lambda_{\mathcal{T}})_{M_{\mathcal{T}}} &= \chi(\lambda_{\mathcal{T}}) \quad \forall \lambda_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Dann ist (II.4.1) (S. 47) offensichtlich äquivalent zu

$$(II.9.1) \quad \begin{aligned} A_{\mathcal{T}}u_{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{T}}^*\lambda_{\mathcal{T}} &= f_{\mathcal{T}} \\ B_{\mathcal{T}}u_{\mathcal{T}} &= \varphi_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Aus der Koerzivität und Stetigkeit von a folgt

$$\|A_{\mathcal{T}}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_{\mathcal{T}}, X_{\mathcal{T}})} \leq \frac{1}{\alpha}, \quad \|A_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{L}(X_{\mathcal{T}}, X_{\mathcal{T}})} \leq \mathcal{A} = \|a\|_{\mathcal{L}^2(X_{\mathcal{T}} \times X_{\mathcal{T}}, \mathbb{R})}.$$

Aus der Stetigkeit von b und der inf-sup Bedingung folgt

$$\begin{aligned} \|B_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{L}(X_{\mathcal{T}}, M_{\mathcal{T}})} &= \|B_{\mathcal{T}}^*\|_{\mathcal{L}(M_{\mathcal{T}}, X_{\mathcal{T}})} \leq \mathcal{B} = \|b\|_{\mathcal{L}^2(X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}}, \mathbb{R})} \\ \|B_{\mathcal{T}}^* \lambda_{\mathcal{T}}\|_{X_{\mathcal{T}}} &\geq \beta \|\lambda_{\mathcal{T}}\|_{M_{\mathcal{T}}} \quad \forall \lambda_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Insbesondere können wir die erste Gleichung von (II.9.1) nach $u_{\mathcal{T}}$ auflösen und das Ergebnis in die zweite Gleichung von (II.9.1) einsetzen. Dies liefert

$$(II.9.2) \quad \begin{aligned} u_{\mathcal{T}} &= A_{\mathcal{T}}^{-1} \{f_{\mathcal{T}} - B_{\mathcal{T}}^* \lambda_{\mathcal{T}}\} \\ B_{\mathcal{T}} A_{\mathcal{T}}^{-1} B_{\mathcal{T}}^* \lambda_{\mathcal{T}} &= B_{\mathcal{T}} A_{\mathcal{T}}^{-1} f_{\mathcal{T}} - \varphi_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Setze zur Abkürzung

$$L_{\mathcal{T}} = B_{\mathcal{T}} A_{\mathcal{T}}^{-1} B_{\mathcal{T}}^*, \quad \rho_{\mathcal{T}} = B_{\mathcal{T}} A_{\mathcal{T}}^{-1} f_{\mathcal{T}} - \varphi_{\mathcal{T}}.$$

Offensichtlich ist der Operator $L_{\mathcal{T}}$ symmetrisch. Aus den Abschätzungen für $A_{\mathcal{T}}$ und $B_{\mathcal{T}}$ folgt

$$\|L_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{L}(M_{\mathcal{T}}, M_{\mathcal{T}})} \leq \mathcal{B}^2 \alpha^{-1}$$

und

$$\begin{aligned} (L_{\mathcal{T}} \lambda_{\mathcal{T}}, \lambda_{\mathcal{T}})_{M_{\mathcal{T}}} &= (A_{\mathcal{T}}^{-1} B_{\mathcal{T}}^* \lambda_{\mathcal{T}}, B_{\mathcal{T}}^* \lambda_{\mathcal{T}})_{X_{\mathcal{T}}} \\ &= (A_{\mathcal{T}}^{-1} B_{\mathcal{T}}^* \lambda_{\mathcal{T}}, A_{\mathcal{T}} A_{\mathcal{T}}^{-1} B_{\mathcal{T}}^* \lambda_{\mathcal{T}})_{X_{\mathcal{T}}} \\ &= a(A_{\mathcal{T}}^{-1} B_{\mathcal{T}}^* \lambda_{\mathcal{T}}, A_{\mathcal{T}}^{-1} B_{\mathcal{T}}^* \lambda_{\mathcal{T}}) \\ &\geq \alpha \|A_{\mathcal{T}}^{-1} B_{\mathcal{T}}^* \lambda_{\mathcal{T}}\|_{X_{\mathcal{T}}}^2 \\ &\geq \alpha \mathcal{A}^{-2} \|B_{\mathcal{T}}^* \lambda_{\mathcal{T}}\|_{X_{\mathcal{T}}}^2 \\ &\geq \alpha \mathcal{A}^{-2} \beta^2 \|\lambda_{\mathcal{T}}\|_{M_{\mathcal{T}}}^2. \end{aligned}$$

Also ist $L_{\mathcal{T}}$ auch koerziv und

$$\|L_{\mathcal{T}}^{-1}\|_{\mathcal{L}(M_{\mathcal{T}}, M_{\mathcal{T}})} \leq \frac{\mathcal{A}^2}{\alpha \beta^2}.$$

Insbesondere folgt für die Kondition von $L_{\mathcal{T}}$

$$\kappa(L_{\mathcal{T}}) = \|L_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{L}(M_{\mathcal{T}}, M_{\mathcal{T}})} \|L_{\mathcal{T}}^{-1}\|_{\mathcal{L}(M_{\mathcal{T}}, M_{\mathcal{T}})} \leq \left(\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}}{\alpha\beta} \right)^2.$$

Daher kann die zweite Gleichung von (II.9.2) effizient durch ein CG-Verfahren gelöst werden. Die Konvergenzrate hängt nicht von \mathcal{T} ab, und der Aufwand, der für die Reduktion des Fehlers um einen festen Faktor erforderlich ist, ist proportional zur Zahl der Unbekannten, d.h. zu $\dim M_{\mathcal{T}}$. Die Proportionalitätskonstante hängt dabei von dem Aufwand ab, den die Auswertung von $L_{\mathcal{T}}$ erfordert.

Die Berechnung von $\rho_{\mathcal{T}}$ und die Auswertung von $L_{\mathcal{T}} \mu_{\mathcal{T}}$ für gegebenes $\mu_{\mathcal{T}}$ erfordert die Lösung eines Problems der Form

$$(II.9.3) \quad A_{\mathcal{T}} v_{\mathcal{T}} = w_{\mathcal{T}}.$$

Für die Stokes Gleichungen sind dies entkoppelte diskrete Poisson Gleichungen für die Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes.

Wenn wir die Probleme (II.9.3) näherungsweise durch n Iterationen eines stationären Iterationsverfahrens mit Startwert 0 lösen, approximieren wir $A_{\mathcal{T}}^{-1}$ durch einen Operator $K_{\mathcal{T},n}$. Bezeichnet κ die Konvergenzrate gemessen in der $X_{\mathcal{T}}$ -Norm dieses Iterationsverfahrens, so gilt für jedes $w_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$ die Abschätzung

$$(II.9.4) \quad \|K_{\mathcal{T},n}w_{\mathcal{T}} - A_{\mathcal{T}}^{-1}w_{\mathcal{T}}\|_{X_{\mathcal{T}}} \leq \kappa^n \|A_{\mathcal{T}}^{-1}w_{\mathcal{T}}\|_{X_{\mathcal{T}}}.$$

Setze

$$L_{\mathcal{T},n} = B_{\mathcal{T}}K_{\mathcal{T},n}B_{\mathcal{T}}^*.$$

Falls $K_{\mathcal{T},n}$ symmetrisch bzgl. der Bilinearform a ist, ist $L_{\mathcal{T},n}$ symmetrisch. Aus den Abschätzungen für $L_{\mathcal{T}}$ und (II.9.4) folgt für jedes $\lambda_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}$

$$\begin{aligned} \|L_{\mathcal{T}}\lambda_{\mathcal{T}} - L_{\mathcal{T},n}\lambda_{\mathcal{T}}\|_{M_{\mathcal{T}}} &= \|B_{\mathcal{T}}(A_{\mathcal{T}}^{-1} - K_{\mathcal{T},n})B_{\mathcal{T}}^*\lambda_{\mathcal{T}}\|_{M_{\mathcal{T}}} \\ &\leq \mathcal{B} \|(A_{\mathcal{T}}^{-1} - K_{\mathcal{T},n})B_{\mathcal{T}}^*\lambda_{\mathcal{T}}\|_{A_{\mathcal{T}}} \\ &\leq \kappa^n \mathcal{B} \|A_{\mathcal{T}}^{-1}B_{\mathcal{T}}^*\lambda_{\mathcal{T}}\|_{X_{\mathcal{T}}} \\ &\leq \frac{\mathcal{B}^2 \kappa^n}{\alpha} \|\lambda_{\mathcal{T}}\|_{M_{\mathcal{T}}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (\lambda_{\mathcal{T}}, L_{\mathcal{T},n}\lambda_{\mathcal{T}})_{M_{\mathcal{T}}} &\geq (\lambda_{\mathcal{T}}, L_{\mathcal{T}}\lambda_{\mathcal{T}})_{M_{\mathcal{T}}} - (\lambda_{\mathcal{T}}, (L_{\mathcal{T}} - L_{\mathcal{T},n})\lambda_{\mathcal{T}})_{M_{\mathcal{T}}} \\ &\geq \frac{\alpha\beta^2}{\mathcal{A}^2} \|\lambda_{\mathcal{T}}\|_{M_{\mathcal{T}}}^2 - \frac{\mathcal{B}^2 \kappa^n}{\alpha} \|\lambda_{\mathcal{T}}\|_{M_{\mathcal{T}}}^2 \\ &\geq \left(\frac{\alpha\beta^2}{\mathcal{A}^2} - \frac{\mathcal{B}^2 \kappa^n}{\alpha} \right) \|\lambda_{\mathcal{T}}\|_{M_{\mathcal{T}}}^2. \end{aligned}$$

Also ist $L_{\mathcal{T},n}$ koerziv, falls $\frac{\alpha\beta^2}{\mathcal{A}^2} - \frac{\mathcal{B}^2 \kappa^n}{\alpha} > 0$ d.h. $\kappa^n < \left(\frac{\alpha\beta}{\mathcal{A}\mathcal{B}}\right)^2$ ist. Insbesondere folgt in diesem Fall

$$\begin{aligned} \|L_{\mathcal{T},n}\|_{\mathcal{L}(M_{\mathcal{T}},M_{\mathcal{T}})} &\leq \|L_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{L}(M_{\mathcal{T}},M_{\mathcal{T}})} + \|L_{\mathcal{T}} - L_{\mathcal{T},n}\|_{\mathcal{L}(M_{\mathcal{T}},M_{\mathcal{T}})} \\ &\leq \frac{\mathcal{B}^2}{\alpha} + \frac{\mathcal{B}^2 \kappa^n}{\alpha} \\ &= \frac{\mathcal{B}^2}{\alpha} (1 + \kappa^n) \end{aligned}$$

und

$$\|L_{\mathcal{T},n}^{-1}\|_{\mathcal{L}(M_{\mathcal{T}},M_{\mathcal{T}})} \leq \left[\frac{\alpha\beta^2}{\mathcal{A}^2} - \frac{\mathcal{B}^2 \kappa^n}{\alpha} \right]^{-1}$$

sowie für die Kondition

$$\kappa(L_{\mathcal{T},n}) \leq \frac{\mathcal{A}^2 \mathcal{B}^2 (1 + \kappa^n)}{\alpha^2 \beta^2 - \mathcal{A}^2 \mathcal{B}^2 \kappa^n}.$$

Ist insbesondere

$$(II.9.5) \quad \kappa^n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha\beta}{\mathcal{AB}} \right)^2$$

ergibt sich wegen $\left(\frac{\alpha\beta}{\mathcal{AB}} \right)^2 \leq 1$

$$\kappa(L_{\mathcal{T},n}) \leq 3 \left(\frac{\mathcal{AB}}{\alpha\beta} \right)^2 = 3\kappa(L_{\mathcal{T}}).$$

Daher kann eine Gleichung der Form

$$L_{\mathcal{T},n}\lambda_{\mathcal{T}} = \rho_{\mathcal{T},n}$$

effizient durch ein CG-Verfahren gelöst werden. Insbesondere ist der Aufwand zur Reduktion des Fehlers um einen festen Faktor nach wie vor proportional zu $\dim M_{\mathcal{T}}$. Dabei hängt die Proportionalitätskonstante von dem Aufwand zur Auswertung von $K_{\mathcal{T},n}$ ab.

Diese Überlegungen führen auf folgenden Algorithmus und Satz.

ALGORITHMUS II.9.1 (CG-MG Algorithmus zur Lösung der diskreten Stokes Gleichungen).

- (1) Löse die diskreten Poisson Gleichungen

$$A_{\mathcal{T}}\mathbf{w}_{\mathcal{T}} = \mathbf{f}_{\mathcal{T}}$$

näherungsweise durch n Iterationen eines Mehrgitterverfahrens mit Startwert 0. Das Ergebnis sei $\mathbf{w}_{\mathcal{T},n}$. Setze

$$\rho_{\mathcal{T},n} = B_{\mathcal{T}}\mathbf{w}_{\mathcal{T},n}.$$

- (2) Wende ein CG-Verfahren mit Startwert 0 auf das Problem

$$L_{\mathcal{T}}p_{\mathcal{T}} = \rho_{\mathcal{T},n}$$

an. Dabei werde für gegebenes $q_{\mathcal{T}}$ der Ausdruck $L_{\mathcal{T}}q_{\mathcal{T}}$ näherungsweise berechnet, indem die diskreten Poisson Gleichungen

$$A_{\mathcal{T}}\mathbf{v}_{\mathcal{T}} = B_{\mathcal{T}}^*q_{\mathcal{T}}$$

näherungsweise durch n Iterationen eines Mehrgitterverfahrens mit Startwert 0 gelöst werden.

- (3) Sei $\tilde{p}_{\mathcal{T}}$ die in Schritt (2) berechnete Näherung für den Druck. Löse die diskreten Poisson Gleichungen

$$A_{\mathcal{T}}\mathbf{v}_{\mathcal{T}} = \mathbf{f}_{\mathcal{T}} - B_{\mathcal{T}}^*\tilde{p}_{\mathcal{T}}$$

näherungsweise durch n Iterationen eines Mehrgitterverfahrens mit Startwert 0. Das Ergebnis sei $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}}$. Dies ist die Approximation für die Geschwindigkeit.

SATZ II.9.2 (Konvergenz des CG-MG Algorithmus). Bezeichne mit $(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}}, \tilde{p}_{\mathcal{T}})$ das Ergebnis von Algorithmus II.9.1, mit $(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}})$ die exakte Lösung der diskreten Stokes Gleichungen, mit $K_{\mathcal{T},n}$ die durch das Mehrgitterverfahren gegebene Approximation von $A_{\mathcal{T}}^{-1}$ und mit $L_{\mathcal{T},n} =$

$B_{\mathcal{T}}K_{\mathcal{T},n}B_{\mathcal{T}}^*$ die entsprechende Approximation von $L_{\mathcal{T}} = B_{\mathcal{T}}A_{\mathcal{T}}^{-1}B_{\mathcal{T}}^*$. Es gelte (II.9.5) und

$$\|L_{\mathcal{T},n}\tilde{p}_{\mathcal{T}} - \rho_{\mathcal{T},n}\| \leq \varepsilon.$$

Dann ist

$$\|\mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \tilde{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}}\|_1 + \|p_{\mathcal{T}} - \tilde{p}_{\mathcal{T}}\| \leq \kappa^n c_1(\alpha, \beta, \mathcal{A}, \mathcal{B}) \|\mathbf{f}\| + \varepsilon c_2(\alpha, \beta, \mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

BEWEIS. Es ist

$$\begin{aligned} \|\rho_{\mathcal{T}} - \rho_{\mathcal{T},n}\| &= \|B_{\mathcal{T}}(A_{\mathcal{T}}^{-1} - K_{\mathcal{T},n})\mathbf{f}_{\mathcal{T}}\|_{X_{\mathcal{T}}} \\ &\leq \mathcal{B}\kappa^n \|A_{\mathcal{T}}^{-1}\mathbf{f}_{\mathcal{T}}\|_{X_{\mathcal{T}}} \\ &\leq \mathcal{B}\kappa^n \alpha^{-1} \sup_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \setminus \{0\}} \frac{(\mathbf{f}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}})_{X_{\mathcal{T}}}}{\|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{X_{\mathcal{T}}}} \\ &\leq \mathcal{B}\kappa^n \alpha^{-1} \|\mathbf{f}\|. \end{aligned}$$

Wegen $L_{\mathcal{T}}p_{\mathcal{T}} = \rho_{\mathcal{T}}$ und (II.9.5) folgt hieraus

$$\begin{aligned} \|p_{\mathcal{T}} - \tilde{p}_{\mathcal{T}}\| &= \|p_{\mathcal{T}} - \tilde{p}_{\mathcal{T}}\|_{M_{\mathcal{T}}} \\ &\leq \frac{\mathcal{A}^2}{\alpha\beta^2} \|L_{\mathcal{T}}p_{\mathcal{T}} - L_{\mathcal{T}}\tilde{p}_{\mathcal{T}}\|_{M_{\mathcal{T}}} \\ &\leq \frac{\mathcal{A}^2}{\alpha\beta^2} \left\{ \|\rho_{\mathcal{T}} - \rho_{\mathcal{T},n}\|_{M_{\mathcal{T}}} + \|\rho_{\mathcal{T},n} - L_{\mathcal{T},n}\tilde{p}_{\mathcal{T}}\|_{M_{\mathcal{T}}} \right. \\ &\quad \left. + \|L_{\mathcal{T},n}\tilde{p}_{\mathcal{T}} - L_{\mathcal{T}}\tilde{p}_{\mathcal{T}}\|_{M_{\mathcal{T}}} \right\} \\ &\leq \frac{\mathcal{A}^2}{\alpha\beta^2} \left\{ \frac{\mathcal{B}\kappa^n}{\alpha} \|\mathbf{f}\| + \varepsilon + \frac{\mathcal{B}^2\kappa^n}{\alpha} \|\tilde{p}_{\mathcal{T}}\|_{M_{\mathcal{T}}} \right\} \\ &\leq \frac{\mathcal{A}^2\mathcal{B}\kappa^n}{\alpha^2\beta^2} \|\mathbf{f}\| + \frac{\mathcal{A}^2}{\alpha\beta^2} \varepsilon \\ &\quad + \frac{\mathcal{A}^2\mathcal{B}^2\kappa^n}{\alpha^2\beta^2} \left\{ \|\tilde{p}_{\mathcal{T}} - p_{\mathcal{T}}\|_{M_{\mathcal{T}}} + \|p_{\mathcal{T}}\|_{M_{\mathcal{T}}} \right\}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\|p_{\mathcal{T}}\|_{M_{\mathcal{T}}} = \|p_{\mathcal{T}}\| \leq \frac{1}{\beta} \sup_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}^{\perp} \setminus \{0\}} \frac{b(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}})}{|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}|_1} \leq \frac{1}{\beta} \|\mathbf{f}\|$$

folgt hieraus

$$\begin{aligned} \|p_{\mathcal{T}} - \tilde{p}_{\mathcal{T}}\| &\leq 2 \frac{\mathcal{A}^2\mathcal{B}\kappa^n}{\alpha^2\beta^2} \|\mathbf{f}\| + 2 \frac{\mathcal{A}^2}{\alpha\beta^2} \varepsilon + 2 \frac{\mathcal{A}^2\mathcal{B}^2\kappa^n}{\alpha^2\beta^2} \|p_{\mathcal{T}}\|_{M_{\mathcal{T}}} \\ &\leq 2 \left(\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}}{\alpha\beta} \right)^2 \kappa^n \left[\frac{1}{\mathcal{B}} + \frac{1}{\beta} \right] \|\mathbf{f}\| + 2 \frac{\mathcal{A}^2}{\alpha\beta^2} \varepsilon. \end{aligned}$$

Wegen der ersten Gleichung von (II.9.2) ergibt sich

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}_\mathcal{T} - \tilde{\mathbf{u}}_\mathcal{T}|_1 &= \|A_\mathcal{T}^{-1}(\mathbf{f}_\mathcal{T} - B_\mathcal{T}^* p_\mathcal{T}) - K_{\mathcal{T},n}(\mathbf{f}_\mathcal{T} - B_\mathcal{T}^* \tilde{p}_\mathcal{T})\|_{X_\mathcal{T}} \\
&\leq \|(A_\mathcal{T}^{-1} - K_{\mathcal{T},n})\mathbf{f}_\mathcal{T}\|_{X_\mathcal{T}} + \|(A_\mathcal{T}^{-1} - K_{\mathcal{T},n})B_\mathcal{T}^* \tilde{p}_\mathcal{T}\|_{X_\mathcal{T}} \\
&\quad + \|A_\mathcal{T}^{-1} B_\mathcal{T}^*(p_\mathcal{T} - \tilde{p}_\mathcal{T})\|_{X_\mathcal{T}} \\
&\leq \kappa^n \|A_\mathcal{T}^{-1} \mathbf{f}_\mathcal{T}\|_{X_\mathcal{T}} + \kappa^n \|A_\mathcal{T}^{-1} B_\mathcal{T}^* \tilde{p}_\mathcal{T}\|_{X_\mathcal{T}} + \frac{\mathcal{B}}{\alpha} \|p_\mathcal{T} - \tilde{p}_\mathcal{T}\|_{M_\mathcal{T}} \\
&\leq \frac{\kappa^n}{\alpha} \|\mathbf{f}\| + \frac{\mathcal{B}}{\alpha} \kappa^n [\|\tilde{p}_\mathcal{T} - p_\mathcal{T}\| + \|p_\mathcal{T}\|] + \frac{\mathcal{B}}{\alpha} \|p_\mathcal{T} - \tilde{p}_\mathcal{T}\| \\
&\leq \frac{\kappa^n}{\alpha} \left(1 + \frac{\mathcal{B}}{\beta}\right) \|\mathbf{f}\| + \frac{\mathcal{B}}{\alpha} (1 + \kappa^n) \|\tilde{p}_\mathcal{T} - p_\mathcal{T}\|.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. \square

BEMERKUNG II.9.3 (Genauigkeit der Mehrgitteriterationen). Aus dem Beweis von Satz II.9.2 folgt, dass der κ^n -Term in der Abschätzung von $|\mathbf{u}_\mathcal{T} - \tilde{\mathbf{u}}_\mathcal{T}|_1 + \|p_\mathcal{T} - \tilde{p}_\mathcal{T}\|$ nur von der Genauigkeit des Mehrgitteralgorithmus in Schritt (1), Schritt (3) und der letzten Iteration von Schritt (2) in Algorithmus II.9.1 abhängt. Daher kann man in Schritt (2) mit einer geringen Anzahl von Mehrgitteriterationen (typischerweise 1 – 2 Iterationen) arbeiten und erst auf eine höhere Genauigkeit (typischerweise 4 – 5 Iterationen) umschalten, wenn das Abbruchkriterium $\|L_{\mathcal{T},n} \tilde{p}_\mathcal{T} - \rho_{\mathcal{T},n}\| \leq \varepsilon$ zum ersten Mal erfüllt wird.

In Algorithmus II.9.1 wird ein Mehrgitteralgorithmus zur Lösung diskreter Poisson Gleichungen als innere Iteration eines iterativen Lösungsverfahrens für die diskreten Stokes Gleichungen verwendet. Wir wollen nun die Mehrgitteridee direkt auf die diskreten Stokes Gleichungen anwenden. Dazu nehmen wir an, dass wir eine Hierarchie geschachtelter Unterteilungen $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \dots \subset \mathcal{T}_R$ haben. Es gilt, die Finite Element Lösung zur feinsten Unterteilung zu berechnen. Dazu machen wir folgende Annahmen:

- Ω ist konvex.
- Jede Unterteilung \mathcal{T}_k ist *uniform*, d.h.

$$h_k = \max_{K \in \mathcal{T}_k} h_K \leq c \min_{K \in \mathcal{T}_k} h_K$$

mit einer von k unabhängigen Konstanten c .

- $h_{k-1} \leq c h_k$ für alle m mit einer von m unabhängigen Konstanten c .
- Die Räume $X_{\mathcal{T}_k}$ und $M_{\mathcal{T}_k}$ sind geschachtelt, d.h. $X_{\mathcal{T}_k} \subset X_{\mathcal{T}_{k+1}}$, $M_{\mathcal{T}_k} \subset M_{\mathcal{T}_{k+1}}$ für $0 \leq k < R$.
- Die Bilinearform a ist gleichmäßig $X_{\mathcal{T}_k}$ -koerziv; die Bilinearform b erfüllt die gleichmäßige inf-sup Bedingung.
- Die Skalarprodukte $(\cdot, \cdot)_{X_{\mathcal{T}_k}}$ und $(\cdot, \cdot)_{M_{\mathcal{T}_k}}$ sind gleichmäßig äquivalent zum L^2 -Skalarprodukt.

Zur Vereinfachung der Notation ersetzen wir einen Index \mathcal{T}_k in der Regel durch k . Zusätzlich zu den bisherigen Notationen führen wir zwei Restriktionsoperatoren $R_k : X_k \rightarrow X_{k-1}$ und $\rho_k : M_k \rightarrow M_{k-1}$ durch

$$\begin{aligned} (R_k \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k-1})_{X_{k-1}} &= (\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k-1})_{X_k} \quad \forall \mathbf{u}_k \in X_k, \mathbf{v}_{k-1} \in X_{k-1}, k \geq 1 \\ (\rho_k p_k, q_{k-1})_{M_{k-1}} &= (p_k, q_{k-1})_{M_k} \quad \forall p_k \in M_k, q_{k-1} \in M_{k-1}, k \geq 1 \end{aligned}$$

ein.

Wir betrachten im folgenden Algorithmus die Stokes Probleme

$$(II.9.6) \quad \begin{aligned} A_k \mathbf{u}_k + B_k^* p_k &= \mathbf{f}_k \\ B_k \mathbf{u}_k &= g_k. \end{aligned}$$

Dabei ist $\mathbf{f}_R = \mathbf{f}_{\mathcal{T}_R}$ und $g_R = 0$. Die Größen \mathbf{f}_k, g_k mit $k \leq R-1$ werden rekursiv während des Algorithmus berechnet. Man beachte, dass eine äquivalente Formulierung von (II.9.6) mit den Bilinearformen a und b gegeben ist durch

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) + b(\mathbf{v}_k, p_k) &= (\mathbf{f}_k, \mathbf{v}_k)_{X_k} \quad \forall \mathbf{v}_k \in X_k \\ b(\mathbf{u}_k, q_k) &= (g_k, q_k)_{M_k} \quad \forall q_k \in M_k. \end{aligned}$$

ALGORITHMUS II.9.4 (MG-Verfahren auf Stufe k mit m Richardson Glättungsschritten).

- (0) Gegeben eine Näherung $\mathbf{u}_k^0 \in X_k, p_k^0 \in M_k$ für die Lösung von Problem (II.9.6).
- (1) (Glättungsschritt) Berechne für $\ell = 1, 2, \dots, m$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k^\ell &= \omega_k^{-2} \{ \mathbf{f}_k - A_k \mathbf{u}_k^{\ell-1} - B_k^* p_k^{\ell-1} \} \\ r_k^\ell &= h_k^{-2} \omega_k^{-2} \{ g_k - B_k \mathbf{u}_k^{\ell-1} \} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k^\ell &= \mathbf{u}_k^{\ell-1} + A_k \mathbf{w}_k^\ell + B_k^* r_k^\ell \\ p_k^\ell &= p_k^{\ell-1} + h_k^{-2} B_k \mathbf{w}_k^\ell. \end{aligned}$$

- (2) (Grobgridkorrektur) Sei $\mathbf{u}_{k-1}^* \in X_{k-1}, p_{k-1}^* \in M_{k-1}$ die exakte Lösung von Problem (II.9.6) auf dem Niveau $k-1$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{k-1} &= R_k \{ \mathbf{f}_k - A_k \mathbf{u}_k^m - B_k^* p_k^m \} \\ g_{k-1} &= \rho_k \{ g_k - B_k \mathbf{u}_k^m \}. \end{aligned}$$

Falls $k = 1$ ist, setze $\tilde{\mathbf{u}}_{k-1} = \mathbf{u}_{k-1}^*, \tilde{p}_{k-1} = p_{k-1}^*$. Falls $k > 1$ ist, berechne Näherungen $\tilde{\mathbf{u}}_{k-1} \in X_{k-1}, \tilde{p}_{k-1} \in M_{k-1}$ für $\mathbf{u}_{k-1}^*, p_{k-1}^*$ durch Anwenden von $\mu \geq 2$ Iterationen des MG-Verfahrens auf Stufe $k-1$ mit Startwert $\mathbf{u}_{k-1}^0 = 0, p_{k-1}^0 = 0$. Setze

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k^{m+1} &= \mathbf{u}_k^m + \tilde{\mathbf{u}}_{k-1} \\ p_k^{m+1} &= p_k^m + \tilde{p}_{k-1}. \end{aligned}$$

BEMERKUNG II.9.5 (Glättungsschritt). Ein Glättungsschritt von Algorithmus II.9.4 entspricht einem Schritt der gedämpften Richardson Iteration angewandt auf das System

$$\begin{pmatrix} A_k & B_k^* \\ h_k^{-2}B_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & B_k^* \\ h_k^{-2}B_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_k \\ p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k & B_k^* \\ h_k^{-2}B_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_k \\ h_k^{-2}g_k \end{pmatrix}.$$

Das Quadrieren berücksichtigt die Indefinitheit von $\begin{pmatrix} A_k & B_k^* \\ B_k & 0 \end{pmatrix}$. Man beachte, dass $\begin{pmatrix} A_k & B_k^* \\ h_k^{-2}B_k & 0 \end{pmatrix}$ spektral äquivalent ist zu $\begin{pmatrix} A_k & h_k^{-1}B_k^* \\ h_k^{-1}B_k & 0 \end{pmatrix}$. Die Skalierung von B_k und B_k^* berücksichtigt die unterschiedliche Ordnung der Differentialoperatoren, die zu A_k bzw. B_k und B_k^* gehören. Der Dämpfungparameter ω_k muss größer sein als der größte Eigenwert von $\begin{pmatrix} A_k & B_k^* \\ h_k^{-2}B_k & 0 \end{pmatrix}$. Wir werden zeigen, dass dieser Eigenwert proportional zu h_k^{-2} ist.

Für die Konvergenzanalyse von Algorithmus II.9.4 definieren wir eine gitterabhängige Norm $\|\cdot\|_k$ auf $X_k \times M_k$ durch

$$\|[\mathbf{u}_k, p_k]\|_k = \{(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k)_{X_k} + h_k^2(p_k, p_k)_{M_k}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Wegen obiger Annahmen ist die Norm $\|[\mathbf{u}_k, p_k]\|_k$ gleichmäßig äquivalent zu $\{\|\mathbf{u}_k\|^2 + h_k^2\|p_k\|^2\}^{\frac{1}{2}}$. Die Skalierung des Druckes berücksichtigt die unterschiedliche Regularität von Druck und Geschwindigkeit.

Da der Operator $\begin{pmatrix} A_k & B_k^* \\ h_k^{-2}B_k & 0 \end{pmatrix}$ spektral äquivalent ist zu dem symmetrischen Operator $\begin{pmatrix} A_k & h_k^{-1}B_k^* \\ h_k^{-1}B_k & 0 \end{pmatrix}$ besitzt er einen vollständigen Satz von reellen Eigenwerten $\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k,N_k}$ und zugehörigen Eigenfunktionen $[\mathbf{w}_{k,1}, r_{k,1}], \dots, [\mathbf{w}_{k,N_k}, r_{k,N_k}]$ mit $N_k = \dim(X_k \times M_k)$. Dabei können die Eigenwerte der Größe nach geordnet und die Eigenfunktionen bezüglich des zu $\|\cdot\|_k$ gehörenden Skalarproduktes orthonormiert werden, d.h. $|\lambda_{k,1}| \leq \dots \leq |\lambda_{k,N_k}|$ und

$$\begin{aligned} A_k \mathbf{w}_{k,i} + B_k^* r_{k,i} &= \lambda_{k,i} \mathbf{w}_{k,i} \\ B_k \mathbf{w}_{k,i} &= h_k^2 \lambda_{k,i} r_{k,i} \end{aligned}$$

$$(\mathbf{w}_{k,i}, \mathbf{w}_{k,j})_{X_k} + h_k^2 (r_{k,i}, r_{k,j})_{M_k} = \delta_{i,j}.$$

Da o.E. $h_k \leq 1$ ist, folgt aus obigen Voraussetzungen mit von k unabhängigen positiven Konstanten

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \beta_0 \|[\mathbf{w}_{k,i}, r_{k,i}]\|_k \leq \beta_0 c \{|\mathbf{w}_{k,i}|_1^2 + \|r_{k,i}\|^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \sup_{[\mathbf{v}_k, q_k] \in X_k \times M_k \setminus \{0\}} \frac{a(\mathbf{w}_{k,i}, \mathbf{v}_k) + b(\mathbf{v}_k, r_{k,i}) + b(\mathbf{w}_{k,i}, q_k)}{\{|\mathbf{v}_k|_1^2 + \|q_k\|^2\}^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq c^* \sup_{[\mathbf{v}_k, q_k] \in X_k \times M_k \setminus \{0\}} \frac{a(\mathbf{w}_{k,i}, \mathbf{v}_k) + b(\mathbf{v}_k, r_{k,i}) + b(\mathbf{w}_{k,i}, q_k)}{\|[\mathbf{v}_k, q_k]\|_k} \\ &\leq c^* |\lambda_{k,i}| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
|\lambda_{k,i}| &= |a(\mathbf{w}_{k,i}, \mathbf{w}_{k,i}) + b(\mathbf{w}_{k,i}, r_{k,i}) + b(\mathbf{w}_{k,i}, r_{k,i})| \\
&\leq c'' \{ |\mathbf{w}_{k,i}|_1^2 + \|r_{k,i}\|^2 \} \\
&\leq c''' h_k^{-2} \|[\mathbf{w}_{k,i}, r_{k,i}]\|_k^2 \\
&= c''' h_k^{-2}.
\end{aligned}$$

Also ist $|\lambda_{k,N_k}| \in [c_1, c_2 h_k^{-2}]$ mit von k unabhängigen Konstanten c_1, c_2 . Der Einfachheit halber nehmen wir im Folgenden stets an, dass $\omega_k = |\lambda_{k,N_k}|$ ist.

Jedes Element $[\mathbf{v}_k, q_k] \in X_k \times M_k$ besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$[\mathbf{v}_k, q_k] = \sum_{i=1}^{N_k} c_i [\mathbf{w}_{k,i}, r_{k,i}].$$

Mit Hilfe dieser Zerlegung können wir für jedes $s \in \mathbb{R}$ eine Norm auf $X_k \times M_k$ durch

$$\|[\mathbf{v}_k, q_k]\|_{s,k} = \left\{ \sum_{i=1}^{N_k} c_i^2 |\lambda_{k,i}|^s \right\}^{\frac{1}{2}}$$

definieren. Konstruktionsgemäß ist $\|\cdot\|_{0,k} = \|\cdot\|_k$.

LEMMA II.9.6 (Glättungseigenschaft). *Bezeichne mit $[\mathbf{u}_k^*, p_k^*] \in X_k \times M_k$ die exakte Lösung von Problem (II.9.6) und mit $[\mathbf{e}_k^i, \varepsilon_k^i] = [\mathbf{u}_k^i - \mathbf{u}_k^*, p_k^i - p_k^*]$ den Fehler nach dem i -ten Schritt von Algorithmus II.9.4. Dann ist*

$$\|[\mathbf{e}_k^m, \varepsilon_k^m]\|_{2,k} \leq \frac{c h_k^{-2}}{\sqrt{2m+1}} \|[\mathbf{e}_k^0, \varepsilon_k^0]\|_k$$

mit einer von k unabhängigen Konstanten c .

BEWEIS. Zerlege den Anfangsfehler gemäß

$$[\mathbf{e}_k^0, \varepsilon_k^0] = \sum_{i=1}^{N_k} c_i [\mathbf{w}_{k,i}, r_{k,i}].$$

Dann ist am Ende von Schritt (1)

$$(II.9.7) \quad [\mathbf{e}_k^m, \varepsilon_k^m] = \sum_{i=1}^{N_k} c_i (1 - \omega_k^{-2} \lambda_{k,i}^2)^m [\mathbf{w}_{k,i}, r_{k,i}].$$

Wegen $\omega_k = |\lambda_{k,N_k}|$ folgt

$$\begin{aligned}
\|[\mathbf{e}_k^m, \varepsilon_k^m]\|_{2,k} &= \left\{ \sum_{i=1}^{N_k} c_i^2 \left(1 - \frac{\lambda_{k,i}^2}{\lambda_{k,N_k}^2}\right)^{2m} \lambda_{k,i}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= |\lambda_{k,N_k}| \left\{ \sum_{i=1}^{N_k} c_i^2 \left(1 - \frac{\lambda_{k,i}^2}{\lambda_{k,N_k}^2}\right)^{2m} \frac{\lambda_{k,i}^2}{\lambda_{k,N_k}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |\lambda_{k,N_k}| \max_{|x| \leq 1} |x| (1 - |x|^2)^m \left\{ \sum_{i=1}^{N_k} c_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= |\lambda_{k,N_k}| \max_{0 \leq z \leq 1} z(1 - z^2)^m \|[\mathbf{e}_k^0, \varepsilon_k^0]\|_k.
\end{aligned}$$

Da die Funktion $z \mapsto z(1 - z^2)^m$ ihr Maximum in $[0, 1]$ an der Stelle $\frac{1}{\sqrt{2m+1}}$ annimmt, folgt hieraus die Behauptung. \square

LEMMA II.9.7 (Approximationseigenschaft). *Es gibt eine von k unabhängige Konstante c mit*

$$\|[\mathbf{e}_k^m - \mathbf{u}_{k-1}^*, \varepsilon_k^m - p_{k-1}^*]\|_k \leq ch_k^2 \|[\mathbf{e}_k^m, \varepsilon_k^m]\|_{2,k}.$$

BEWEIS. Definiere die Projektionsoperatoren $P_k : H_0^1(\Omega)^n \rightarrow X_k$ und $\pi_k : L_0^2(\Omega) \rightarrow M_k$ durch

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u} - P_k \mathbf{u}, \mathbf{v}_k) + b(\mathbf{v}_k, p - \pi_k p) &= 0 \quad \mathbf{v}_k \in X_k \\
b(\mathbf{u} - P_k \mathbf{u}, q_k) &= 0 \quad \forall q_k \in M_k.
\end{aligned}$$

Aus obigen Voraussetzungen und den abstrakten Ergebnissen von §II.4 (S. 47) folgt für alle $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n$, $p \in L_0^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u} - P_k \mathbf{u}|_1 + \|p - \pi_k p\| &\leq c\{|\mathbf{u}|_1 + \|p\|\} \\
|\mathbf{u} - P_k \mathbf{u}|_1 + \|p - \pi_k p\| &\leq ch_k\{|\mathbf{u}|_2 + |p|_1\}.
\end{aligned}$$

Für $\mathbf{g} \in L^2(\Omega)^n$ bezeichne (\mathbf{w}_g, r_g) die Lösung des Stokes Problems

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{w}_g, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, r_g) &= \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n \\
b(\mathbf{w}_g, q) &= 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega).
\end{aligned}$$

Da Ω ein konvexes Polygon ist, folgt $\mathbf{w}_g \in H^2(\Omega)^n$, $r_g \in H^1(\Omega)$ und

$$|\mathbf{w}_g|_2 + |r_g|_1 \leq c \|\mathbf{g}\|.$$

Damit folgt für beliebiges $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n$, $p \in L_0^2(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot (\mathbf{u} - P_k \mathbf{u}) &= a(\mathbf{w}_{\mathbf{g}}, \mathbf{u} - P_k \mathbf{u}) + b(\mathbf{u} - P_k \mathbf{u}, r_{\mathbf{g}}) \\
&\quad + b(\mathbf{w}_{\mathbf{g}}, p - \pi_k p) \\
&= a(\mathbf{w}_{\mathbf{g}} - P_k \mathbf{w}_{\mathbf{g}}, \mathbf{u} - P_k \mathbf{u}) + b(\mathbf{u} - P_k \mathbf{u}, r_{\mathbf{g}} - \pi_k r_{\mathbf{g}}) \\
&\quad + b(\mathbf{w}_{\mathbf{g}} - P_k \mathbf{w}_{\mathbf{g}}, p - \pi_k p) \\
&\leq c \{ |\mathbf{w}_{\mathbf{g}} - P_k \mathbf{w}_{\mathbf{g}}|_1 + \|r_{\mathbf{g}} - \pi_k r_{\mathbf{g}}\| \} \cdot \\
&\quad \{ |\mathbf{u} - P_k \mathbf{u}|_1 + \|p - \pi_k p\| \} \\
&\leq c^* h_k \{ |\mathbf{u} - P_k \mathbf{u}|_1 + \|p - \pi_k p\| \} \|\mathbf{g}\|
\end{aligned}$$

und somit

$$\|\mathbf{u} - P_k \mathbf{u}\| \leq c^* h_k \{ |\mathbf{u} - P_k \mathbf{u}|_1 + \|p - \pi_k p\| \}.$$

Wegen der Definition von $\|\cdot\|_k$ folgt hieraus

$$\|[\mathbf{u} - P_k \mathbf{u}, p - \pi_k p]\|_k \leq c^* h_k \{ |\mathbf{u} - P_k \mathbf{u}|_1 + \|p - \pi_k p\| \}.$$

Daher gilt für jedes $[\mathbf{v}_k, q_k] \in X_k \times M_k$

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{e}_k^m - \mathbf{u}_{k-1}^*, \mathbf{v}_k) + b(\mathbf{v}_k, \varepsilon_k^m - p_{k-1}^*) + b(\mathbf{e}_k^m - \mathbf{u}_{k-1}^*, q_k) \\
= a(\mathbf{e}_k^m - \mathbf{u}_{k-1}^*, \mathbf{v}_k - P_{k-1} \mathbf{v}_k) + b(\mathbf{v}_k - P_{k-1} \mathbf{v}_k, \varepsilon_k^m - p_{k-1}^*) \\
\quad + b(\mathbf{e}_k^m - \mathbf{u}_{k-1}^*, q_k - \pi_{k-1} q_k) \\
= a(\mathbf{e}_k^m, \mathbf{v}_k - P_{k-1} \mathbf{v}_k) + b(\mathbf{v}_k - P_{k-1} \mathbf{v}_k, \varepsilon_k^m) + b(\mathbf{e}_k^m, q_k - \pi_{k-1} q_k) \\
\leq \|[\mathbf{e}_k^m, \varepsilon_k^m]\|_{2,k} \|[\mathbf{v}_k - P_{k-1} \mathbf{v}_k, q_k - \pi_{k-1} q_k]\|_k \\
\leq ch_{k-1} \|[\mathbf{e}_k^m, \varepsilon_k^m]\|_{2,k} \{ |\mathbf{v}_k|_1 + \|q_k\| \}.
\end{aligned}$$

Wegen der Voraussetzungen an die Bilinearformen a und b folgt hieraus

$$\|\mathbf{e}_k^m - \mathbf{u}_{k-1}^*\|_1 + \|\varepsilon_k^m - p_{k-1}^*\| \leq ch_{k-1} \|[\mathbf{e}_k^m, \varepsilon_k^m]\|_{2,k}.$$

Da $\mathbf{u}_{k-1}^* = P_{k-1} \mathbf{e}_k^m$, $p_{k-1}^* = \pi_{k-1} \varepsilon_k^m$ und $h_{k-1} \leq ch_k$ ist, folgt hieraus die Behauptung. \square

SATZ II.9.8 (Konvergenzraten des Zwei- und Mehrgitteralgorithmus). *Unter obigen Voraussetzungen gibt es zwei von k unabhängige Konstanten c_1 , c_2 , so dass für alle $\omega_k \in [c_1 h_k^{-2}, c_2 h_k^{-2}]$ folgendes gilt:*

- (1) *Die Konvergenzrate δ_{TG} gemessen in der $\|\cdot\|_k$ -Norm des Zweigitteralgorithmus II.9.4 (d.h. auf Niveau $k-1$ wird exakt gelöst) ist beschränkt durch*

$$\delta_{TG} \leq \frac{c_0}{\sqrt{2m+1}}.$$

Die Konstante c_0 hängt nicht von k ab.

(2) Es gibt ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq m_0$, alle $\mu \geq 2$ und alle k die Konvergenzrate δ_k gemessen in der $\|\cdot\|_k$ -Norm des Mehrgitteralgorithmus II.9.4 beschränkt ist durch

$$\delta_k \leq 2\delta_{TG} \leq \frac{1}{2}.$$

BEWEIS. *ad (1)*: Aus der Glättungs- und der Approximationseigenschaft folgt für den Zweigitteralgorithmus

$$\begin{aligned} \|[\mathbf{e}_k^{m+1}, \varepsilon_k^{m+1}]\|_k &= \|[\mathbf{e}_k^m - \mathbf{u}_{k-1}^*, \varepsilon_k^m - p_{k-1}^*]\|_k \\ &\leq c_1 h_k^2 \|[\mathbf{e}_k^m, \varepsilon_k^m]\|_{2,k} \\ &\leq \frac{c_2}{\sqrt{2m+1}} \|[\mathbf{e}_k^0, \varepsilon_k^0]\|_k. \end{aligned}$$

ad (2): Konstruktionsgemäß gilt für den Fehler nach der Grobgitterkorrektur

$$\begin{aligned} \|[\mathbf{e}_k^{m+1}, \varepsilon_k^{m+1}]\|_k &= \|[\mathbf{e}_k^m - \tilde{\mathbf{u}}_{k-1}, \varepsilon_k^m - \tilde{p}_{k-1}]\|_k \\ &\leq \|[\mathbf{e}_k^m - \mathbf{u}_{k-1}^*, \varepsilon_k^m - p_{k-1}^*]\|_k \\ &\quad + \|[\mathbf{u}_{k-1}^* - \tilde{\mathbf{u}}_{k-1}, p_{k-1}^* - \tilde{p}_{k-1}]\|_k. \end{aligned}$$

Gemäß Teil (1) ist

$$\|[\mathbf{e}_k^m - \mathbf{u}_{k-1}^*, \varepsilon_k^m - p_{k-1}^*]\|_k \leq \delta_{TG} \|[\mathbf{e}_k^0, \varepsilon_k^0]\|_k.$$

Wegen der Definition der Norm $\|\cdot\|_k$ und der Mehrgitterkonvergenzrate gilt weiter

$$\begin{aligned} \|[\mathbf{u}_{k-1}^* - \tilde{\mathbf{u}}_{k-1}, p_{k-1}^* - \tilde{p}_{k-1}]\|_k &\leq \|[\mathbf{u}_{k-1}^* - \tilde{\mathbf{u}}_{k-1}, p_{k-1}^* - \tilde{p}_{k-1}]\|_{k-1} \\ &\leq \delta_{k-1}^\mu \|[\mathbf{u}_{k-1}^*, p_{k-1}^*]\|_{k-1} \\ &\leq c\delta_{k-1}^\mu \|[\mathbf{u}_{k-1}^*, p_{k-1}^*]\|_k. \end{aligned}$$

Dabei hängt die Konstante $c \geq 1$ nur von $\frac{h_{k-1}}{h_k}$ ab. Mit der Dreiecksungleichung, Teil (1) und der Fehlerdarstellung (II.9.7) folgt schließlich

$$\begin{aligned} \|[\mathbf{u}_{k-1}^*, p_{k-1}^*]\|_k &\leq \|[\mathbf{e}_k^m - \mathbf{u}_{k-1}^*, \varepsilon_k^m - p_{k-1}^*]\|_k + \|[\mathbf{e}_k^m, \varepsilon_k^m]\|_k \\ &\leq (\delta_{TG} + 1) \|[\mathbf{e}_k^0, \varepsilon_k^0]\|_k. \end{aligned}$$

Gemäß Teil (1) gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq m_0$ gilt

$$\delta_{TG} \leq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}-1}{2c} \right\}.$$

Für diese m und $\mu \geq 2$ folgt dann aus obigen Abschätzungen induktiv

$$\begin{aligned}\delta_k &\leq \delta_{TG} + c\delta_{k-1}^\mu(1 + \delta_{TG}) \\ &\leq \delta_{TG} + c\delta_{k-1}^2(1 + \delta_{TG}) \\ &\leq \delta_{TG} + 4c\delta_{TG}^2(1 + \delta_{TG}) \\ &= \delta_{TG}[1 + 4c\delta_{TG} + 4c\delta_{TG}^2] \\ &\leq \delta_{TG}[1 + 2c\delta_{TG}]^2 \\ &\leq 2\delta_{TG}.\end{aligned}$$

□

BEMERKUNG II.9.9 (Verbesserung des MG-Algorithmus). (1) Mit einer Modifikation des vorigen Beweises kann man zeigen, dass das Konvergenzresultat von Satz II.9.8 auch gilt, wenn in Algorithmus II.9.4 die gedämpfte Richardson Iteration

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_k^\ell &= \mathbf{u}_k^{\ell-1} + \omega_k^{-1}\{\mathbf{f}_k - A_k\mathbf{u}_k^{\ell-1} - B_k^*p_k^{\ell-1}\} \\ p_k^\ell &= p_k^{\ell-1} + h_k^{-2}\omega_k^{-1}\{g_k - B_k\mathbf{u}_k^{\ell-1}\}\end{aligned}$$

als Glätter benutzt wird. Da pro Glättungsschritt der Operator $\begin{pmatrix} A_k & B_k^* \\ B_k & 0 \end{pmatrix}$ nur noch einmal ausgewertet werden muss, halbiert sich in etwa der Aufwand für den Mehrgitteralgorithmus.

(2) Eine weitere Verbesserung der Konvergenzrate bei in etwa gleichem Aufwand kann man durch folgende Modifikation von Algorithmus II.9.4 erreichen. Sei α_k eine Approximation für den größten Eigenwert von A_k , der von der Ordnung h_k^{-2} ist. Ersetze in Schritt (1) von Algorithmus II.9.4 die gedämpfte Richardson Iteration durch die Vorschrift

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_k^\ell \\ p_k^\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_k^{\ell-1} \\ p_k^{\ell-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_k I & B_k^* \\ B_k & 0 \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} A_k & B_k^* \\ B_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_k^{\ell-1} \\ p_k^{\ell-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{f}_k \\ g_k \end{pmatrix} \right\}.$$

Ersetze vor der Grobgitterkorrektur den Druck p_k^m durch die Lösung \widehat{p}_k^m des Minimumproblems

$$\|A_k\mathbf{u}_k^m + B_k^*q_k - \mathbf{f}_k\|_{X_k} \rightarrow \min \quad \text{in } M_k.$$

Führe schließlich nach der Grobgitterkorrektur noch einen Schritt obiger Iterationsvorschrift aus. Mit diesen Modifikationen kann man die Glättungseigenschaft von Lemma II.9.6 mit $\frac{1}{m}$ statt $\frac{1}{\sqrt{2m+1}}$ beweisen. Der Beweis von Satz II.9.8 bleibt ansonsten unverändert. Da die Konvergenzrate des modifizierten Algorithmus $\frac{1}{m}$ statt $\frac{1}{\sqrt{2m+1}}$ beträgt, ist das neue Verfahren etwa doppelt so schnell wie Algorithmus II.9.4. Für die Durchführung obigen Iterationsschrittes beachte man, dass für gegebenes $[\mathbf{w}_k, r_k] \in X_k \times M_k$ die Lösung von

$$\begin{pmatrix} \alpha_k I & B_k^* \\ B_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_k \\ q_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_k \\ r_k \end{pmatrix}$$

gegeben ist durch

$$\mathbf{v}_k = \frac{1}{\alpha_k} [\mathbf{w}_k - B_k^* q_k], \quad q_k = (B_k B_k^*)^{-1} \{B_k \mathbf{w}_k - \alpha_k r_k\}.$$

Für die Stokes Gleichungen entspricht aber das Problem $(B_k B_k^*) q_k = B_k \mathbf{w}_k - \alpha_k r_k$ einer diskreten Poisson Gleichung. Diese kann mit den bekannten Verfahren leicht effizient näherungsweise gelöst werden.

II.10. A posteriori Fehlerschätzer

In [22, §III.3] haben wir für Finite Element Diskretisierungen der Reaktions-Diffusions Gleichung gezeigt, wie man aus den bekannten Daten der Differentialgleichung und der berechneten Finite Element Approximation leicht berechenbare lokale Größen bestimmen kann, die a posteriori globale obere und lokale untere Schranken für den Fehler der Finite Element Approximation liefern. Die wesentlichen Schritte hierbei waren:

- Die Stabilität des Variationsproblems, d.h. der Differentialoperator ist ein Isomorphismus zwischen geeigneten Sobolev-Räumen.
- Eine L^2 -Darstellung des Residuums der Finite Element Approximation.
- Die Konsistenz der Diskretisierung.
- Geeignete Interpolationsoperatoren, die unter minimalen Regularitätsannahmen lokale Fehlerabschätzungen liefern.
- Lokale Abschneidefunktionen.

Diese Ingredienzien lassen sich leicht auf gemischte Finite Element Diskretisierungen der Stokes Gleichungen übertragen. Um unnötige technische Schwierigkeiten zu vermeiden, betrachten wir im Folgenden affin äquivalente, zulässige und reguläre Unterteilungen \mathcal{T} polyhedraler Gebiete Ω und zugehörige Finite Element Räume $X_{\mathcal{T}}$, $M_{\mathcal{T}}$, die Geschwindigkeit und Druck approximieren. Man beachte, dass die nachfolgenden Argumente nie die Stabilität des Paares $(X_{\mathcal{T}}, M_{\mathcal{T}})$ erfordern. Wir nehmen an, dass es zwei Zahlen $\mu \geq 1$ und $\nu \geq 0$ gibt mit $X_{\mathcal{T}} \subset [S_0^{\mu,0}(\mathcal{T})]^n$ und $M_{\mathcal{T}} \subset S^{\nu,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega)$ und dass $[S_0^{1,0}(\mathcal{T})]^n \subset X_{\mathcal{T}}$ ist. Mit $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ bezeichnen wir die eindeutige schwache Lösung der Stokes Gleichungen und mit $(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}) \in X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}}$ eine Lösung der Finite Element Diskretisierung (II.6.1) (S. 67). Wir erinnern daran, dass diese Diskretisierung mit der Wahl $\delta_K = \delta_E = 0$ für alle $K \in \mathcal{T}$ und $E \in \mathcal{E}_{\Omega}$ dem abstrakten diskreten Problem (II.4.1) (S. 47) für die Stokes Gleichungen entspricht.

Wegen Satz II.3.4 (S. 46) gibt es eine Konstante $\beta > 0$, die nur von Ω abhängt, mit

$$\begin{aligned} & |\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}|_1 + \|p - p_\mathcal{T}\| \\ & \leq \beta^{-1} \sup_{\substack{(\mathbf{v}, q) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega) \\ \|\mathbf{v}\|_1^2 + \|q\|^2 = 1}} \left\{ \int_\Omega \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}) : \nabla \mathbf{v} - \int_\Omega (p - p_\mathcal{T}) \operatorname{div} \mathbf{v} \right. \\ & \quad \left. + \int_\Omega q \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}) \right\}. \end{aligned}$$

Wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gibt es ebenso eine Konstante c , die nur von der Raumdimension n abhängt, mit

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}) : \nabla \mathbf{v} - \int_\Omega (p - p_\mathcal{T}) \operatorname{div} \mathbf{v} + \int_\Omega q \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}) \\ & \leq \{|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}|_1^2 + \|p - p_\mathcal{T}\|^2\}^{\frac{1}{2}} \{\|\mathbf{v}\|_1^2 + \|q\|^2\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

für alle $(\mathbf{v}, q) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$. Dies ist die Stabilität des Variationsproblems.

Da $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ die schwache Lösung der Stokes Gleichungen ist, gilt für alle $(\mathbf{v}, q) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}) : \nabla \mathbf{v} - \int_\Omega (p - p_\mathcal{T}) \operatorname{div} \mathbf{v} + \int_\Omega q \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}) \\ & = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_\mathcal{T} : \nabla \mathbf{v} + \int_\Omega p_\mathcal{T} \operatorname{div} \mathbf{v} - \int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{u}_\mathcal{T}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung definiert das Residuum als stetiges lineares Funktional auf $H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$. Die Stabilität des Variationsproblems impliziert, dass die entsprechende Dualnorm des Residuums eine obere und untere Schranke für die Norm $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}|_1 + \|p - p_\mathcal{T}\|$ des Fehlers ist. Anders als der Fehler benutzt das Residuum nur die bekannten Funktionen \mathbf{f} , $\mathbf{u}_\mathcal{T}$ und $p_\mathcal{T}$.

Für die L^2 -Darstellung des Residuums integrieren wir die Terme $\int_\Omega \nabla \mathbf{u}_\mathcal{T} : \nabla \mathbf{v}$ und $\int_\Omega p_\mathcal{T} \operatorname{div} \mathbf{v}$ elementweise partiell. Für beliebiges $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n$ erhalten wir so mit der $n \times n$ Einheitsmatrix \mathbf{I}

$$\begin{aligned} & - \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_\mathcal{T} : \nabla \mathbf{v} + \int_\Omega p_\mathcal{T} \operatorname{div} \mathbf{v} \\ & = \sum_{K \in \mathcal{T}} \left\{ \int_K \Delta \mathbf{u}_\mathcal{T} \cdot \mathbf{v} - \int_{\partial K} \mathbf{n}_K \cdot \nabla \mathbf{u}_\mathcal{T} \cdot \mathbf{v} \right. \\ & \quad \left. - \int_K \nabla p_\mathcal{T} \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial K} p_\mathcal{T} \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{v} \right\} \\ & = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K (\Delta \mathbf{u}_\mathcal{T} - \nabla p_\mathcal{T}) \cdot \mathbf{v} - \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \int_E \mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_\mathcal{T} - p_\mathcal{T} \mathbf{I})) \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Dies liefert die L^2 -Darstellung des Residuums

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} : \nabla \mathbf{v} + \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v} - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K (\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}}) \cdot \mathbf{v} - \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \int_E \mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - p_{\mathcal{T}} \mathbf{I})) \cdot \mathbf{v} \\ & \quad - \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K q \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Terme $\mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot p_{\mathcal{T}} \mathbf{I})$ verschwinden, wenn wir stetige Druckapproximationen verwenden.

Aus Gleichung (II.6.1) (S. 67) folgt für jedes $(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}) \in X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}}$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} : \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}} + \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \int_{\Omega} q_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \\ &= - \sum_{K \in \mathcal{T}} \delta_K h_K^2 \int_K (\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}}) \cdot \nabla q_{\mathcal{T}} \\ & \quad - \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \delta_E h_E \int_E \mathbb{J}_E(p_{\mathcal{T}}) \mathbb{J}_E(q_{\mathcal{T}}). \end{aligned}$$

Dies ist der Konsistenzfehler der Diskretisierung. Unabhängig von der Wahl der Stabilisierungsparameter δ_K und δ_E verschwindet er für die Wahl $q_{\mathcal{T}} = 0$.

Sei nun $(\mathbf{v}, q) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ mit $|\mathbf{v}|_1^2 + \|q\|^2 = 1$ beliebig. Dann folgt aus obigen Identitäten für den Quasi-Interpolationsoperator $\mathcal{J}_{\mathcal{T}}$ aus §I.4 (S. 26)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} : \nabla \mathbf{v} + \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v} - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{J}_{\mathcal{T}} \mathbf{v}) - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} : \nabla (\mathbf{v} - \mathcal{J}_{\mathcal{T}} \mathbf{v}) \\ & \quad + \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathcal{J}_{\mathcal{T}} \mathbf{v}) - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K (\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}}) \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{J}_{\mathcal{T}} \mathbf{v}) \\ & \quad - \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \int_E \mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - p_{\mathcal{T}} \mathbf{I})) \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{J}_{\mathcal{T}} \mathbf{v}) \\ & \quad - \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K q \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Aus dieser Identität folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für Integrale und Summen und der Fehlerabschätzung (I.4.3) (S. 31)

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} : \nabla \mathbf{v} + \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v} - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \\
& \leq \sum_{K \in \mathcal{T}} \|\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}}\|_K c_1 h_K \|\nabla \mathbf{v}\|_{\tilde{\omega}_K} \\
& \quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \|\mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - p_{\mathcal{T}} \mathbf{I}))\|_E c_2 h_E^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\omega}_E} \\
& \quad + \sum_{K \in \mathcal{T}} \|q\|_K \|\operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_K \\
& \leq c \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \|\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}}\|_K^2 \right. \\
& \quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} h_E \|\mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - p_{\mathcal{T}} \mathbf{I}))\|_E^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_K^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
\eta_K &= \left\{ h_K^2 \|\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}}\|_K^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_K^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega} \cap \mathcal{E}_K} h_E \|\mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - p_{\mathcal{T}} \mathbf{I}))\|_E^2 \right\}^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

so folgt aus dieser Abschätzung und der Stabilität des Variationsproblems die globale obere Fehlerschranke

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_1 + \|p - p_{\mathcal{T}}\| \leq c_* \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} \eta_K^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

η_K ist der gesuchte residuelle a posteriori Fehlerschätzer. Wegen obiger Abschätzung ist der Fehlerschätzer zuverlässig. Man beachte, dass die Konstante in der oberen Fehlerschranke nur von der Stabilität des unendlich dimensional Variationsproblems und den Konstanten in der Interpolationsfehlerabschätzung von §I.4 (S. 26) abhängt.

Zum Nachweis einer analogen unteren Fehlerschranke beachten wir zunächst, dass wegen $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ für jedes $K \in \mathcal{T}$ gilt

$$\|\operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_K = \|\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})\|_K \leq \sqrt{n} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{1;K}.$$

Zur Abschätzung der Elementresiduums $\|\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}}\|_K$ ersetzen wir \mathbf{f} durch die Projektion $\mathbf{f}_{\mathcal{T}}$ auf $S^{0,-1}(\mathcal{T})^n$ und setzen $\psi_K(\mathbf{f}_{\mathcal{T}} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} -$

$\nabla p_{\mathcal{T}}$) als Testfunktion \mathbf{v} in die L^2 -Darstellung des Residuums ein. Dabei ist ψ_K die Element-Blasenfunktion aus §I.4 (S. 26). Dies liefert

$$\begin{aligned}
& \int_K \psi_K |\mathbf{f}_{\mathcal{T}} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}}|^2 \\
&= \int_K \psi_K (\mathbf{f}_{\mathcal{T}} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}}) \cdot (\mathbf{f}_{\mathcal{T}} - \mathbf{f}) \\
&\quad + \int_K \psi_K (\mathbf{f}_{\mathcal{T}} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}}) \cdot (\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}}) \\
&= \int_K \psi_K (\mathbf{f}_{\mathcal{T}} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}}) \cdot (\mathbf{f}_{\mathcal{T}} - \mathbf{f}) \\
&\quad + \int_K \nabla (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) : \nabla (\psi_K (\mathbf{f}_{\mathcal{T}} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}})) \\
&\quad - \int_K (p - p_{\mathcal{T}}) \operatorname{div} (\psi_K (\mathbf{f}_{\mathcal{T}} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}})).
\end{aligned}$$

Aus den inversen Abschätzungen (I.4.4) (S. 32) folgt

$$\begin{aligned}
& \int_K \psi_K |\mathbf{f}_{\mathcal{T}} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}}|^2 \\
&\quad \geq c_1 \|\mathbf{f}_{\mathcal{T}} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}}\|_K^2 \\
& \int_K \psi_K (\mathbf{f}_{\mathcal{T}} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}}) \cdot (\mathbf{f}_{\mathcal{T}} - \mathbf{f}) \\
&\quad \leq \|\mathbf{f}_{\mathcal{T}} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}}\|_K \|\mathbf{f}_{\mathcal{T}} - \mathbf{f}\|_K \\
& \int_K \nabla (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) : \nabla (\psi_K (\mathbf{f}_{\mathcal{T}} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}})) \\
&\quad \leq c_2 h_K^{-1} \|\mathbf{f}_{\mathcal{T}} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}}\|_K |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_{1;K} \\
& \int_K (p - p_{\mathcal{T}}) \operatorname{div} (\psi_K (\mathbf{f}_{\mathcal{T}} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}})) \\
&\quad \leq c_3 h_K^{-1} \|\mathbf{f}_{\mathcal{T}} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}}\|_K \|p - p_{\mathcal{T}}\|_K.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
& h_K \|\mathbf{f}_{\mathcal{T}} + \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \nabla p_{\mathcal{T}}\|_K \\
&\quad \leq c \left\{ |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_{1;K} + \|p - p_{\mathcal{T}}\|_K + h_K \|\mathbf{f}_{\mathcal{T}} - \mathbf{f}\|_K \right\}.
\end{aligned}$$

Das Kanten- bzw. Flächenresiduum $\|\mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - p_{\mathcal{T}} \mathbf{I}))\|_E$ wird analog durch Einsetzen von $\psi_E \mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - p_{\mathcal{T}} \mathbf{I}))$ als Testfunktion \mathbf{v} in die L^2 -Darstellung des Residuums abgeschätzt. Dabei ist ψ_E die Kanten- bzw. Flächenblasenfunktion aus §I.4 (S. 26). Bezeichnen wir wieder mit ω_E die Vereinigung der beiden Elemente, die eine innere

Kante bzw. Seitenfläche gemeinsam haben, liefert dies

$$\begin{aligned}
& \int_E \psi_E |\mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_\mathcal{T} - p_\mathcal{T} \mathbf{I}))|^2 \\
&= - \int_{\omega_E} \psi_E \mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_\mathcal{T} - p_\mathcal{T} \mathbf{I})) \cdot (\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}_\mathcal{T} - \nabla p_\mathcal{T}) \\
&\quad - \int_{\omega_E} \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}) : \nabla(\psi_E \mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_\mathcal{T} - p_\mathcal{T} \mathbf{I}))) \\
&\quad + \int_{\omega_E} (p - p_\mathcal{T}) \operatorname{div}(\psi_E \mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_\mathcal{T} - p_\mathcal{T} \mathbf{I}))).
\end{aligned}$$

Aus den inversen Abschätzungen (I.4.4) (S. 32) folgt

$$\begin{aligned}
& \int_E \psi_E |\mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_\mathcal{T} - p_\mathcal{T} \mathbf{I}))|^2 \\
&\quad \geq c_1 \|\mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_\mathcal{T} - p_\mathcal{T} \mathbf{I}))\|_E^2 \\
& \int_{\omega_E} \psi_E \mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_\mathcal{T} - p_\mathcal{T} \mathbf{I})) \cdot (\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}_\mathcal{T} - \nabla p_\mathcal{T}) \\
&\quad \leq c_2 h_E^{\frac{1}{2}} \|\mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_\mathcal{T} - p_\mathcal{T} \mathbf{I}))\|_E \|\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}_\mathcal{T} - \nabla p_\mathcal{T}\|_{\omega_E} \\
& \int_{\omega_E} \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}) : \nabla(\psi_E \mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_\mathcal{T} - p_\mathcal{T} \mathbf{I}))) \\
&\quad \leq c_3 h_E^{-\frac{1}{2}} \|\mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_\mathcal{T} - p_\mathcal{T} \mathbf{I}))\|_E |\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}|_{1;\omega_E} \\
& \int_{\omega_E} (p - p_\mathcal{T}) \operatorname{div}(\psi_E \mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_\mathcal{T} - p_\mathcal{T} \mathbf{I}))) \\
&\quad \leq c_4 h_E^{-\frac{1}{2}} \|\mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_\mathcal{T} - p_\mathcal{T} \mathbf{I}))\|_E \|p - p_\mathcal{T}\|_{\omega_E}.
\end{aligned}$$

Zusammen mit der Abschätzung des Elementresiduums ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned}
& h_E^{\frac{1}{2}} \|\mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_\mathcal{T} - p_\mathcal{T} \mathbf{I}))\|_E \\
&\quad \leq c \left\{ |\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}|_{1;\omega_E} + \|p - p_\mathcal{T}\|_{\omega_E} + h_E \|\mathbf{f}_\mathcal{T} - \mathbf{f}\|_{\omega_E} \right\}.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir somit die untere Fehlerschranke

$$\eta_K \leq c \left\{ |\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}|_{1;\omega_K} + \|p - p_\mathcal{T}\|_{\omega_K} + h_K \|\mathbf{f}_\mathcal{T} - \mathbf{f}\|_{\omega_K} \right\}.$$

Dies beweist die Effizienz des Fehlerschätzers.

Wie in [22, §III.4] kann man den Fehlerschätzer η_K für die Konstruktion adaptiv verfeinerter Unterteilungen nutzen. Andere Fehlerschätzer, die z.B. auf der Lösung geeigneter lokaler diskreter Stokes Probleme beruhen, findet man in [18, §4.10].

KAPITEL III

Stationäre Navier-Stokes Gleichungen

III.1. Lösbarkeit der stationären Navier-Stokes Gleichung

Wir betrachten die stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen (I.2.14) (S. 12) mit homogenen Dirichlet Randbedingungen in einem beschränkten, zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$ mit Lipschitz Rand Γ

$$(III.1.1) \quad \begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla \tilde{p} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} &= 0 & \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Dabei ist $\nu > 0$ die Viskosität. Später werden wir zeigen, wie inhomogene Dirichlet Randbedingungen behandelt werden können.

Für das weitere ist es hilfreich, Gleichung (III.1.1) umzuskalieren. Dazu dividieren wir die Impulsgleichung durch die Viskosität und setzen $p = \nu^{-1} \tilde{p}$. Dies liefert die äquivalenten Gleichungen

$$(III.1.2) \quad \begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p + \frac{1}{\nu} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \frac{1}{\nu} \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} &= 0 & \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Für eine schwache Formulierung von (III.1.2) definieren wir eine Trilinearform N durch

$$N(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}] \cdot \mathbf{w} = \int_{\Omega} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \mathbf{u}_i \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial x_i} \mathbf{w}_j.$$

SATZ III.1.1 (Eigenschaften von N). *N ist eine stetige Trilinearform auf $H_0^1(\Omega)^n \times H_0^1(\Omega)^n \times H_0^1(\Omega)^n$. Für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$ mit $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ gilt*

$$N(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -N(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad \text{und} \quad N(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0.$$

BEWEIS. Seien $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in C_0^\infty(\Omega)^n$. Dann folgt aus der Hölderschen Ungleichung

$$(III.1.3) \quad \begin{aligned} N(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{w}) \leq \|\nabla \mathbf{v}\| \|\mathbf{u} \otimes \mathbf{w}\| \\ &\leq \|\nabla \mathbf{v}\| \|\mathbf{u}\|_4 \|\mathbf{w}\|_4. \end{aligned}$$

Da $n \leq 4$ ist, ist gemäß dem Sobolevschen Einbettungssatz $H_0^1(\Omega)^n$ stetig in $L^4(\Omega)^n$ eingebettet. Da $C_0^\infty(\Omega)^n$ dicht ist $H_0^1(\Omega)^n$, beweist

dies die Stetigkeit von N .

Die Trilinearität ist offensichtlich.

Für $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in C_0^\infty(\Omega)^n$ folgt mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\begin{aligned}
 N(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \int_{\Omega} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \mathbf{u}_i \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial x_i} \mathbf{w}_j \\
 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial(\mathbf{u}_i \mathbf{v}_j \mathbf{w}_j)}{\partial x_i} - \mathbf{v}_j \frac{\partial(\mathbf{u}_i \mathbf{w}_j)}{\partial x_i} \right\} \\
 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left\{ \int_{\Gamma} \mathbf{n}_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_j \mathbf{w}_j - \int_{\Omega} \mathbf{v}_j \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_i} \mathbf{w}_j - \int_{\Omega} \mathbf{v}_j \frac{\partial \mathbf{w}_j}{\partial x_i} \mathbf{u}_i \right\} \\
 &= - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) - N(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}).
 \end{aligned}$$

Hieraus folgen die restlichen Eigenschaften von N . \square

Wegen Satz III.1.1 lautet die schwache Formulierung von (III.1.2):

Finde $\mathbf{u} \in X = H_0^1(\Omega)^n$, $p \in M = L_0^2(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned}
 \text{(III.1.4)} \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + \frac{1}{\nu} N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in X \\
 b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in M.
 \end{aligned}$$

Dabei ist wie bei den Stokes Gleichungen

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}, \quad b(\mathbf{v}, p) = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Offensichtlich ist jede klassische Lösung von (III.1.2) eine Lösung von (III.1.4) und umgekehrt jede hinreichend glatte Lösung von (III.1.4) eine klassische Lösung von (III.1.2).

Sei wie üblich

$$V = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}.$$

Dann ist wegen Satz II.3.3 (S. 45) und Bemerkung II.2.3 (S. 40) Problem (III.1.4) äquivalent zu

Finde $\mathbf{u} \in V$ mit

$$\text{(III.1.5)} \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{\nu} N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Für den Nachweis der Lösbarkeit von Problem (III.1.5) und damit auch von Problem (III.1.4) und für die spätere Finite Element Diskretisierung ist es hilfreich, Problem (III.1.5) als eine äquivalente Operatorgleichung zu formulieren. Hierzu bezeichnen wir mit $T \in \mathcal{L}(H^{-1}(\Omega)^n, V)$ den *Stokes Operator*, der jedem $\mathbf{w} \in H^{-1}(\Omega)^n$ die eindeutige Lösung $\mathbf{u} = T\mathbf{w} \in V$ von

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

zuordnet. Weiter definieren wir stetige Abbildungen $G, G_0 : H_0^1(\Omega)^n \rightarrow H^{-1}(\Omega)^n$ durch

$$\langle G_0(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad G(\mathbf{u}) = G_0(\mathbf{u}) - \mathbf{f}.$$

Dann ist Problem (III.1.5) äquivalent zu

Finde $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n$ mit

$$(III.1.6) \quad F(\lambda, \mathbf{u}) = \mathbf{u} + \lambda TG(\mathbf{u}) = 0, \quad \lambda = \frac{1}{\nu}.$$

Man beachte, dass für alle $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n$ und alle $\mathbf{v} \in V$ gilt

$$a(F(\lambda, \mathbf{u}), \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \lambda \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle.$$

SATZ III.1.2 (Erster Schauderscher Fixpunktsatz). *Seien X ein Banach-Raum, $K \subset X$ nicht leer, konvex und kompakt und $\psi : K \rightarrow K$ stetig. Dann besitzt ψ einen Fixpunkt in K .*

BEWEIS. [17, Satz X.7.10]. □

SATZ III.1.3 (Zweiter Schauderscher Fixpunktsatz). *Seien X ein endlich dimensionaler Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_X$ und $\varphi : X \rightarrow X$ stetig. Es gebe ein $r > 0$ mit $(\varphi(u), u)_X \geq 0$ für alle $u \in X$ mit $\|u\|_X = r$. Dann gibt es ein $u \in X$ mit $\|u\|_X \leq r$ und $\varphi(u) = 0$.*

BEWEIS. (Vgl. [17, Satz X.7.13]) Wir nehmen an, φ besitze keine Nullstelle in $K = \{u \in X : \|u\|_X \leq r\}$. K ist konvex und kompakt, da X endlich dimensional ist. Da φ keine Nullstelle in K besitzt, ist

$$\psi(u) = -\frac{r}{\|\varphi(u)\|_X} \varphi(u)$$

auf K wohldefiniert und stetig. Aus Satz III.1.2 folgt, dass ψ einen Fixpunkt u^* in K besitzt. Wegen $\|\psi(u)\|_X = r$ für alle $u \in K$ gilt $\|u^*\|_X = r$. Damit folgt

$$r^2 = (u^*, u^*)_X = (\psi(u^*), u^*)_X = -r \|\varphi(u^*)\|_X^{-1} (\varphi(u^*), u^*)_X \leq 0.$$

Dies ist ein Widerspruch. □

SATZ III.1.4 (Existenzsatz; a priori Abschätzung). *Die stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen (III.1.2) besitzen für jedes $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^n$ und jedes $\nu \in \mathbb{R}_+^*$ mindestens eine schwache Lösung. Für jede schwache Lösung \mathbf{u} gilt die a priori Abschätzung*

$$(III.1.7) \quad |\mathbf{u}|_1 \leq \frac{1}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{-1}.$$

BEWEIS. Sei \mathbf{u} eine schwache Lösung der Navier-Stokes Gleichungen. Aus (III.1.5) und Satz III.1.1 folgt

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}|_1^2 &= a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \frac{1}{\nu} N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{1}{\nu} \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle \\ &\leq \frac{1}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{-1} |\mathbf{u}|_1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die a priori Abschätzung (III.1.7).

Wir zeigen nun die Existenz einer Lösung mit Hilfe von Satz III.1.3.

V ist als abgeschlossener Unterraum von $H_0^1(\Omega)^n$ separabel, d.h., es gibt eine Folge $(V_m)_{m \in \mathbb{N}}$ endlich dimensionaler Unterräume mit $V_m \subset V_{m+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $V = \overline{\bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_m}$. Bezeichne mit $T_m \in \mathcal{L}(H^{-1}(\Omega)^n, V_m)$

den Stokes Operator auf V_m , der jedem $\mathbf{w} \in H^{-1}(\Omega)^n$ die eindeutige Lösung $\mathbf{u}_m = T_m \mathbf{w} \in V_m$ von

$$a(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in V_m$$

zuordnet. Da a V -koerziv ist, ist T_m wohldefiniert. Definiere mit $\lambda = \frac{1}{\nu}$ die Abbildung $F_m : \mathbb{R}_+^* \times V_m \rightarrow V_m$ durch

$$F_m(\lambda, \mathbf{u}) = \mathbf{u} + \lambda T_m G(\mathbf{u}).$$

Sei $\mathbf{u} \in V_m$ mit $|\mathbf{u}|_1 = \lambda \|\mathbf{f}\|_{-1}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} a(F_m(\lambda, \mathbf{u}), \mathbf{u}) &= a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \lambda N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) - \lambda \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle \\ &= a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \lambda \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle \\ &\geq |\mathbf{u}|_1^2 - \lambda |\mathbf{u}|_1 \|\mathbf{f}\|_{-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daher können wir Satz III.1.3 auf $X = V_m$, $(\cdot, \cdot)_X = a(\cdot, \cdot)$, $\varphi = F_m(\lambda, \cdot)$ anwenden und erhalten für alle λ und alle m die Existenz eines $\mathbf{u}_{\lambda, m} \in V_m$ mit

$$(III.1.8) \quad |\mathbf{u}_{\lambda, m}|_1 \leq \lambda \|\mathbf{f}\|_{-1}$$

und

$$(III.1.9) \quad F_m(\lambda, \mathbf{u}_{\lambda, m}) = 0.$$

Aus (III.1.8) und dem Sobolevschen Einbettungssatz folgt, dass es ein $\mathbf{u}_\lambda^* \in V$ gibt mit $\mathbf{u}_{\lambda, m} \rightarrow \mathbf{u}_\lambda^*$ schwach in H^1 und stark in L^4 . Aus (III.1.9) folgt für alle $\mathbf{v} \in V_n$ und $n \leq m$

$$(III.1.10) \quad a(\mathbf{u}_{\lambda, m}, \mathbf{v}) + \lambda N(\mathbf{u}_{\lambda, m}, \mathbf{u}_{\lambda, m}, \mathbf{v}) = \lambda \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle.$$

Wegen der schwachen Konvergenz der Folge $(\mathbf{u}_{\lambda, m})_{m \in \mathbb{N}}$ in H^1 gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\mathbf{v} \in V_n$

$$a(\mathbf{u}_{\lambda, m}, \mathbf{v}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a(\mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{v}).$$

Wegen der Trilinearität von N , Satz III.1.1 und Abschätzung (III.1.3) gilt weiter

$$\begin{aligned} &|N(\mathbf{u}_{\lambda, m}, \mathbf{u}_{\lambda, m}, \mathbf{v}) - N(\mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{v})| \\ &= |N(\mathbf{u}_{\lambda, m} - \mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{u}_{\lambda, m}, \mathbf{v}) + N(\mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{u}_{\lambda, m} - \mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{v})| \\ &= |N(\mathbf{u}_{\lambda, m} - \mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{u}_{\lambda, m}, \mathbf{v}) - N(\mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{v}, \mathbf{u}_{\lambda, m} - \mathbf{u}_\lambda^*)| \\ &\leq \|\mathbf{u}_{\lambda, m} - \mathbf{u}_\lambda^*\|_4 \{ |\mathbf{u}_{\lambda, m}|_1 \|\mathbf{v}\|_4 + |\mathbf{v}|_1 \|\mathbf{u}_\lambda^*\|_4 \} \\ &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Also können wir in (III.1.10) für festes \mathbf{v} den Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ ausführen und erhalten

$$a(\mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{v}) + \lambda N(\mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{u}_\lambda^*, \mathbf{v}) = \lambda \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in V_n, n \in \mathbb{N}.$$

Da $\bigcup V_n$ dicht ist in V , zeigt dies, dass \mathbf{u}_λ^* eine schwache Lösung der Navier-Stokes Gleichungen ist. \square

SATZ III.1.5 (Eindeutigkeitsatz). *Setze zur Abkürzung*

$$\gamma = \|N\|_{\mathcal{L}^3} = \sup_{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n \setminus \{0\}} \frac{N(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})}{|\mathbf{u}|_1 |\mathbf{v}|_1 |\mathbf{w}|_1}.$$

Gilt $\gamma \nu^{-2} \|\mathbf{f}\|_{-1} < 1$, besitzen die stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen (III.1.2) eine eindeutige schwache Lösung.

BEWEIS. Wegen Satz III.1.4 müssen wir nur noch die Eindeutigkeit der schwachen Lösung zeigen. Seien also \mathbf{u}_1 und \mathbf{u}_2 zwei schwache Lösungen und $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$. Wegen Satz III.1.4 ist $|\mathbf{u}_i|_1 \leq \frac{1}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{-1}$, $i = 1, 2$. Mit Satz III.1.1 folgt wegen $F(\frac{1}{\nu}, \mathbf{u}_1) = 0 = F(\frac{1}{\nu}, \mathbf{u}_2)$ und $N(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= a\left(F\left(\frac{1}{\nu}, \mathbf{u}_1\right) - F\left(\frac{1}{\nu}, \mathbf{u}_2\right), \mathbf{v}\right) \\ &= a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \frac{1}{\nu} \{N(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - N(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v})\} \\ &= |\mathbf{v}|_1^2 + \frac{1}{\nu} \{N(\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + N(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{v})\} \\ &\geq |\mathbf{v}|_1^2 - \gamma \nu^{-1} |\mathbf{v}|_1^2 |\mathbf{u}_1|_1 \\ &\geq |\mathbf{v}|_1^2 \{1 - \gamma \nu^{-2} \|\mathbf{f}\|_{-1}\}. \end{aligned}$$

Wegen $\gamma \nu^{-2} \|\mathbf{f}\|_{-1} < 1$ ist daher $\mathbf{v} = 0$. \square

SATZ III.1.6 (Regularitätssatz). *Jede schwache Lösung der stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen hat die gleiche Regularität wie die Lösung der Stokes Gleichungen mit gleicher rechter Seite \mathbf{f} . Ist insbesondere $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^n$ und $\Gamma \in C^2$ oder Ω ein konvexes Polygon, so ist jede schwache Lösung der Navier-Stokes Gleichungen in $H^2(\Omega)^n \times H^1(\Omega)$.*

BEWEIS. Der Beweis erfolgt mit einem „Münchhausenargument“. Wir zeigen nur die H^2 -Regularität; höhere Regularität wird völlig analog bewiesen.

Sei also $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$, $\Gamma \in C^2$ oder Ω ein konvexes Polygon und $\mathbf{u} \in V$ eine Lösung von (III.1.5). Aus dem Sobolevschen Einbettungssatz folgt wegen $n \leq 3$, dass $\mathbf{u} \in L^6(\Omega)^n$ ist. Wegen der Hölderschen Ungleichung ist daher $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \in L^{\frac{5}{3}}(\Omega)^n$. Wiederum mit der Hölderschen Ungleichung folgt hieraus

$$|N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}\|_{\frac{5}{3}} \|\mathbf{v}\|_{\frac{5}{2}} \quad \forall \mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)^n.$$

Da $C_0^\infty(\Omega)^n$ dicht ist in $H_0^1(\Omega)^n$ und $H^{\frac{3}{10}}(\Omega)^n$ stetig in $L^{\frac{5}{2}}(\Omega)^n$ eingebettet ist, zeigt dies $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \in H^{-\frac{3}{10}}(\Omega)^n$. Wegen der H^2 -Regularität des Stokes Problems und $\mathbf{u} = \frac{1}{\nu}TG(\mathbf{u})$ folgt hieraus $\mathbf{u} \in H^{2-\frac{3}{10}}(\Omega)^n = H^{1+\frac{7}{10}}(\Omega)^n$. Wegen des Sobolev'schen Einbettungssatzes ist daher $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega)^n$ und somit $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^n$. Wiederum wegen der H^2 -Regularität des Stokes Problems und $\mathbf{u} = \frac{1}{\nu}TG(\mathbf{u})$ impliziert dies $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^n$, $p \in H^1(\Omega)$. \square

Die folgende Definition spielt eine wesentliche Rolle für die Finite Element Diskretisierung der Navier-Stokes Gleichungen.

DEFINITION III.1.7 (Reguläre Lösung; regulärer Lösungsast). (1) Eine Lösung $\mathbf{u}_\lambda \in V$ von (III.1.6) mit $\lambda = \frac{1}{\nu}$ heißt *regulär*, wenn $D_{\mathbf{u}}F(\lambda, \mathbf{u}_\lambda) \in \text{Isom}(H_0^1(\Omega)^n, H_0^1(\Omega)^n)$ ist. (2) Sei $\Lambda \subset \mathbb{R}_+^*$ ein nicht leeres Intervall. Eine Abbildung $\Lambda \ni \lambda \mapsto \mathbf{u}_\lambda \in V$ heißt ein *regulärer Lösungsast* von (III.1.6), wenn die Abbildung stetig und jedes \mathbf{u}_λ eine reguläre Lösung von (III.1.6) ist.

SATZ III.1.8 (Reguläre Lösungen der stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen). Sei \mathbf{u}_λ eine Lösung von (III.1.6) mit $\lambda\gamma|\mathbf{u}_\lambda|_1 < 1$. Dann ist \mathbf{u}_λ regulär.

BEWEIS. Sei $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n \setminus \{0\}$ beliebig. Aus der Definition von G folgt für jedes $\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$

$$\langle D_{\mathbf{u}}G(\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = N(\mathbf{v}, \mathbf{u}_\lambda, \mathbf{w}) + N(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Also gilt wegen $N(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$

$$\begin{aligned} a(D_{\mathbf{u}}F(\lambda, \mathbf{u}_\lambda)\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= a(\mathbf{v} + \lambda TD_{\mathbf{u}}G(\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &= a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \lambda \langle D_{\mathbf{u}}G(\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= |\mathbf{v}|_1^2 + \lambda N(\mathbf{v}, \mathbf{u}_\lambda, \mathbf{v}) + \lambda N(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &\geq |\mathbf{v}|_1^2 - \lambda\gamma|\mathbf{v}|_1^2|\mathbf{u}_\lambda|_1 \\ &= |\mathbf{v}|_1^2 \{1 - \lambda\gamma|\mathbf{u}_\lambda|_1\}. \end{aligned}$$

Wegen $\lambda\gamma|\mathbf{u}_\lambda|_1 < 1$ zeigt dies die $H_0^1(\Omega)^n$ -Koerzivität der Bilinearform $\mathbf{v}, \mathbf{w} \mapsto a(D_{\mathbf{u}}F(\lambda, \mathbf{u}_\lambda)\mathbf{v}, \mathbf{w})$ und damit die Isomorphie von $D_{\mathbf{u}}F(\lambda, \mathbf{u}_\lambda)$. \square

Das folgende Beispiel soll ein Gefühl für das asymptotische Verhalten von $\lambda\gamma|\mathbf{u}_\lambda|_1$ und $\|D_{\mathbf{u}}F(\lambda, \mathbf{u}_\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}}$ für $\lambda \rightarrow \infty$, d.h. $\nu \rightarrow 0$, vermitteln.

BEISPIEL III.1.9 (Eindimensionale Navier-Stokes Gleichung). Wir betrachten die eindimensionale Navier-Stokes Gleichung

$$(III.1.11) \quad -u'' + \lambda uu' = 0 \quad \text{in } I = (-1, 1), \quad u(-1) = 1, \quad u(1) = -1.$$

Wegen $uu' = (\frac{1}{2}u^2)'$ ist $-u' + \frac{\lambda}{2}u^2$ konstant. Daher muss jede Lösung von (III.1.11) die Form

$$u_\lambda(x) = \beta_\lambda \tanh(\alpha_\lambda x)$$

haben mit $\alpha_\lambda, \beta_\lambda \in \mathbb{R}$. Aus den Randbedingungen folgt $\beta_\lambda = -\frac{1}{\tanh(\alpha_\lambda)}$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert die Bestimmungsgleichung

$$(III.1.12) \quad 2\alpha_\lambda \tanh(\alpha_\lambda) = \lambda$$

für α_λ . Man überzeugt sich leicht, dass (III.1.12) für jedes $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ eine eindeutige Lösung $\alpha_\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ besitzt. Eine einfache Rechnung liefert

$$|u_\lambda|_1^2 = \int_{-1}^1 (u'_\lambda)^2 = \int_{-1}^1 u'_\lambda \left[-\frac{2\alpha_\lambda^2}{\lambda} + \frac{\lambda}{2}u_\lambda^2 \right] = \frac{4\alpha_\lambda^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{3}$$

und somit

$$|u_\lambda|_1 = \sqrt{\frac{4\alpha_\lambda^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{3}}.$$

Offensichtlich ist

$$|N(u, v, w)| = \left| \int_{-1}^1 uv'w \right| \leq \|u\|_\infty \|v'\| \|w\|.$$

Für jedes $w \in H_0^1(I)$ und $x \in I$ gilt

$$\begin{aligned} |w(x)| &= \left| \int_{-1}^x w'(t) dt \right| \leq \left\{ \int_{-1}^x dt \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{-1}^x w'(t)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2} \|w'\| \end{aligned}$$

und somit

$$\|w\|_\infty \leq \sqrt{2} \|w'\|.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= \int_{-1}^1 w(x)^2 dx = \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^x w'(t) dt \right|^2 dx \\ &\leq \int_{-1}^1 \left\{ (x+1) \int_{-1}^x w'(t)^2 dt \right\} dx \\ &\leq 2 \|w'\|^2 \end{aligned}$$

und somit

$$\|w\| \leq \sqrt{2} \|w'\|.$$

Also ist $\gamma \leq 2$. Damit ist die Bedingung $\lambda\gamma|u_\lambda|_1 < 1$ sicher dann erfüllt, wenn gilt $2\lambda\sqrt{\frac{4\alpha_\lambda^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{3}} < 1$ d.h. $\alpha_\lambda^2 \leq \frac{1}{12}\lambda^2 + \frac{1}{16\lambda}$. Aus der Bestimmungsgleichung (III.1.12) folgt andererseits $\lambda = 2\alpha_\lambda \tanh(\alpha_\lambda) \leq 2\alpha_\lambda$ und somit $\alpha_\lambda \geq \frac{\lambda}{2}$. Also ist $\alpha_\lambda^2 \geq \frac{1}{12}\lambda^2 + \frac{1}{16\lambda}$ sicherlich dann, wenn gilt

$$\frac{\lambda^2}{4} \geq \frac{1}{12}\lambda^2 + \frac{1}{16\lambda} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \geq \frac{3^{\frac{1}{3}}}{2}.$$

Also ist das Kriterium von Satz III.1.8 für die Regularität des Lösungsastes für $\lambda \geq \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2} \approx 0.721$ nicht mehr erfüllt, d.h. Satz III.1.8 ist nur für den Bereich $\lambda \lesssim 0.721$ bzw. $\nu \gtrsim 1.386$ anwendbar.

Im aktuellen Beispiel ist

$$\|D_u F(\lambda, u_\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}} = \sup_{f \in H^{-1}(I) \setminus \{0\}} \frac{|v|_1}{\|f\|_{-1}},$$

wobei v das Randwertproblem

$$(III.1.13) \quad -v'' + \lambda u_\lambda v' + \lambda v u_\lambda' = f \quad \text{in } I, \quad v(\pm 1) = 0$$

löst. Sei $\bar{u}_\lambda(x) = -2 \ln(\cosh(\alpha_\lambda x))$. Dann ist $\bar{u}_\lambda' = \lambda u_\lambda$ und

$$\begin{aligned} -v'' + \lambda u_\lambda v' + \lambda u_\lambda' v &= [-v' + \lambda u_\lambda v]' = [-v' + \bar{u}_\lambda' v]' \\ &= -\left[e^{\bar{u}_\lambda} (e^{-\bar{u}_\lambda} v)' \right]'. \end{aligned}$$

Also ist die eindeutige Lösung von (III.1.13) gegeben durch

$$v(x) = e^{\bar{u}_\lambda(x)} \left[\int_{-1}^x e^{-\bar{u}_\lambda(t)} \left\{ c - \int_0^t f(s) ds \right\} dt \right],$$

wobei c durch die Bedingung $v(1) = 0$ festgelegt ist. Ist f gerade, ergibt sich aus Symmetriegründen $c = 0$.

Sei nun speziell $f(x) = \cosh(\alpha_\lambda x)$. Dann folgt

$$v(x) = \frac{\cosh^3(\alpha_\lambda) - \cosh^3(\alpha_\lambda x)}{3\alpha_\lambda^2 \cosh^2(\alpha_\lambda x)}.$$

Wegen $\|w\|_\infty \leq \sqrt{2} \|w'\|$ für alle $w \in H_0^1(I)$ folgt für alle $\varphi \in L^\infty(I)$

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{-1} &= \sup_{w \in H_0^1(I) \setminus \{0\}} \frac{\int_{-1}^1 \varphi w}{|w|_1} \leq \sup_{w \in H_0^1(I) \setminus \{0\}} \frac{2 \|\varphi\|_\infty \|w\|_\infty}{|w|_1} \\ &\leq \sqrt{8} \|\varphi\|_\infty. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für obiges f und v wegen $\cosh(\alpha_\lambda) = \|f\|_\infty$

$$\begin{aligned} |v|_1 &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \|v\|_\infty \geq \frac{1}{\sqrt{2}} |v(0)| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cosh^3(\alpha_\lambda) - 1}{3\alpha_\lambda^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cosh^3(\alpha_\lambda) - 1}{3\alpha_\lambda^2 \cosh(\alpha_\lambda)} \cosh(\alpha_\lambda) \\ &\geq \frac{1}{4} \frac{\cosh^3(\alpha_\lambda) - 1}{3\alpha_\lambda^2 \cosh(\alpha_\lambda)} \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Also ist für $\lambda \rightarrow \infty$

$$\|D_u F(\lambda, u_\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H_0^1(I), H_0^1(I))} \geq \frac{\cosh^3(\alpha_\lambda) - 1}{12\alpha_\lambda^2 \cosh(\alpha_\lambda)} \approx e^\lambda.$$

Zum Abschluss dieses Paragraphen wollen wir zeigen, wie die Ergebnisse der Sätze III.1.4, III.1.5, III.1.6 und III.1.8 auf Navier-Stokes Gleichungen mit inhomogenen Dirichlet Randbedingungen übertragen werden können. Wir betrachten daher die stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen (III.1.2) mit der inhomogenen Randbedingung

$$(III.1.14) \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{auf } \Gamma.$$

Dabei muss wegen $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ in Ω das Vektorfeld \mathbf{g} die *Kompatibilitätsbedingung*

$$\int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0$$

erfüllen. Wegen Bemerkung II.3.6 (S. 46) gibt es eine divergenzfreie Fortsetzung \mathbf{u}_g von \mathbf{g} , d.h. $\mathbf{u}_g \in H^1(\Omega)^n$ und

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u}_g &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}_g &= \mathbf{g} \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Jede schwache Lösung (\mathbf{u}, p) von (III.1.2) mit der Randbedingung (III.1.14) können wir in der Form $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_g$ mit $\tilde{\mathbf{u}} \in H_0^1(\Omega)^n$ schreiben. Wegen

$$\begin{aligned} N(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{z}) &= N(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) + N(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}) \\ &\quad + N(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) + N(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{z}) \end{aligned}$$

löst dann $\tilde{\mathbf{u}}, p$ das Problem

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + \frac{1}{\nu} N(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= \langle \tilde{\ell}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n \\ b(\tilde{\mathbf{u}}, q) &= 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \frac{1}{\nu} N(\mathbf{u}_g, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \frac{1}{\nu} N(\mathbf{v}, \mathbf{u}_g, \mathbf{w}) \\ \langle \tilde{\ell}, \mathbf{v} \rangle &= \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{\nu} N(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_g, \mathbf{v}) - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_g : \nabla \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Entsprechend muss für die Übertragung der Sätze III.1.4, III.1.5, III.1.6 und III.1.8 die Bilinearform a stets durch die Bilinearform \tilde{a} ersetzt werden. Aus den Beweisen dieser Sätze ergibt sich unmittelbar, dass sie gültig bleiben, sofern wir die H_0^1 -Koerzivität von \tilde{a} , d.h.

$$(III.1.15) \quad \tilde{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha |\mathbf{v}|_1^2 \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n$$

mit $\alpha > 0$ zeigen können. Wir müssen dann überall nur ν durch $\alpha\nu$ ersetzen.

Aus Satz III.1.1, der Hölderschen Ungleichung und dem Sobolevschen

Einbettungssatz $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ für $n \leq 3$ folgt für alle $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n$ wegen $N(\mathbf{u}_g, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= |\mathbf{v}|_1^2 + \frac{1}{\nu} N(\mathbf{v}, \mathbf{u}_g, \mathbf{v}) + \frac{1}{\nu} N(\mathbf{u}_g, \mathbf{v}, \mathbf{v}) \\
 &= |\mathbf{v}|_1^2 - \frac{1}{\nu} N(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_g) - \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v})(\mathbf{u}_g \cdot \mathbf{v}) \\
 \text{(III.1.16)} \quad &\geq |\mathbf{v}|_1^2 - \frac{1}{\nu} \|\mathbf{v}\|_6 \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{u}_g\|_3 - \frac{1}{\nu} \|\operatorname{div} \mathbf{v}\| \|\mathbf{v}\|_6 \|\mathbf{u}_g\|_3 \\
 &\geq \left[1 - \frac{c}{\nu} \|\mathbf{u}_g\|_3\right] |\mathbf{v}|_1^2.
 \end{aligned}$$

Dabei hängt die Konstante c nur von der Norm der Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ ab. Wegen (III.1.16) liefert der folgende Satz das gewünschte Koerzivitätsresultat (III.1.15) mit einer Konstanten $\alpha < 1$ beliebig nahe bei 1.

SATZ III.1.10 (Divergenzfreie Fortsetzung von Randdaten). *Sei $\mathbf{g} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$ mit $\int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\mathbf{u}_{g,\varepsilon} \in H^1(\Omega)^n$ mit*

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{u}_{g,\varepsilon} &= 0 && \text{in } \Omega, \\
 \mathbf{u}_{g,\varepsilon} &= \mathbf{g} && \text{auf } \Gamma, \\
 \|\mathbf{u}_{g,\varepsilon}\|_3 &\leq \varepsilon \|\mathbf{g}\|_{\frac{1}{2};\Gamma}.
 \end{aligned}$$

BEWEIS. Wir betrachten nur den Fall $n = 3$. In zwei Dimensionen muss man in Schritt 3 das Vektorfeld $\varphi_{\mathbf{g}}$ durch eine skalare Funktion $\varphi_{\mathbf{g}}$ und die Rotation **rot** durch den Operator **curl** aus Satz II.8.1 (S. 82) ersetzen.

1. Schritt: Für alle $p \in (1, \infty)$ gibt es eine Konstante $c_p > 0$, so dass für alle $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt

$$\text{(III.1.17)} \quad \left\| d(\cdot, \Gamma)^{-1} \varphi \right\|_p \leq c_p \|\varphi\|_{1,p}.$$

Dabei ist

$$d(x, \Gamma) = \inf_{y \in \Gamma} |x - y|$$

der Abstand zum Rand Γ gemessen in der Euklidischen Norm.

Nach Einführen einer Partition der Eins und entsprechender Karten von Γ können wir uns für den Beweis von (III.1.17) auf den Fall $\Omega = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$ zurückziehen. Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht ist in $L^p(\Omega)$, reicht es dann, die Abschätzung

$$\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*} |x_3^{-1} \varphi(x)|^p dx \leq c \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right|^p dx$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ zu beweisen. Wegen des Satzes von Fubini folgt diese Ungleichung direkt aus der *Hardy Ungleichung*

$$\int_0^\infty |t^{-1} \varphi(t)|^p dt \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty |\varphi'|^p dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty((0, \infty)).$$

Die Hardy Ungleichung beweist man wie folgt. Wegen $\varphi \in C_0^\infty((0, \infty))$ ist für jedes $t \in (0, \infty)$

$$\varphi(t) = \int_0^t \varphi'(s) ds$$

und daher

$$\int_0^\infty |t^{-1}\varphi(t)|^p dt = \int_0^\infty t^{-p} \left| \int_0^t \varphi'(s) ds \right|^p dt.$$

Mit der Variablentransformation $t = e^\tau$, $s = e^\sigma$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |t^{-1}\varphi(t)|^p dt &= \int_{-\infty}^\infty e^{-p\tau} \left| \int_{-\infty}^\tau \varphi'(e^\sigma) e^\sigma d\sigma \right|^p e^\tau d\tau \\ &= \int_{-\infty}^\infty \left| \int_{-\infty}^\tau e^{-\frac{p-1}{p}\tau} e^\sigma \varphi'(e^\sigma) d\sigma \right|^p d\tau \\ &= \int_{-\infty}^\infty \left| \int_{-\infty}^\tau e^{-\frac{p-1}{p}(\tau-\sigma)} e^{\frac{\sigma}{p}} \varphi'(e^\sigma) d\sigma \right|^p d\tau \\ &= \int_{-\infty}^\infty \left| \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{p-1}{p}(\tau-\sigma)} \chi_{\mathbb{R}_+}(\tau-\sigma) e^{\frac{\sigma}{p}} \varphi'(e^\sigma) d\sigma \right|^p d\tau \\ &= \|f * g\|_{p;\mathbb{R}}^p \end{aligned}$$

mit

$$f(t) = \chi_{\mathbb{R}_+}(t) e^{-\frac{p-1}{p}t}, \quad g(t) = \varphi'(e^t) e^{\frac{t}{p}}$$

und der Faltung

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^\infty f(t-s)g(s)ds.$$

Wegen $f \geq 0$ folgt aus der Hölderschen Ungleichung mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\begin{aligned} |(f * g)(t)| &= \left| \int_{-\infty}^\infty f(t-s)g(s)ds \right| \\ &\leq \left\{ \int_{-\infty}^\infty f(t-s)ds \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \int_{-\infty}^\infty f(t-s) |g(s)|^p ds \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|_{1;\mathbb{R}}^{\frac{1}{q}} \left\{ \int_{-\infty}^\infty f(t-s) |g(s)|^p ds \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Nehmen wir die p -te Potenz hiervon und integrieren über \mathbb{R} , erhalten wir mit dem Satz von Fubini wegen $f \geq 0$ und

$$\int_{-\infty}^\infty f(t-s) |g(s)|^p dt = |g(s)|^p \|f\|_{1;\mathbb{R}}$$

für jedes $s \in \mathbb{R}$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_{p;\mathbb{R}}^p &= \int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(t)|^p dt \\
&\leq \|f\|_{1;\mathbb{R}}^{\frac{p}{q}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) |g(s)|^p ds \right\} dt \\
&= \|f\|_{1;\mathbb{R}}^{\frac{p}{q}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) |g(s)|^p dt \right\} ds \\
&= \|f\|_{1;\mathbb{R}}^p \int_{-\infty}^{\infty} |g(s)|^p ds \\
&= \|f\|_{1;\mathbb{R}}^p \|g\|_{p;\mathbb{R}}^p.
\end{aligned}$$

Eine leichte Rechnung liefert

$$\|f\|_{1;\mathbb{R}} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{p-1}{p}t} dt = \frac{p}{p-1}.$$

Hieraus folgt die Hardy Ungleichung.

2. Schritt: Zu jedem hinreichend kleinen $\eta > 0$ gibt es eine Funktion $\theta_\eta \in W^{1,\infty}(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned}
\theta_\eta &= 1 && \text{in einer Umgebung von } \Gamma \\
\theta_\eta(x) &= 0 && \text{falls } d(x, \Gamma) \geq e^{-\frac{1}{\eta}} \\
\left| \frac{\partial \theta_\eta}{\partial x_i}(x) \right| &\leq \eta d(x, \Gamma)^{-1} && \text{falls } d(x, \Gamma) \leq e^{-\frac{1}{\eta}} \text{ und } 1 \leq i \leq n.
\end{aligned}$$

Für die Konstruktion von θ_η setzen wir $\delta(\eta) = e^{-\frac{1}{\eta}}$ und betrachten die Funktion

$$\varphi_\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq t \leq \delta(\eta)^2 \\ \eta \ln \left[\frac{\delta(\eta)}{t} \right] & \text{falls } \delta(\eta)^2 \leq t \leq \delta(\eta) \\ 0 & \text{falls } t \geq \delta(\eta). \end{cases}$$

Dann ist $\varphi_\eta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+)$. Setze

$$\theta_\eta(x) = \varphi_\eta(d(x, \Gamma)) \quad \forall x \in \Omega.$$

Da Γ Lipschitz-stetig ist, ist $d(\cdot, \Gamma) \in W^{1,\infty}(\Omega)$ und erfüllt

$$\left| \frac{\partial d(x, \Gamma)}{\partial x_i} \right| \leq 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n, x \in \Omega.$$

Daher ist $\theta_\eta \in W^{1,\infty}(\Omega)$ und hat die genannten Eigenschaften.

3. Schritt: Gemäß Bemerkung II.3.6 (S. 46) besitzt das Stokes Problem

$$\begin{aligned}
-\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= 0 && \text{in } \Omega \\
\operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega \\
\mathbf{u} &= \mathbf{g} && \text{auf } \Gamma
\end{aligned}$$

eine eindeutige schwache Lösung $(\mathbf{u}_g, p_g) \in H^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$, und es gilt

$$|\mathbf{u}_g|_1 \leq c_\Omega \|\mathbf{g}\|_{\frac{1}{2};\Gamma}$$

mit einer Konstanten c_Ω , die nur von Ω abhängt. Wegen $\operatorname{div} \mathbf{u}_g = 0$ gibt es ein Vektorfeld $\varphi_g \in H^2(\Omega)^n$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_g &= \operatorname{rot} \varphi_g && \text{in } \Omega \\ \varphi_g \times \mathbf{n} &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Sei nun $\eta > 0$ hinreichend klein und

$$\mathbf{u}_{g,\eta} = \operatorname{rot}(\theta_\eta \varphi_g)$$

mit θ_η aus Schritt 2. Wegen der Eigenschaften von θ_η und φ_g gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u}_{g,\eta} &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}_{g,\eta} &= \mathbf{g} && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Wir müssen also nur noch die gewünschte Abschätzung für die L^3 -Norm von $\mathbf{u}_{g,\eta}$ zeigen.

Aus der Produktregel folgt

$$\mathbf{u}_{g,\eta} = (\nabla \theta_\eta) \times \varphi_g + \theta_\eta \operatorname{rot} \varphi_g = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2.$$

Für \mathbf{u}_2 erhalten wir wegen der Eigenschaften von θ_η mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und dem Sobolevschen Einbettungssatz

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_2\|_3 &= \|\theta_\eta \mathbf{u}_g\|_3 = \left\{ \int_{d(x,\Gamma) \leq 2\delta(\eta)} |\theta_\eta(x) \mathbf{u}_g(x)|^3 dx \right\}^{\frac{1}{3}} \\ &\leq c_1 \operatorname{meas}\{x \in \Omega : d(x,\Gamma) \leq 2\delta(\eta)\}^{\frac{1}{6}} \|\mathbf{u}_g\|_6 \\ &\leq c_2 \operatorname{meas}\{x \in \Omega : d(x,\Gamma) \leq 2\delta(\eta)\}^{\frac{1}{6}} |\mathbf{u}_g|_1 \\ &\leq c_3 \operatorname{meas}\{x \in \Omega : d(x,\Gamma) \leq 2\delta(\eta)\}^{\frac{1}{6}} \|\mathbf{g}\|_{\frac{1}{2};\Gamma}. \end{aligned}$$

Für die Abschätzung von \mathbf{u}_1 können wir uns wie in Schritt 1 auf den Fall $\Omega = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$ beschränken. Aus der Konstruktion von θ_η folgt dann

$$\nabla \theta_\eta = \begin{cases} -\frac{\eta}{x_3} \mathbf{e}_3 & \text{für } \delta(\eta)^2 \leq x_3 \leq \delta(\eta) \\ 0 & \text{für } 0 \leq x_3 \leq \delta(\eta)^2. \end{cases}$$

Inbesondere ist also $\mathbf{u}_1(x) = 0$ für $0 \leq x_3 \leq \delta(\eta)^2$ und

$$\mathbf{u}_1(x) = \frac{\eta}{x_3} \begin{pmatrix} \varphi_g \cdot \mathbf{e}_2 \\ -\varphi_g \cdot \mathbf{e}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für $\delta(\eta)^2 \leq x_3 \leq \delta(\eta)$. Wegen $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g}} \times \mathbf{n} = 0$ auf Γ ist $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{e}_i \in H_0^1(\Omega)$ für $i = 1, 2$. Damit folgt aus Schritt 1 und dem Sobolevschen Einbettungssatz

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_1\|_3 &\leq \eta \sum_{i=1}^2 \|d(\cdot, \Gamma)^{-1} \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{e}_i\|_3 \leq c_1 \eta \sum_{i=1}^2 \|\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{e}_i\|_{1,3} \\ &\leq c_2 \eta \|\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g}}\|_2 \leq c_3 \eta |\mathbf{u}_{\mathbf{g}}|_1 \\ &\leq c_4 \eta \|\mathbf{g}\|_{\frac{1}{2}, \Gamma}. \end{aligned}$$

Da $\lim_{\eta \rightarrow 0} \delta(\eta) = 0$ ist, folgt aus diesen Abschätzungen die Behauptung des Satzes. \square

III.2. Approximation regulärer Lösungsäste

Um technische Schwierigkeiten zu vermeiden, nehmen wir im Folgenden an, dass Ω ein Polyedergebiet und $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^n$ ist. Wir bezeichnen mit \mathcal{T} eine affin äquivalente, zulässige und reguläre Unterteilung von Ω wie in §I.4 (S. 26) und mit $X_{\mathcal{T}} \subset H_0^1(\Omega)^n$ und $M_{\mathcal{T}} \subset L_0^2(\Omega)$ zugehörige Finite Element Räume, die die Geschwindigkeit und den Druck approximieren und die im Sinne von §II.5 (S. 51) stabil sind. Wie beim Stokes Problem nehmen wir an, dass es zwei Zahlen $\mu \in \mathbb{N}^*$ und $\nu \in \mathbb{N}$ gibt mit $[S_0^{\mu,0}(\mathcal{T})]^n \subset X_{\mathcal{T}}$ und $S^{\nu,-1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega) \subset M_{\mathcal{T}}$ oder $S^{\nu,0}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega) \subset M_{\mathcal{T}}$. Weiter definieren wir eine modifizierte Trilinearform \tilde{N} auf $H_0^1(\Omega)^n \times H_0^1(\Omega)^n \times H_0^1(\Omega)^n$ durch

$$\tilde{N}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} [N(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) - N(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})].$$

Gemäß Satz III.1.1 (S. 109) gilt für alle $\mathbf{u} \in V$ und alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$

$$\tilde{N}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = N(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n$ gilt zudem

$$\tilde{N}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0.$$

Die Standard Finite Element Diskretisierung der stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen (III.1.2) (S. 109) lautet dann:

Finde $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$, $p_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}$ mit

$$\begin{aligned} (III.2.1) \quad &a(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + b(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}) \\ &+ \frac{1}{\nu} \tilde{N}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} \\ &b(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}) = 0 \quad \forall q_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Dabei ist wie bei den Stokes Gleichungen

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}, \quad b(\mathbf{v}, p) = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Definiere wie üblich

$$V_{\mathcal{T}} = \{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} : b(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}) = 0 \forall q_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}\}.$$

Da das Paar $(X_{\mathcal{T}}, M_{\mathcal{T}})$ stabil ist, ist $V_{\mathcal{T}} \neq \{0\}$, und Problem (III.2.1) ist äquivalent zu:

Finde $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}$ mit

$$(III.2.2) \quad a(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + \frac{1}{\nu} \tilde{N}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}.$$

Analog zum vorigen Paragraphen wollen wir Problem (III.2.2) in Operatorform schreiben. Dazu bezeichnen wir mit $T_{\mathcal{T}} \in \mathcal{L}(H^{-1}(\Omega)^n, V_{\mathcal{T}})$ den *diskreten Stokes Operator*, der jedem $\mathbf{w} \in H^{-1}(\Omega)^n$ die eindeutige Lösung $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} = T_{\mathcal{T}}\mathbf{w} \in V_{\mathcal{T}}$ von

$$a(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \rangle \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}$$

zuordnet. Analog zu G_0 und G definieren wir die Abbildungen $\tilde{G}_0, \tilde{G} \in C(H_0^1(\Omega)^n, H^{-1}(\Omega)^n)$ durch

$$\langle \tilde{G}_0(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \tilde{N}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \tilde{G}(\mathbf{u}) = \tilde{G}_0(\mathbf{u}) - \mathbf{f}.$$

Dann sind die Probleme (III.2.1) und (III.2.2) äquivalent zu:

Finde $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}$ mit

$$F_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \lambda T_{\mathcal{T}} \tilde{G}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = 0, \quad \lambda = \frac{1}{\nu}.$$

SATZ III.2.1 (Existenz und Konvergenz diskreter Lösungen). *Die diskreten Navier-Stokes Gleichungen (III.2.2) besitzen für jedes $\nu > 0$ und jedes $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^n$ mindestens eine Lösung. Für jede Lösung $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}$ von (III.2.2) gilt die a priori Abschätzung*

$$(III.2.3) \quad |\mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_1 \leq \frac{1}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{-1}.$$

Sei $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Lösungen von (III.2.2) zu beliebigem, aber festem ν und \mathbf{f} und einer Familie \mathcal{T}_m von Unterteilungen mit $h_m \rightarrow 0$. Dann konvergiert eine Teilfolge $(\mathbf{u}_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ schwach in $H_0^1(\Omega)^n$ gegen eine schwache Lösung \mathbf{u} der stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen. Die zugehörigen Drücke p_{m_k} konvergieren schwach in $L^2(\Omega)$ gegen den zu \mathbf{u} gehörenden Druck p .

BEWEIS. Wie im Beweis von Satz III.1.4 (S. 111) folgt für jede Lösung $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}$ von (III.2.2)

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_1^2 &= a(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = a(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) + \frac{1}{\nu} \tilde{N}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = \frac{1}{\nu} \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \rangle \\ &\leq \frac{1}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{-1} |\mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_1 \end{aligned}$$

und damit die a priori Abschätzung (III.2.3). Aus (III.2.3) und Satz III.1.3 (S. 111) angewandt auf $X = V_{\mathcal{T}}$, $(\cdot, \cdot)_X = a(\cdot, \cdot)$ und $\varphi =$

$F_{\mathcal{T}}\left(\frac{1}{\nu}, \cdot\right)$ folgt die Lösbarkeit von (III.2.2). Die Konvergenzaussage folgt wie im Beweis von Satz III.1.4 (S. 111) mit den Räumen $V_{\mathcal{T}_m}$ an Stelle der Räume V_m . \square

SATZ III.2.2 (Eindeutigkeit diskreter Lösungen). *Sei γ wie in Satz III.1.5 (S. 113). Gilt $\gamma\nu^{-2}\|\mathbf{f}\|_{-1} < 1$, besitzt (III.2.2) eine eindeutige Lösung.*

BEWEIS. Die Behauptung folgt wie im Beweis von Satz III.1.5 mit $F_{\mathcal{T}}$ und \tilde{N} an Stelle von F und N . \square

Die Konvergenzaussage von Satz III.2.1 ist sehr schwach. Wie beim Stokes Problem möchten wir gerne eine Konvergenzrate für die Finite Element Approximation beweisen. Hierzu müssen wir stärkere Anforderungen an die Lösung des analytischen Problems stellen.

SATZ III.2.3 (A priori Fehlerabschätzung). *Seien $\Lambda \subset \mathbb{R}_+^*$ ein nicht leeres, kompaktes Intervall und $\Lambda \ni \lambda \mapsto \mathbf{u}_\lambda$ ein regulärer Lösungsast schwacher Lösungen der Navier-Stokes Gleichungen im Sinne von Definition III.1.7 (S. 114). Für alle $\lambda \in \Lambda$ gelte $\mathbf{u}_\lambda \in H^2(\Omega)^n$ und $p_\lambda \in H^1(\Omega)$, wobei p_λ der zugehörige Druck ist. Seien*

$$\begin{aligned}\gamma(\lambda) &= \left\| D_{\mathbf{u}}F(\lambda, \mathbf{u}_\lambda)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^n, H_0^1(\Omega)^n)}, \\ \gamma^* &= \sup_{\lambda \in \Lambda} \gamma(\lambda), \\ K &= \max \left\{ \|\mathbf{f}\|, \sup_{\lambda \in \Lambda} |\mathbf{u}_\lambda|_2 \right\}.\end{aligned}$$

Dann gibt es ein $h_0 = h_0(\gamma^*, K) > 0$, so dass Problem (III.2.1) für alle \mathcal{T} mit $0 < h_{\mathcal{T}} \leq h_0$ und alle $\lambda \in \Lambda$ eine Lösung $[\mathbf{u}_{\lambda, \mathcal{T}}, p_{\lambda, \mathcal{T}}] \in X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}}$ besitzt mit

$$|\mathbf{u}_\lambda - \mathbf{u}_{\lambda, \mathcal{T}}|_1 + \|p_\lambda - p_{\lambda, \mathcal{T}}\| \leq ch_{\mathcal{T}}K^2.$$

Die Konstante c hängt weder von λ noch von \mathcal{T} ab.

BEWEIS. Bezeichne mit $\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}$ die H^1 -Projektion von \mathbf{u}_λ auf $V_{\mathcal{T}}$ und setze

$$\varepsilon_{\mathcal{T}}(\lambda) = |F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}})|_1.$$

1. Schritt: $\varepsilon_{\mathcal{T}}(\lambda) \leq ch_{\mathcal{T}}K^2$.

Wegen $F(\lambda, \mathbf{u}_\lambda) = 0$ und $\tilde{G}(\mathbf{u}_\lambda) = G(\mathbf{u}_\lambda)$ gilt

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathcal{T}}(\lambda) &= |F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}) - F(\lambda, \mathbf{u}_\lambda)|_1 \\ &= \left| \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}} + \lambda T_{\mathcal{T}} \tilde{G}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}) - \mathbf{u}_\lambda - \lambda TG(\mathbf{u}_\lambda) \right|_1 \\ &\leq |\mathbf{u}_\lambda - \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}|_1 + \lambda \left| T_{\mathcal{T}}[\tilde{G}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}) - \tilde{G}(\mathbf{u}_\lambda)] \right|_1 \\ &\quad + \lambda |(T_{\mathcal{T}} - T)G(\mathbf{u}_\lambda)|_1.\end{aligned}$$

Da das Paar $(X_{\mathcal{T}}, M_{\mathcal{T}})$ stabil ist, folgt aus §II.4 (S. 47) und §I.4 (S. 26)

$$|\mathbf{u}_\lambda - \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}|_1 \leq ch_{\mathcal{T}}|\mathbf{u}_\lambda|_2 \leq ch_{\mathcal{T}}K.$$

Aus dem gleichen Grunde ist $|T_{\mathcal{T}}\mathbf{w}|_1 \leq \|\mathbf{w}\|_{-1}$ für alle $\mathbf{w} \in H^{-1}(\Omega)^n$. Aus Satz III.1.1 (S. 109) folgt mit der Bezeichnung von Satz III.1.5 (S. 113)

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{G}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}) - \tilde{G}(\mathbf{u}_{\lambda}) \right\|_{-1} \\ &= \sup_{\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n; |\mathbf{w}|_1=1} \left| \tilde{N}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}, \mathbf{w}) - \tilde{N}(\mathbf{u}_{\lambda}, \mathbf{u}_{\lambda}, \mathbf{w}) \right| \\ &= \sup_{\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n; |\mathbf{w}|_1=1} \left| \tilde{N}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}} - \mathbf{u}_{\lambda}, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}, \mathbf{w}) + \tilde{N}(\mathbf{u}_{\lambda}, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}} - \mathbf{u}_{\lambda}, \mathbf{w}) \right| \\ &\leq \gamma \left[|\mathbf{u}_{\lambda}|_1 + |\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}|_1 \right] |\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}} - \mathbf{u}_{\lambda}|_1 \\ &\leq ch_{\mathcal{T}} K^2. \end{aligned}$$

Schließlich folgt aus Satz II.4.1 (S. 47) und dem Sobolevschen Einbettungssatz

$$\begin{aligned} |(T_{\mathcal{T}} - T)G(\mathbf{u}_{\lambda})|_1 &\leq ch_{\mathcal{T}} \|G(\mathbf{u}_{\lambda})\| \leq ch_{\mathcal{T}} \{ \|\mathbf{f}\| + \|(\mathbf{u}_{\lambda} \cdot \nabla)\mathbf{u}_{\lambda}\| \} \\ &\leq ch_{\mathcal{T}} \{ \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{u}_{\lambda}\|_{\infty} |\mathbf{u}_{\lambda}|_1 \} \\ &\leq c^* h_{\mathcal{T}} K^2. \end{aligned}$$

Also ist

$$\varepsilon_{\mathcal{T}}(\lambda) \leq ch_{\mathcal{T}} K^2.$$

2. Schritt: $\|D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}) - D_{\mathbf{u}}F(\lambda, \mathbf{u}_{\lambda})\|_{\mathcal{L}} \leq ch_{\mathcal{T}} K$.

Sei $\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} & D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}})\mathbf{w} - D_{\mathbf{u}}F(\lambda, \mathbf{u}_{\lambda})\mathbf{w} \\ &= \mathbf{w} + \lambda T_{\mathcal{T}} D\tilde{G}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}})\mathbf{w} - \mathbf{w} - \lambda T D\tilde{G}(\mathbf{u}_{\lambda})\mathbf{w} \\ &= \lambda T_{\mathcal{T}} [D\tilde{G}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}})\mathbf{w} - D\tilde{G}(\mathbf{u}_{\lambda})\mathbf{w}] + \lambda(T_{\mathcal{T}} - T)D\tilde{G}(\mathbf{u}_{\lambda})\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Wie in Schritt 1 folgt

$$\left| T_{\mathcal{T}} [D\tilde{G}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}})\mathbf{w} - D\tilde{G}(\mathbf{u}_{\lambda})\mathbf{w}] \right|_1 \leq \left\| D\tilde{G}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}})\mathbf{w} - D\tilde{G}(\mathbf{u}_{\lambda})\mathbf{w} \right\|_{-1}$$

und

$$\begin{aligned} & \left\| D\tilde{G}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}})\mathbf{w} - D\tilde{G}(\mathbf{u}_{\lambda})\mathbf{w} \right\|_{-1} \\ &= \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n; |\mathbf{v}|_1=1} \left| \tilde{N}(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}, \mathbf{v}) + \tilde{N}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) \right. \\ & \quad \left. - \tilde{N}(\mathbf{w}, \mathbf{u}_{\lambda}, \mathbf{v}) - \tilde{N}(\mathbf{u}_{\lambda}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) \right| \\ &= \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n; |\mathbf{v}|_1=1} \left| \tilde{N}(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}} - \mathbf{u}_{\lambda}, \mathbf{v}) + \tilde{N}(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}} - \mathbf{u}_{\lambda}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) \right| \\ &\leq 2\gamma |\mathbf{w}|_1 |\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}} - \mathbf{u}_{\lambda}|_1 \\ &\leq ch_{\mathcal{T}} K |\mathbf{w}|_1. \end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$\left| (T_{\mathcal{T}} - T)D\tilde{G}(\mathbf{u}_{\lambda})\mathbf{w} \right|_1 = |(T_{\mathcal{T}} - T)DG(\mathbf{u}_{\lambda})\mathbf{w}|_1 \leq ch_{\mathcal{T}} \|DG(\mathbf{u}_{\lambda})\mathbf{w}\|$$

und mit dem Sobolevschen Einbettungssatz

$$\begin{aligned} \|DG(\mathbf{u}_{\lambda})\mathbf{w}\| &\leq \|(\mathbf{u}_{\lambda} \cdot \nabla)\mathbf{w}\| + \|(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{u}_{\lambda}\| \\ &\leq \|\mathbf{u}_{\lambda}\|_{\infty} |\mathbf{w}|_1 + \|\mathbf{w}\|_4 \|\nabla\mathbf{u}_{\lambda}\|_{\frac{4}{3}} \\ &\leq c |\mathbf{w}|_1 |\mathbf{u}_{\lambda}|_2 \\ &\leq cK |\mathbf{w}|_1. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also für alle $\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$

$$\|D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}})\mathbf{w} - D_{\mathbf{u}}F(\lambda, \mathbf{u}_{\lambda})\mathbf{w}\|_1 \leq ch_{\mathcal{T}}K |\mathbf{w}|_1$$

und somit

$$\|D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}) - D_{\mathbf{u}}F(\lambda, \mathbf{u}_{\lambda})\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^n, H_0^1(\Omega)^n)} \leq ch_{\mathcal{T}}K.$$

3. Schritt: $\|D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}})^{-1}\|_{\mathcal{L}} \leq 2\gamma(\lambda)$.

Wegen

$$\begin{aligned} &D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}) \\ &= D_{\mathbf{u}}F(\lambda, \mathbf{u}_{\lambda}) - [D_{\mathbf{u}}F(\lambda, \mathbf{u}_{\lambda}) - D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}})] \\ &= D_{\mathbf{u}}F(\lambda, \mathbf{u}_{\lambda}) [I - D_{\mathbf{u}}F(\lambda, \mathbf{u}_{\lambda})^{-1} [D_{\mathbf{u}}F(\lambda, \mathbf{u}_{\lambda}) - D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}})]] \end{aligned}$$

und Schritt 2 gibt es ein $h_1 = h_1(\gamma^*, K) > 0$, so dass für alle \mathcal{T} mit $0 < h_{\mathcal{T}} \leq h_1$ und alle $\lambda \in \Lambda$ gilt $D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}) \in \text{Isom}(H_0^1(\Omega)^n, H_0^1(\Omega)^n)$ und $\|D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}})^{-1}\|_{\mathcal{L}} \leq 2\gamma(\lambda)$.

4. Schritt: $\|D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathbf{v}_1) - D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathbf{v}_2)\|_{\mathcal{L}} \leq 2\gamma\lambda |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_1$.

Seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} &D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathbf{v}_1)\mathbf{w} - D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathbf{v}_2)\mathbf{w} \\ &= \mathbf{w} + \lambda T_{\mathcal{T}}D\tilde{G}(\mathbf{v}_1)\mathbf{w} - \mathbf{w} - \lambda T_{\mathcal{T}}D\tilde{G}(\mathbf{v}_2)\mathbf{w} \\ &= \lambda T_{\mathcal{T}} [D\tilde{G}(\mathbf{v}_1)\mathbf{w} - D\tilde{G}(\mathbf{v}_2)\mathbf{w}]. \end{aligned}$$

Wie im zweiten Schritt folgt

$$\left| T_{\mathcal{T}} [D\tilde{G}(\mathbf{v}_1)\mathbf{w} - D\tilde{G}(\mathbf{v}_2)\mathbf{w}] \right|_1 \leq \left\| D\tilde{G}(\mathbf{v}_1)\mathbf{w} - D\tilde{G}(\mathbf{v}_2)\mathbf{w} \right\|_{-1}$$

und

$$\left\| D\tilde{G}(\mathbf{v}_1)\mathbf{w} - D\tilde{G}(\mathbf{v}_2)\mathbf{w} \right\|_{-1} \leq 2\gamma |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_1 |\mathbf{w}|_1.$$

Also ist

$$\|D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathbf{v}_1)\mathbf{w} - D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathbf{v}_2)\mathbf{w}\|_1 \leq 2\gamma\lambda |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_1 |\mathbf{w}|_1$$

und damit

$$\|D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathbf{v}_1) - D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathbf{v}_2)\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^n, H_0^1(\Omega)^n)} \leq 2\gamma\lambda |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_1.$$

5. Schritt: *Definition einer Kontraktion.*

Sei \mathcal{T} mit $0 < h_{\mathcal{T}} \leq h_1$ beliebig. Wegen Schritt 3 können wir eine Abbildung $\Phi : H_0^1(\Omega)^n \rightarrow H_0^1(\Omega)^n$ durch

$$\Phi(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}})^{-1}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathbf{v})$$

definieren. Setze

$$B = \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n : |\mathbf{v} - \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}|_1 \leq 4\gamma(\lambda)\varepsilon_{\mathcal{T}}(\lambda) \}.$$

Für beliebiges $\mathbf{v} \in B$ folgt aus Schritt 3 und 4

$$\begin{aligned} & |\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}} - \Phi(\mathbf{v})|_1 \\ &= |\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}} - \mathbf{v} + D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}})^{-1}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathbf{v})|_1 \\ &= \left| D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}})^{-1} \left\{ D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}})(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}} - \mathbf{v}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^1 D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathbf{v} + t(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}} - \mathbf{v}))(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}} - \mathbf{v}) dt \right\} \right. \\ &\quad \left. + D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}})^{-1}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}) \right|_1 \\ &\leq 2\gamma(\lambda) \int_0^1 |[D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}) - D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathbf{v} + t(\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}} - \mathbf{v}))] \\ &\quad (\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}} - \mathbf{v})|_1 dt \\ &\quad + 2\gamma(\lambda)\varepsilon_{\mathcal{T}}(\lambda) \\ &\leq 2\gamma(\lambda)\gamma\lambda |\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}} - \mathbf{v}|_1^2 + 2\gamma(\lambda)\varepsilon_{\mathcal{T}}(\lambda) \\ &\leq 2\gamma(\lambda)\varepsilon_{\mathcal{T}}(\lambda) [1 + 16\lambda\gamma\gamma(\lambda)^2\varepsilon_{\mathcal{T}}(\lambda)]. \end{aligned}$$

Mit den gleichen Argumenten ergibt sich für beliebiges $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in B$

$$\begin{aligned} & |\Phi(\mathbf{v}_1) - \Phi(\mathbf{v}_2)|_1 \\ &= |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}})^{-1}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathbf{v}_1) \\ &\quad + D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}})^{-1}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathbf{v}_2)|_1 \\ &= \left| D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}})^{-1} \left[D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}})(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^1 D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathbf{v}_2 + t(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) dt \right] \right|_1 \\ &\leq 2\gamma(\lambda) \int_0^1 |[D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}) - D_{\mathbf{u}}F_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathbf{v}_2 + t(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))] \\ &\quad (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)|_1 dt \\ &\leq 4\gamma\gamma(\lambda)\lambda |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_1 \int_0^1 |\hat{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}} - [\mathbf{v}_2 + t(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)]|_1 dt \\ &\leq 16\gamma\gamma(\lambda)^2\lambda\varepsilon_{\mathcal{T}}(\lambda) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_1. \end{aligned}$$

Wegen Schritt 1 gibt es ein positives $h_0 = h_0(\gamma^*, K) \leq h_1$ mit

$$16\gamma\gamma(\lambda)^2\lambda\varepsilon_{\mathcal{T}}(\lambda) \leq \frac{1}{2} \quad \forall 0 < h \leq h_0.$$

Für alle \mathcal{T} mit $h_{\mathcal{T}} \leq h_0$ ist dann Φ eine Kontraktion auf B und besitzt daher einen Fixpunkt $\mathbf{u}_{\lambda, \mathcal{T}}$ in B . Sei $p_{\lambda, \mathcal{T}}$ der zugehörige Druck. Offensichtlich ist $(\mathbf{u}_{\lambda, \mathcal{T}}, p_{\lambda, \mathcal{T}})$ eine Lösung von (III.2.1).

6. Schritt: Fehlerabschätzung für den Druck.

Seien \mathcal{T} und $(\mathbf{u}_{\lambda, \mathcal{T}}, p_{\lambda, \mathcal{T}})$ wie in Schritt 5. Konstruktionsgemäß ist

$$|\mathbf{u}_{\lambda} - \mathbf{u}_{\lambda, \mathcal{T}}|_1 \leq 4\gamma(\lambda)\varepsilon_{\mathcal{T}}(\lambda) \leq ch_{\mathcal{T}}K^2.$$

Sei $\tilde{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}} = \lambda T_{\mathcal{T}}\tilde{G}(\mathbf{u}_{\lambda}) = \lambda T_{\mathcal{T}}G(\mathbf{u}_{\lambda})$ und $\tilde{p}_{\lambda, \mathcal{T}}$ der zugehörige Druck. Aus der Stabilität des Paares $(X_{\mathcal{T}}, M_{\mathcal{T}})$ folgt

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_{\lambda, \mathcal{T}} - \tilde{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}}|_1 + \|p_{\lambda, \mathcal{T}} - \tilde{p}_{\lambda, \mathcal{T}}\| &\leq c\lambda \left\| \tilde{G}(\mathbf{u}_{\lambda}) - \tilde{G}(\mathbf{u}_{\lambda, \mathcal{T}}) \right\|_{-1} \\ &\leq c\gamma\lambda |\mathbf{u}_{\lambda} - \mathbf{u}_{\lambda, \mathcal{T}}|_1 [|\mathbf{u}_{\lambda}|_1 + |\mathbf{u}_{\lambda, \mathcal{T}}|_1] \\ &\leq c^*\lambda h_{\mathcal{T}}K^2. \end{aligned}$$

Aus §II.4 (S. 47) folgt andererseits

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathbf{u}}_{\lambda, \mathcal{T}} - \mathbf{u}_{\lambda}|_1 + \|\tilde{p}_{\lambda, \mathcal{T}} - p_{\lambda}\| &\leq ch_{\mathcal{T}} \{|\mathbf{u}_{\lambda}|_2 + |p_{\lambda}|_1\} \\ &\leq ch_{\mathcal{T}}K. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. \square

Seien $(\mathbf{u}_{\lambda}, p_{\lambda})$ und $(\mathbf{u}_{\lambda, \mathcal{T}}, p_{\lambda, \mathcal{T}})$ wie in Satz III.2.3. Für ein $m \in \mathbb{N}^*$ gelte $\mathbf{u}_{\lambda} \in H^{m+1}(\Omega)^n$ und $p_{\lambda} \in H^m(\Omega)$. Dann folgt aus den Schritten 1 und 6 des Beweises von Satz III.2.3 die Fehlerabschätzung

$$\left\{ |\mathbf{u}_{\lambda} - \mathbf{u}_{\lambda, \mathcal{T}}|_1 + \|p_{\lambda} - p_{\lambda, \mathcal{T}}\| \right\} \leq ch_{\mathcal{T}}^{\min\{m, \mu, \nu+1\}} \left\{ |\mathbf{u}_{\lambda}|_{m+1} + |p_{\lambda}|_m \right\}.$$

Ebenso kann man wie in Satz II.4.4 (S. 50) die verbesserte L^2 -Fehlerabschätzung $\|\mathbf{u}_{\lambda} - \mathbf{u}_{\lambda, \mathcal{T}}\| \leq ch_{\mathcal{T}} \left\{ |\mathbf{u}_{\lambda} - \mathbf{u}_{\lambda, \mathcal{T}}|_1 + \|p_{\lambda} - p_{\lambda, \mathcal{T}}\| \right\}$ beweisen.

III.3. Stromlinien-Diffusions Methoden

Die Diskretisierung des vorigen Paragraphen entspricht einer zentralen Differenzen-Diskretisierung des Konvektionstermes $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ in den Navier-Stokes Gleichungen. Wir haben bereits in [22, §II.3] anhand einer skalaren Konvektions-Diffusions Gleichung gesehen, dass diese Vorgehensweise nur für sehr kleine Gitterweiten $h_{\mathcal{T}}$ vernünftige Ergebnisse liefert. Diese Schwierigkeit konnten wir durch eine Stromlinien-Diffusions Diskretisierung vermeiden, bei der wir die Differentialgleichung zusätzlich mit einer Testfunktion $\mathbf{w} \cdot \nabla v$ testeten. Dabei bezeichnet \mathbf{w} die damals bekannte Stromrichtung. Für die Navier-Stokes Gleichungen würde diesem Vorgehen eine zusätzliche Testfunktion $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ entsprechen, wobei \mathbf{u} das gesuchte Geschwindigkeitsfeld ist.

Andererseits haben wir in §II.6 (S. 64) gesehen, dass wir durch analoge Petrov-Galerkin Verfahren mit zusätzlichen Testfunktionen ∇q für die Impulsgleichung die Divergenznebenbedingung stabilisieren und so die inf-sup Bedingung für Geschwindigkeits- und Druckraum umgehen können. Es liegt nahe, diese beiden Vorgehensweisen für die Navier-Stokes Gleichungen zu kombinieren.

Sei daher \mathcal{T} eine affin äquivalente, zulässige und reguläre Unterteilung von Ω und $X_{\mathcal{T}}$ und $M_{\mathcal{T}}$ zugehörige Finite Element Räume, die Geschwindigkeit und Druck approximieren sollen. Diese Räume können beliebig sein und müssen nicht mehr der Stabilitätsbedingung der §§II.5 (S. 51) und III.2 genügen. Die *Stromlinien-Diffusions Diskretisierung*, kurz *SDFEM*, der Navier-Stokes Gleichungen lautet dann:

Finde $(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}) \in X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}}$ mit

$$(III.3.1) \quad B_{\mathcal{T}}([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}], [\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}]) = \ell_{\mathcal{T}}([\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}]) \quad \forall [\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}] \in X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}}$$

mit

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{T}}([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}], [\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}]) &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} : \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} + \int_{\Omega} q_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \\ &\quad + \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} [(\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\mathcal{T}}] \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}} \delta_K h_K^2 \int_K \left[-\Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \nabla p_{\mathcal{T}} + \frac{1}{\nu} (\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \right] \\ &\quad \quad \quad \left[\nabla q_{\mathcal{T}} + \frac{1}{\nu} (\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \right] \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \delta_E h_E \int_E \mathbb{J}_E(p_{\mathcal{T}}) \mathbb{J}_E(q_{\mathcal{T}}) + \sum_{K \in \mathcal{T}} \alpha_K \delta_K \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \ell_{\mathcal{T}}([\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}]) &= \int_{\Omega} \frac{1}{\nu} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{T}} + \sum_{K \in \mathcal{T}} \delta_K h_K^2 \int_K \frac{1}{\nu} \mathbf{f} \cdot \left[\nabla q_{\mathcal{T}} + \frac{1}{\nu} (\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \right]. \end{aligned}$$

Dabei sind $\alpha_K \geq 0$, $\delta_K \geq 0$ und $\delta_E \geq 0$ frei wählbare Parameter. Für $\delta_K = \delta_E = 0$ für alle K und E erhalten wir das Standard Galerkin Verfahren des vorigen Paragraphen wieder. Wählen wir $\alpha_K = 0$ für alle K und setzen formal alle Terme mit $(\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \nabla)$ gleich Null, geht (III.3.1) in die Diskretisierung der Stokes Gleichungen aus §II.6 (S. 64) über. Die $(\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{\mathcal{T}}$ -Terme stabilisieren den Einfluss des nichtlinearen Konvektionstermes. Die $\nabla q_{\mathcal{T}}$ -Terme stabilisieren den Einfluss der Divergenznebenbedingung. Die Parameter α und δ werden üblicherweise in der Größenordnung 1 gewählt.

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen lassen sich auf die SDFEM (III.3.1) übertragen. Dabei werden die gleichen Techniken benutzt. Allerdings sind die entsprechenden Abschätzungen wegen der zusätzlichen Stabilisierungsterme wesentlich technischer. Wir verzichten daher auf eine detaillierte Darstellung und verweisen stattdessen auf [16].

III.4. Numerische Lösung der diskreten Probleme

In diesem Paragraphen stellen wir verschiedene Verfahren zur numerischen Lösung der Finite Element Diskretisierung der stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen vor. Die Darstellung vereinfacht sich wesentlich, wenn wir dabei die Notationen des analytischen Problems verwenden. Alle Ausdrücke sind dann in ihrer schwachen Form zu verstehen, d.h. Ausdrücke der Form

$$\Delta \mathbf{u}, \quad \nabla p, \quad (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}$$

sind als

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}, \quad - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}] \cdot \mathbf{v}, \quad \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u}$$

mit Testfunktionen \mathbf{v}, q aus Finite Element Räumen zu interpretieren. Den einfachsten Algorithmus liefert die Fixpunktiteration.

ALGORITHMUS III.4.1 (Fixpunktiteration). *Wähle ein $\mathbf{u}^0 \in X$ und löse für $i = 0, 1, \dots$ die Stokes Probleme*

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u}^{i+1} + \nabla p^{i+1} &= \frac{1}{\nu} \{ \mathbf{f} - (\mathbf{u}^i \cdot \nabla) \mathbf{u}^i \} && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{i+1} &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}^{i+1} &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Mit den Notationen von §III.2 (S. 122) ist Algorithmus III.4.1 die Fixpunktiteration für $\Phi(\mathbf{u}) = \frac{1}{\nu} T_{\mathcal{T}} \tilde{G}(\mathbf{u})$. Wegen

$$|\Phi(\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{v})|_1 \leq \frac{1}{\nu} \left\| \tilde{G}(\mathbf{u}) - \tilde{G}(\mathbf{v}) \right\|_{-1} \leq \frac{\gamma}{\nu} [|\mathbf{u}|_1 + |\mathbf{v}|_1] |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_1$$

ist Φ eine Kontraktion auf $\overline{B(0, \frac{1}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{-1})}$, sofern $\frac{2}{\nu^2} \|\mathbf{f}\|_{-1} < 1$ ist. Daher konvergiert Algorithmus III.4.1 sicher dann, wenn diese Bedingung erfüllt ist. Die Stokes Probleme, die in jedem Schritt von Algorithmus III.4.1 auftreten, können mit einem der Verfahren aus §II.9 (S. 89) gelöst werden.

Eine wesentlich bessere Konvergenz kann man von dem Newton-Verfahren erhoffen.

ALGORITHMUS III.4.2 (Newton-Verfahren). Wähle ein $\mathbf{u}^0 \in X$ und löse für $i = 0, 1, \dots$ die modifizierten Stokes Probleme

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u}^{i+1} + \nabla p^{i+1} + \frac{1}{\nu}(\mathbf{u}^{i+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^i \\ + \frac{1}{\nu}(\mathbf{u}^i \cdot \nabla) \mathbf{u}^{i+1} &= \frac{1}{\nu} \{ \mathbf{f} + (\mathbf{u}^i \cdot \nabla) \mathbf{u}^i \} && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{i+1} &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}^{i+1} &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

In jedem Schritt von Algorithmus III.4.2 muss ein modifiziertes Stokes Problem gelöst werden. Kritisch ist dabei vor allem der Konvektionsterm $\frac{1}{\nu}(\mathbf{u}^i \cdot \nabla) \mathbf{u}^{i+1}$. Die Algorithmen aus §II.9 (S. 89) sind daher entsprechend zu modifizieren. Es ist nicht ratsam, in den Termen $\frac{1}{\nu}(\mathbf{u}^i \cdot \nabla) \mathbf{u}^{i+1}$ und $\frac{1}{\nu}(\mathbf{u}^{i+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^i$ die Größe \mathbf{u}^{i+1} durch \mathbf{u}^i zu ersetzen, da dann das Newton-Verfahren III.4.2 zur Fixpunktiteration III.4.1 wird.

Wie üblich sollte man besonders zu Beginn die Newton-Schritte dämpfen. Ebenso kann man Quasi-Newton-Verfahren anwenden und die Größen $\frac{1}{\nu}(\mathbf{u}^i \cdot \nabla) \mathbf{u}^{i+1}$ und $\frac{1}{\nu}(\mathbf{u}^{i+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^i$ durch $\frac{1}{\nu}(\mathbf{u}^j \cdot \nabla) \mathbf{u}^{i+1}$ und $\frac{1}{\nu}(\mathbf{u}^{i+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^j$ mit $j = J[\frac{i}{j}]$ ersetzen. Dabei ist $J \geq 2$ ein fester Parameter. Durch diese Modifikation muss die Steifigkeitsmatrix der modifizierten Stokes Probleme nur alle J Schritte neu aufgestellt werden.

Bekanntlich hängt die Konvergenz des Newton-Verfahrens wesentlich von einer guten Wahl des Startwertes \mathbf{u}^0 ab. Diese kann man durch eine *Kontinuitätsmethode* erzielen. Dazu schreiben wir die Navier-Stokes Gleichungen wieder in Operatorform als $\mathbf{u}_\lambda + \lambda TG(\mathbf{u}_\lambda) = 0$. Setze $\mathbf{v}_\lambda = \frac{d\mathbf{u}_\lambda}{d\lambda}$. Dann folgt mit der Kettenregel $\mathbf{v}_\lambda + TG(\mathbf{u}_\lambda) + \lambda TDG(\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{v}_\lambda = 0$. Also ist \mathbf{v}_λ die Lösung des folgenden modifizierten Stokes Problems

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{v}_\lambda + \nabla q_\lambda + \lambda(\mathbf{u}_\lambda \cdot \nabla) \mathbf{v}_\lambda + \lambda(\mathbf{v}_\lambda \cdot \nabla) \mathbf{u}_\lambda &= \mathbf{f} - (\mathbf{u}_\lambda \cdot \nabla) \mathbf{u}_\lambda && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_\lambda &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{v}_\lambda &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Sei nun eine Lösung \mathbf{u}_{λ_0} für die Navier-Stokes Gleichungen zum Parameter λ_0 bekannt. Dann kann man obiges modifizierte Stokes Problem mit $\lambda = \lambda_0$ lösen und $\mathbf{u}_{\lambda_0} + (\lambda_1 - \lambda_0)\mathbf{v}_{\lambda_0}$ als Startwert für Algorithmus III.4.2 zum Parameter λ_1 verwenden. Falls $\lambda_1 - \lambda_0$ nicht zu groß ist, liefert diese Strategie eine hinreichend gute Anfangsnäherung für das Newton-Verfahren.

Ein anderer Ansatz für ein Verfahren, das global konvergiert und sich in der Nähe einer Lösung wie das Newton-Verfahren verhält, ist die sog. *least squares Methode*. Die Idee ist, das Funktional $J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} |\mathbf{u} + \lambda TG(\mathbf{u})|_1^2$ zu minimieren und hierzu ein *nichtlineares CG-Verfahren* zu verwenden. Zur Beschreibung dieses Verfahrens betrachten wir zunächst folgende abstrakte Situation.

Sei X ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_X$ und $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ ein nichtlineares Funktional, das in der Nähe jedes kritischen Punktes konvex ist. Für $u \in X$ definieren wir den Gradienten $g(u) \in X$ als die Ritz Projektion von $DJ(u)$, d.h. $(g(u), v)_X = DJ(u)v$ für alle $v \in X$. Dann lautet das nichtlineare CG-Verfahren zur Minimierung von J :

ALGORITHMUS III.4.3 (Nichtlineares CG-Verfahren nach Polak-Ribière). Wähle ein $u^0 \in X$ und bestimme

$$w^0 = g^0 = g(u^0).$$

Für $i = 0, 1, \dots$ berechne

$$\begin{aligned} \rho^i &= \operatorname{argmin} J(u^i - \rho w^i) \\ u^{i+1} &= u^i - \rho^i w^i \\ g^{i+1} &= g(u^{i+1}) \\ \sigma^{i+1} &= (g^{i+1} - g^i, g^{i+1})_X \|g^i\|_X^{-2} \\ w^{i+1} &= g^{i+1} + \sigma^{i+1} w^i. \end{aligned}$$

BEMERKUNG III.4.4 (Zusammenhang mit PCG-Verfahren). Man kann zeigen, dass Algorithmus III.4.3 für konvexe quadratische Funktionale auf dem \mathbb{R}^n , d.h. $J(u) = \frac{1}{2}u^T A u - b^T u$ mit A s.p.d., mit dem klassischen PCG-Verfahren [20, Algorithmus IV.7.10] übereinstimmt. Die Wahl des Skalarproduktes $(\cdot, \cdot)_X$ auf $X = \mathbb{R}^n$ bestimmt dann die Vorkonditionierungsmatrix C .

Für die Navier-Stokes Gleichungen ist $X = V = \{\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}$ bzw. das entsprechende diskrete Analogon,

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_X = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}$$

und

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} |\mathbf{u} + \lambda TG(\mathbf{u})|_1^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{u} + \lambda TG(\mathbf{u}), \mathbf{u} + \lambda TG(\mathbf{u}))_X.$$

Dabei ist gemäß §I.1 (S. 5) für jedes $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$

$$\langle G(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \text{und} \quad (T\mathbf{w}, \mathbf{v})_X = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle.$$

Damit folgt

$$DJ(\mathbf{u})\mathbf{v} = (\mathbf{u} + \lambda TG(\mathbf{u}), \mathbf{v} + \lambda TDG(\mathbf{u})\mathbf{v})_X,$$

und mit

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \lambda TG(\mathbf{u})$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} DJ(\mathbf{u})\mathbf{v} &= (\mathbf{w}, \mathbf{v})_X + \lambda \langle DG(\mathbf{u})\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \\ &= (\mathbf{w}, \mathbf{v})_X + \lambda N(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \lambda N(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ &= (\mathbf{w}, \mathbf{v})_X - \lambda N(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + \lambda \langle \mathbf{w} \cdot (\nabla \mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

Also ist

$$g(\mathbf{u}) = \mathbf{w} + \tilde{\mathbf{g}}$$

mit

$$(\tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{v})_X = \lambda \{ \langle \mathbf{w} \cdot (\nabla \mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle - N(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) \}.$$

Da G quadratisch ist in \mathbf{u} , ist J ein Polynom vierten Grades in \mathbf{u} . Daher gilt für alle $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in X$ und alle $\rho \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}) &= J(\mathbf{u}) - \rho DJ(\mathbf{u})\mathbf{w} + \frac{1}{2}\rho^2 D^2 J(\mathbf{u})[\mathbf{w}, \mathbf{w}] \\ &\quad - \frac{1}{6}\rho^3 D^3 J(\mathbf{u})[\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}] + \frac{1}{24}\rho^4 D^4 J(\mathbf{u})[\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}]. \end{aligned}$$

Eine leichte Rechnung liefert für alle $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_4, \mathbf{u} \in X$ wegen $D^k G(\mathbf{u}) = 0$ für alle $k \geq 3$

$$\begin{aligned} DJ(\mathbf{u})\mathbf{w}_1 &= (\mathbf{u} + \lambda TG(\mathbf{u}), \mathbf{w}_1 + \lambda TDG(\mathbf{u})\mathbf{w}_1)_X \\ D^2 J(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2] &= (\mathbf{w}_2 + \lambda TDG(\mathbf{u})\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 + \lambda TDG(\mathbf{u})\mathbf{w}_1)_X \\ &\quad + (\mathbf{u} + \lambda TG(\mathbf{u}), \lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2])_X \\ D^3 J(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3] &= (\lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3], \mathbf{w}_1 + \lambda TDG(\mathbf{u})\mathbf{w}_1)_X \\ &\quad + (\mathbf{w}_2 + \lambda TDG(\mathbf{u})\mathbf{w}_2, \lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3])_X \\ &\quad + (\mathbf{w}_3 + \lambda TDG(\mathbf{u})\mathbf{w}_3, \lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2])_X \\ D^4 J(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4] &= (\lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3], \lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_4])_X \\ &\quad + (\lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4], \lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3])_X \\ &\quad + (\lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4], \lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2])_X. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} D^2 J(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1] &= |\mathbf{w}_1 + \lambda TDG(\mathbf{u})\mathbf{w}_1|_1^2 \\ &\quad + (\mathbf{u} + \lambda TG(\mathbf{u}), \lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1])_X \\ D^3 J(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1] &= (\mathbf{w}_1 + \lambda TDG(\mathbf{u})\mathbf{w}_1, \lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1])_X \\ D^4 J(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1] &= 3 |\lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1]|_1^2. \end{aligned}$$

Setze

$$\mathbf{z}_1 = \lambda TDG(\mathbf{u})\mathbf{w}_1, \quad \mathbf{z}_2 = \lambda TD^2 G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1].$$

Dann ist für alle $\mathbf{v} \in X$

$$\begin{aligned} (\mathbf{z}_1, \mathbf{v})_X &= \lambda \{ N(\mathbf{u}, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}) + N(\mathbf{w}_1, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \} \\ (\mathbf{z}_2, \mathbf{v})_X &= \lambda N(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Zusammen mit

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \lambda TG(\mathbf{u})$$

erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} DJ(\mathbf{u})\mathbf{w}_1 &= (\mathbf{w}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{z}_1)_X \\ D^2J(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1] &= |\mathbf{w}_1 + \mathbf{z}_1|_1^2 + (\mathbf{w}, \mathbf{z}_2)_X \\ D^3J(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1] &= 3(\mathbf{w}_1 + \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)_X \\ D^4J(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1] &= 3|\mathbf{z}_2|_1^2. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\mathbf{z}_0 = \lambda TG(\mathbf{u}),$$

dann ist

$$(\mathbf{z}_0, \mathbf{v})_X = \lambda \{N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle\} \quad \forall \mathbf{v} \in X$$

und

$$\begin{aligned} \lambda TG(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}_1) &= \lambda T \left\{ G(\mathbf{u}) - \rho DG(\mathbf{u})\mathbf{w}_1 + \frac{1}{2}\rho^2 D^2G(\mathbf{u})[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1] \right\} \\ &= \mathbf{z}_0 - \rho \mathbf{z}_1 + \frac{1}{2}\rho^2 \mathbf{z}_2. \end{aligned}$$

Mit diesen Vorbereitungen nimmt Algorithmus III.4.3 für die Navier-Stokes Gleichungen folgende Form an:

ALGORITHMUS III.4.5 (Nichtlineares CG-Verfahren nach Polak-Ribière für die least squares Formulierung der Navier-Stokes Gleichungen).

- (0) Wähle ein $\mathbf{u}^0 \in X$ und bestimme die Lösungen \mathbf{z}^0 und $\tilde{\mathbf{g}}^0$ der Stokes Gleichungen

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{z}^0 + \nabla r^0 &= \frac{1}{\nu} \{(\mathbf{u}^0 \cdot \nabla)\mathbf{u}^0 - \mathbf{f}\} && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{z}^0 &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{z}^0 &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{\mathbf{g}}^0 + \nabla \tilde{s}^0 &= \frac{1}{\nu} \{(\mathbf{u}^0 + \mathbf{z}^0) \cdot (\nabla \mathbf{u}^0) \\ &\quad - (\mathbf{u}^0 \cdot \nabla)(\mathbf{u}^0 + \mathbf{z}^0)\} && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{g}}^0 &= 0 && \text{in } \Omega \\ \tilde{\mathbf{g}}^0 &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Setze $i = 0$ und $\mathbf{w}^0 = \mathbf{g}^0 = \mathbf{u}^0 + \mathbf{z}^0 + \tilde{\mathbf{g}}^0$.

- (1) Für $i = 0, 1, \dots$ führe folgende Schritte aus.
Bestimme die Lösungen \mathbf{z}_1^i und \mathbf{z}_2^i der Stokes Probleme

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{z}_1^i + \nabla r_1^i &= \frac{1}{\nu} \{ (\mathbf{u}^i \cdot \nabla) \mathbf{w}^i + (\mathbf{w}^i \cdot \nabla) \mathbf{u}^i \} && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{z}_1^i &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{z}_1^i &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{z}_2^i + \nabla r_2^i &= \frac{1}{\nu} (\mathbf{w}^i \cdot \nabla) \mathbf{w}^i && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{z}_2^i &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{z}_2^i &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Berechne

$$\begin{aligned} \alpha &= - \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{u}^i + \mathbf{z}^i) : \nabla(\mathbf{w}^i + \mathbf{z}_1^i) \\ \beta &= |\mathbf{w}^i + \mathbf{z}_1^i|_1^2 + \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{u}^i + \mathbf{z}_0^i) : \nabla \mathbf{z}_2^i \\ \gamma &= -\frac{3}{2} \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{w}^i + \mathbf{z}_1^i) : \nabla \mathbf{z}_2^i \\ \delta &= \frac{1}{2} |\mathbf{z}_2^i|_1^2. \end{aligned}$$

Bestimme die kleinste positive Nullstelle ρ^i von $\alpha + \beta\rho + \gamma\rho^2 + \delta\rho^3$ und setze

$$\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i - \rho^i \mathbf{w}^i, \quad \mathbf{z}^{i+1} = \mathbf{z}^i - \rho^i \mathbf{z}_1^i + \frac{1}{2} \rho^{i2} \mathbf{z}_2^i.$$

Bestimme die Lösung $\tilde{\mathbf{g}}^{i+1}$ des Stokes Problems

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{\mathbf{g}}^{i+1} + \nabla \tilde{s}^{i+1} &= \frac{1}{\nu} \{ (\mathbf{u}^{i+1} + \mathbf{z}^{i+1}) \cdot (\nabla \mathbf{u}^{i+1}) \\ &\quad - (\mathbf{u}^{i+1} \cdot \nabla)(\mathbf{u}^{i+1} + \mathbf{z}^{i+1}) \} && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{g}}^{i+1} &= 0 && \text{in } \Omega \\ \tilde{\mathbf{g}}^{i+1} &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

und setze

$$\mathbf{g}^{i+1} = \tilde{\mathbf{g}}^{i+1} + \mathbf{u}^{i+1} + \mathbf{z}_0^{i+1}.$$

Berechne

$$\sigma^{i+1} = |\mathbf{g}^{i+1}|_1^{-2} \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{g}^{i+1} - \mathbf{g}^i) : \nabla \mathbf{g}^{i+1}$$

und setze

$$\mathbf{w}^{i+1} = \mathbf{g}^{i+1} + \sigma^{i+1} \mathbf{w}^i.$$

Die Lösung der Navier-Stokes Gleichungen wird durch zwei Punkte erschwert: den nichtlinearen Konvektionsterm und die Divergenz Nebenbedingung. Der Versuch ist daher naheliegend, diese Schwierigkeiten zu entkoppeln. Dies ist die grundlegende Idee der sog. *Operator Splitting Methoden*.

ALGORITHMUS III.4.6 (Operator Splitting für die Navier-Stokes Gleichungen). *Wähle eine Startnäherung $\mathbf{u}^0 \in X$ und einen Dämpfungsparameter $\omega \in (0, 1)$. Für $i = 0, 1, \dots$ führe folgende Schritte aus:*

(1) *Berechne die Lösung des Stokes Problems*

$$\begin{aligned} 2\omega \mathbf{u}^{i+\frac{1}{4}} - \Delta \mathbf{u}^{i+\frac{1}{4}} + \nabla p^{i+\frac{1}{4}} &= 2\omega \mathbf{u}^i + \frac{1}{\nu} \mathbf{f} \\ &\quad - \frac{1}{\nu} (\mathbf{u}^i \cdot \nabla) \mathbf{u}^i \quad \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{i+\frac{1}{4}} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}^{i+\frac{1}{4}} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

(2) *Berechne die Lösung des nichtlinearen Poisson Problems*

$$\begin{aligned} \omega \mathbf{u}^{i+\frac{3}{4}} - \Delta \mathbf{u}^{i+\frac{3}{4}} \\ + \frac{1}{\nu} (\mathbf{u}^{i+\frac{3}{4}} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{i+\frac{3}{4}} &= \omega \mathbf{u}^{i+\frac{1}{4}} + \frac{1}{\nu} \mathbf{f} - \nabla p^{i+\frac{1}{4}} \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}^{i+\frac{3}{4}} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

(3) *Berechne die Lösung des Stokes Problems*

$$\begin{aligned} 2\omega \mathbf{u}^{i+1} - \Delta \mathbf{u}^{i+1} + \nabla p^{i+1} &= 2\omega \mathbf{u}^{i+\frac{3}{4}} + \frac{1}{\nu} \mathbf{f} \\ &\quad - \frac{1}{\nu} (\mathbf{u}^{i+\frac{3}{4}} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{i+\frac{3}{4}} \quad \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{i+1} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}^{i+1} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

In jedem Schritt von Algorithmus III.4.6 müssen zwei Stokes Probleme und ein System nichtlinearer Poisson Gleichungen gelöst werden. Das nichtlineare Problem in Teil (2) kann z.B. mit einem nichtlinearen CG-Verfahren wie in Algorithmus III.4.5 gelöst werden. Dabei entfallen im Vergleich zu Algorithmus III.4.5 die Divergenz Nebenbedingungen und die Drücke. Insbesondere sind dann als Teilprobleme nur noch skalare Poisson Gleichungen zu lösen. Hierdurch reduziert sich der Aufwand für den Gesamtalgorithmus.

Selbstverständlich kann man die Mehrgitteridee direkt auf die nichtlinearen diskreten Navier-Stokes Gleichungen anwenden. Die Hauptschwierigkeit besteht dann in der Konstruktion geeigneter Glättungsverfahren. Wegen des hohen Codierungsaufwandes werden in der Praxis

in der Regel jedoch die Algorithmen III.4.1 – III.4.5 und Varianten davon in Verbindung mit schnellen Stokes Lösern verwendet. Mehrgitterverfahren werden dann im Rahmen innerer Iterationen als Stokes Löser oder wie in Algorithmus II.9.1 (S. 92) als Poisson Löser eingesetzt.

III.5. A posteriori Fehlerschätzer

Wie in §II.10 (S. 102) wollen wir für Finite Element Diskretisierungen der stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen leicht berechenbare obere und untere Schranken für den Fehler herleiten, die nur die gegebenen Daten der Differentialgleichung und die berechnete Finite Element Lösung benötigen. Dazu brauchen wir ein abstraktes Ergebnis.

SATZ III.5.1 (Äquivalenz von Fehler und Residuum für nichtlineare Probleme). *Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ zwei Banach-Räume und $F \in C^1(V, W^*)$ eine stetig differenzierbare Abbildung von V in den Dualraum W^* von W . Sei $u_0 \in V$ eine reguläre Lösung der Gleichung*

$$(III.5.1) \quad F(u) = 0$$

d.h., es ist $DF(u_0) \in \text{Isom}(V, W^)$. Außerdem sei $DF(u)$ lokal Lipschitz-stetig in u_0 , d.h., es gibt ein $R_0 > 0$ und ein $\beta > 0$ mit*

$$\|DF(v) - DF(w)\|_{\mathcal{L}(V, W^*)} \leq \beta \|v - w\|_V \quad \forall v, w \in \overline{B(u_0, R_0)}.$$

Setze

$$R = \min \left\{ R_0, \beta^{-1} \|DF(u_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(W^*, V)}^{-1}, 2\beta^{-1} \|DF(u_0)\|_{\mathcal{L}(V, W^*)} \right\}.$$

Dann gilt für alle $v \in \overline{B(u_0, R)}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|DF(u_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(W^*, V)}^{-1} \|u_0 - v\|_V &\leq \|F(v)\|_{W^*} \\ &\leq 2 \|DF(u_0)\|_{\mathcal{L}(V, W^*)} \|u_0 - v\|_V. \end{aligned}$$

BEWEIS. Wegen $F(u_0) = 0$ und $DF(u_0) \in \text{Isom}(V, W^*)$ gilt für alle $v \in V$

$$\begin{aligned} u_0 - v &= DF(u_0)^{-1} DF(u_0)(u_0 - v) \\ &= DF(u_0)^{-1} \{DF(u_0)(u_0 - v) + F(v) - F(u_0) - F(v)\} \\ &= DF(u_0)^{-1} \int_0^1 [DF(u_0) - DF(v + t(u_0 - v))] (u_0 - v) dt \\ &\quad - DF(u_0)^{-1} F(v). \end{aligned}$$

Wegen der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von $DF(u)$ folgt hieraus für alle $v \in \overline{B(u_0, R)}$

$$\begin{aligned} \|u_0 - v\|_V &\leq \|DF(u_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(W^*, V)} \int_0^1 \beta(1-t) \|u_0 - v\|_V^2 dt \\ &\quad + \|DF(u_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(W^*, V)} \|F(v)\|_{W^*} \\ &\leq \frac{\beta}{2} \|DF(u_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(W^*, V)} \|u_0 - v\|_V^2 \\ &\quad + \|DF(u_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(W^*, V)} \|F(v)\|_{W^*} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|F(v)\|_{W^*} &\leq \|DF(u_0)(u_0 - v)\|_{W^*} + \int_0^1 \beta(1-t) \|u_0 - v\|_V^2 dt \\ &\leq \|DF(u_0)\|_{\mathcal{L}(V, W^*)} \|u_0 - v\|_V + \frac{\beta}{2} \|u_0 - v\|_V^2. \end{aligned}$$

Wegen der Definition von R folgt hieraus die Behauptung. \square

Seien nun $V_{\mathcal{T}} \subset V$, $W_{\mathcal{T}} \subset W$ endlich dimensionale Unterräume und $F_{\mathcal{T}} \in C(V_{\mathcal{T}}, W_{\mathcal{T}}^*)$. Dann approximiert das Problem

$$(III.5.2) \quad F_{\mathcal{T}}(u_{\mathcal{T}}) = 0$$

Problem (III.5.1). Ist $u_{\mathcal{T},0}$ eine Lösung von (III.5.2) mit $\|u_0 - u_{\mathcal{T},0}\|_V \leq R$, so folgt aus Satz III.5.1, dass der Fehler $\|u_0 - u_{\mathcal{T},0}\|_V$ nach oben und unten beschränkt ist durch das Residuum

$$\|F(u_{\mathcal{T},0})\|_{W^*} = \sup_{\varphi \in W; \|\varphi\|_W=1} \langle F(u_{\mathcal{T},0}), \varphi \rangle.$$

Wie wir in §II.10 (S. 102) gesehen haben, ist aber gerade die Äquivalenz von Fehler und Residuum der wesentliche Grundstein für die a posteriori Fehlerschätzung. Anders als bei linearen Problemen gilt diese Äquivalenz bei nichtlinearen Problemen nur dann, wenn die diskrete Lösung hinreichend nahe bei der betrachteten kontinuierlichen Lösung liegt. Dies ist nicht überraschend, da nichtlineare Probleme i.a. mehrere Lösungen zulassen.

Im Rahmen der Navier-Stokes Gleichungen setzen wir

$$\begin{aligned} V = W &= H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega) \\ \|[\mathbf{u}, p]\|_V &= \|[\mathbf{u}, p]\|_W = \{|\mathbf{u}|_1^2 + \|p\|^2\}^{\frac{1}{2}} \\ \langle F([\mathbf{u}, p]), [\mathbf{v}, q] \rangle &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \\ &\quad + \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \\ &\quad + \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Die Lipschitz-Stetigkeit von DF gilt wegen der Multilinearität und Stetigkeit des nichtlinearen Termes global. Die Bedingung der Regularität einer Lösung ist identisch mit dem Regularitätsbegriff aus Definition III.1.7 (S. 114).

Wir betrachten nun zunächst die Finite Element Diskretisierung (III.2.1) (S. 122). Im abstrakten Rahmen ist dann

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{T}} &= W_{\mathcal{T}} = X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}} \\ \langle F_{\mathcal{T}}([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]), [\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}] \rangle &= \langle F([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]), [\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}] \rangle. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für jede Lösung $[\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]$ von (III.5.2) die *Galerkin Orthogonalität*

$$(III.5.3) \quad \langle F([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]), [\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}] \rangle = 0 \quad \forall [\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}] \in X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}}.$$

Sei nun $[\mathbf{v}, q] \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ mit $|\mathbf{v}|_1^2 + \|q\|^2 = 1$ beliebig. Mittels elementweiser partieller Integration erhalten wir für das Residuum folgende L^2 -Darstellung

$$\begin{aligned} &\langle F([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]), [\mathbf{v}, q] \rangle \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \left\{ -\Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \nabla p_{\mathcal{T}} + \frac{1}{\nu} (\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \frac{1}{\nu} \mathbf{f} \right\} \cdot \mathbf{v} \\ (III.5.4) \quad &+ \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \int_E \mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - p_{\mathcal{T}} \mathbf{I})) \cdot \mathbf{v} \\ &+ \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K q \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Dabei verwenden wir die gleichen Notationen wie in §II.10 (S. 102).

Wegen der Galerkin Orthogonalität (III.5.3) können wir auf der rechten Seite von (III.5.4) \mathbf{v} und q durch $\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\mathcal{T}}$ und $q - q_{\mathcal{T}}$ mit beliebigen Elementen $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$ und $q_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}}$ ersetzen. Insbesondere können wir $q_{\mathcal{T}} = 0$ und $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} = \mathcal{J}_{\mathcal{T}} \mathbf{v}$ wählen, wobei $\mathcal{J}_{\mathcal{T}}$ komponentenweise der Quasi-Interpolationsoperator aus §I.4 (S. 26) ist. Setzen wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \eta_K &= \left\{ h_K^2 \left\| -\Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \nabla p_{\mathcal{T}} + \frac{1}{\nu} (\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \frac{1}{\nu} \mathbf{f} \right\|_K^2 \right. \\ (III.5.5) \quad &+ \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega} \cap \mathcal{E}_K} h_E \|\mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - p_{\mathcal{T}} \mathbf{I}))\|_E^2 \\ &\left. + \|\operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_K^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

liefern die lokalen Interpolationsfehlerabschätzungen (I.4.3) (S. 31) und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \langle F([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]), [\mathbf{v}, q] \rangle \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}} \left\| -\Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \nabla p_{\mathcal{T}} + \frac{1}{\nu} (\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \frac{1}{\nu} \mathbf{f} \right\|_K c_1 h_K |\mathbf{v}|_{1; \tilde{\omega}_K} \\
&+ \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \|\mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - p_{\mathcal{T}} \mathbf{I}))\|_E c_2 h_E^{\frac{1}{2}} |\mathbf{v}|_{1; \tilde{\omega}_E} \\
&+ \sum_{K \in \mathcal{T}} \|q\|_K \|\operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_K \\
&\leq c \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} \eta_K^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt mit mit Satz III.5.1 die obere Fehlerabschätzung

$$(III.5.6) \quad |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_1 + \|p - p_{\mathcal{T}}\| \leq c \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} \eta_K^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Die Konstante c hängt von c_1 , c_2 und damit von der Konstanten $C_{\mathcal{T}}$ aus der Regularitätsbedingung an \mathcal{T} sowie von $\|DF([\mathbf{u}, p])^{-1}\|_{\mathcal{L}}$ ab. Wie Beispiel III.1.9 (S. 114) zeigt, ist die zweite Größe die kritischere. Die Größe η_K aus (III.5.5) ist der gesuchte residuelle a posteriori Fehlerschätzer.

Aus Satz III.5.1 folgt, dass der Ausdruck $\frac{\langle F([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]), [\mathbf{v}, q] \rangle}{\|[\mathbf{v}, q]\|_V}$ für jede Testfunktion $[\mathbf{v}, q] \in V \setminus \{0\}$ eine untere Schranke für den Fehler liefert. Daher können wir für den Nachweis, dass η_K auch eine untere Fehlerschranke darstellt, wie in §II.10 (S. 102) vorgehen. Wählen wir mit den dortigen Notationen nacheinander die Testfunktionen

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= 0, & q &= \psi_K \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \\
\mathbf{v} &= \psi_K \left\{ -\Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \nabla p_{\mathcal{T}} + \frac{1}{\nu} (\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \frac{1}{\nu} \mathbf{f}_{\mathcal{T}} \right\}, & q &= 0 \\
\mathbf{v} &= \psi_E \mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - p_{\mathcal{T}} \mathbf{I})), & q &= 0,
\end{aligned}$$

erhalten wir für alle $K \in \mathcal{T}$ die untere Fehlerschranke

$$(III.5.7) \quad \eta_K \leq c \left\{ |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}|_{1; \omega_K} + \|p - p_{\mathcal{T}}\|_{\omega_K} + h_K \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\mathcal{T}}\|_{\omega_K} \right\}.$$

Dabei ist $\mathbf{f}_{\mathcal{T}}$ eine beliebige Finite Element Approximation an \mathbf{f} , z.B. die L^2 -Projektion auf $[S^{0,-1}(\mathcal{T})]^n$. Die Konstante c hängt von $C_{\mathcal{T}}$ und $\|DF([\mathbf{u}, p])\|_{\mathcal{L}}$ ab. Im Gegensatz zu $\|DF([\mathbf{u}, p])^{-1}\|_{\mathcal{L}}$ ist dieser Faktor harmlos.

Wir betrachten nun die SDFEM-Diskretisierung (III.3.1) (S. 129). Wegen der zusätzlichen Stabilisierungsterme gilt die Galerkin Orthogonalität (III.5.3) nicht mehr. Stattdessen erhalten wir für alle $[\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}] \in$

$X_{\mathcal{T}} \times M_{\mathcal{T}}$ den Konsistenzfehler

$$\begin{aligned} & \langle F([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]), [\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}] \rangle \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \delta_K h_K^2 \int_K \left[-\Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \nabla p_{\mathcal{T}} + \frac{1}{\nu} (\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \frac{1}{\nu} \mathbf{f} \right] \\ & \quad \cdot \left[\nabla q_{\mathcal{T}} + \frac{1}{\nu} (\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \right] \\ & \quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Omega}} \delta_E h_E \int_E \mathbb{J}_E(p_{\mathcal{T}}) \mathbb{J}_E(q_{\mathcal{T}}) + \sum_{K \in \mathcal{T}} \alpha_K \delta_K \int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Ist speziell $q_{\mathcal{T}} = 0$, $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} = \mathcal{J}_{\mathcal{T}} \mathbf{v}$, so folgt wegen $|\mathcal{J}_{\mathcal{T}} \mathbf{v}|_{1;K} \leq c_0 |\mathbf{v}|_{1;\tilde{\omega}_K}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \langle F_{\mathcal{T}}([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]), [\mathcal{J}_{\mathcal{T}} \mathbf{v}, 0] \rangle \\ & \leq c |\mathbf{v}|_1 \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} \delta_K^2 h_K^2 \left\| -\Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \nabla p_{\mathcal{T}} + \frac{1}{\nu} (\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \frac{1}{\nu} \mathbf{f} \right\|_K^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_{K \in \mathcal{T}} \alpha_K^2 \delta_K^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_K^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Da $\delta_K \leq 1$ und $\alpha_K \delta_K \leq 1$ ist, kann der zusätzliche Konsistenzfehler durch den Fehlerschätzer η_K absorbiert werden. Daher bleiben die Fehlerabschätzungen (III.5.6) und (III.5.7) auch für die SDFEM-Diskretisierung (III.3.1) (S. 129) gültig.

Wie in §II.10 (S. 102) kann man auch Fehlerschätzer konstruieren, die zu η_K äquivalent sind und die auf der Lösung diskreter, lokaler Hilfsprobleme beruhen. Für die Praxis ist es wesentlich, dass diese Hilfsprobleme nach wie vor linear, d.h. diskrete Stokes Probleme sind.

KAPITEL IV

Instationäre Navier-Stokes Gleichungen

IV.1. Lösbarkeit der instationären Navier-Stokes Gleichungen

Wir betrachten in diesem Kapitel die instationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen (I.2.13) (S. 12) mit homogenen Dirichlet Randbedingungen in einem beschränkten, zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$ mit Lipschitz Rand Γ und einem beschränkten Zeitintervall $[0, T]$

$$(IV.1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \mathbf{u} &= 0 && \text{auf } \Gamma \times (0, T) \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) &= \mathbf{u}_0 && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Um einen geeigneten schwachen Lösungsbegriff für (IV.1.1) einführen zu können, benötigen wir einige Notationen.

Wir setzen wie üblich

$$V = \{\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}$$

und definieren

$$H = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^n : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \Gamma\}.$$

H ist der Abschluss von $\{\mathbf{u} \in C_0^\infty(\Omega)^n : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}$ in der L^2 -Norm.

Zur Abkürzung bezeichnen wir mit (\cdot, \cdot) das L^2 -Skalarprodukt und setzen wie in den vorigen Abschnitten

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \\ b(\mathbf{v}, p) &= - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \\ N(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}] \cdot \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Ist $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum, so bezeichnet $L^p((0, T), X)$ mit $1 \leq p \leq \infty$ und $T > 0$ den Raum der messbaren Funktionen φ auf $(0, T)$ mit Werten in X , derart dass die Funktion $t \mapsto \|\varphi(\cdot, t)\|_X$ in $L^p((0, T), \mathbb{R})$

ist. $L^p((0, T), X)$ ist ein Banach-Raum mit der Norm

$$\|\varphi\|_{L^p((0, T), X)} = \left\{ \int_0^T \|\varphi(\cdot, t)\|_X^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}$$

und der offensichtlichen Modifikation für $p = \infty$.

Ist φ eine Funktion auf $(0, T)$ mit Werten in X , so heißt φ *schwach stetig* in t_0 , wenn für jede Folge $(t_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset (0, T)$ mit $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = t_0$ und jedes $\psi \in X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle \varphi(\cdot, t_m), \psi \rangle = \langle \varphi(\cdot, t_0), \psi \rangle.$$

DEFINITION IV.1.1 (Schwache Lösungen der instationären Navier–Stokes Gleichungen). Seien $T > 0$, $\mathbf{u}_0 \in H$, $\mathbf{f} \in L^2((0, T), V^*)$ und $\mathbf{u} \in L^\infty((0, T), L^2(\Omega)^n) \cap L^2((0, T), V)$. Ferner sei \mathbf{u} im L^2 -Sinne schwach stetig auf $[0, T]$. Dann heißt \mathbf{u} eine schwache Lösung von (IV.1.1), wenn für alle $\mathbf{v} \in C^1((0, T), L^2(\Omega)^n) \cap C^0([0, T], V)$ mit $\mathbf{v}(\cdot, T) = 0$ gilt

$$(IV.1.2) \quad - \int_0^T \left(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) + \nu \int_0^T a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \int_0^T N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}(\cdot, 0)).$$

Durch die Einschränkung auf die Räume V und H divergenzfreier Funktionen tritt in der schwachen Formulierung (IV.1.2) der Druck nicht mehr auf. Wir werden ihn später mit Hilfe von Satz II.3.3 (S. 45) wie bei den stationären Problemen wiedergewinnen.

SATZ IV.1.2 (Existenz schwacher Lösungen). *Seien \mathbf{f} und \mathbf{u}_0 wie in Definition IV.1.1. Dann besitzen die instationären Navier-Stokes Gleichungen (IV.1.1) mindestens eine schwache Lösung \mathbf{u} . Außerdem gilt*

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^1((0, T), V^*).$$

BEWEIS. Da V als abgeschlossener Unterraum des Hilbert-Raumes $H_0^1(\Omega)^n$ separabel ist, gibt es eine abzählbare Basis $(\mathbf{w}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eines dichten Unterraumes von V , d.h.

$$V = \overline{\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \text{span}\{\mathbf{w}_j : 0 \leq j \leq m\}}.$$

Bezeichne mit $\mathbf{u}_{0,m}$ die L^2 -Projektion von \mathbf{u}_0 auf $V_m = \text{span}\{\mathbf{w}_j : 0 \leq j \leq m\}$. Für beliebiges, aber festes $m \in \mathbb{N}$ können wir dann das

folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen betrachten

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^m (\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) \dot{g}_{i,m}(t) \\
 & + \nu \sum_{i=0}^m a(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) g_{i,m}(t) \\
 \text{(IV.1.3)} \quad & + \sum_{0 \leq i, \ell \leq m} N(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_\ell, \mathbf{w}_j) g_{i,m}(t) g_{\ell,m}(t) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_j) \quad 0 \leq j \leq m \\
 & \sum_{i=0}^m g_{i,m}(0) \mathbf{w}_i = \mathbf{u}_{0,m}.
 \end{aligned}$$

Wegen der Bilinearität von a und der Trilinearität und Stetigkeit von N erfüllt dieses System die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf [21, Satz I.1.7] und besitzt daher eine eindeutige maximale Lösung $(g_{0,m}(t), \dots, g_{m,m}(t))$ auf einem maximalen Zeitintervall $[0, t_m]$ mit $0 < t_m \leq T$. Setze

$$\mathbf{u}_m = \sum_{i=0}^m g_{i,m}(t) \mathbf{w}_i.$$

Ist $t_m < T$, so folgt aus [17, Satz XI.1.9] bzw. [21, Satz I.1.10]

$$\lim_{t \rightarrow t_m} \|\mathbf{u}_m(\cdot, t)\| = \infty.$$

Multiplizieren wir die j -te Gleichung von (IV.1.3) mit $g_{j,m}(t)$ und addieren alle Gleichungen, so erhalten wir wegen $N(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0$ für alle $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}, \mathbf{u}_m \right) + \nu a(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) = (\mathbf{f}, \mathbf{u}_m)$$

und somit

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_m(\cdot, t)\|^2 + 2\nu |\mathbf{u}_m(\cdot, t)|_1^2 &= 2(\mathbf{f}, \mathbf{u}_m(\cdot, t)) \leq 2\|\mathbf{f}\|_{-1} |\mathbf{u}_m(\cdot, t)|_1 \\
 &\leq \nu |\mathbf{u}_m(\cdot, t)|_1^2 + \frac{1}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{-1}^2.
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt für alle $s \in [0, t_m]$

$$\|\mathbf{u}_m(\cdot, s)\|^2 + \nu \int_0^s |\mathbf{u}_m(\cdot, \tau)|_1^2 d\tau \leq \frac{1}{\nu} \int_0^s \|\mathbf{f}(\cdot, \tau)\|_{-1}^2 d\tau + \|\mathbf{u}_0\|^2.$$

Also ist

$$\limsup_{t \rightarrow t_m} \|\mathbf{u}_m(\cdot, t)\| < \infty$$

und daher $t_m = T$. Außerdem ist die Folge $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in einer beschränkten Teilmenge von $L^\infty((0, T), H) \cap L^2((0, T), V)$ enthalten. Mit Hilfe eines Kompaktheitssatzes kann man hieraus folgern, dass es ein $\mathbf{u} \in L^\infty((0, T), H) \cap L^2((0, T), V)$ und eine Teilfolge $(\mathbf{u}_{m'})_{m' \in \mathbb{N}}$ von

$(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ gibt mit $\mathbf{u}_{m'} \rightarrow \mathbf{u}$ schwach in $L^2((0, T), V)$, schwach-* in $L^\infty((0, T), H)$ und stark in $L^2((0, T), H)$. Diese Konvergenz ist ausreichend, um in (IV.1.3) den Grenzübergang $m' \rightarrow \infty$ bei festem j auszuführen. Daher erfüllt \mathbf{u} die Beziehung (IV.1.2) für alle \mathbf{w}_j . Da $\bigcup V_m$ dicht ist in V , folgt hieraus die Behauptung. \square

Für den Nachweis der Eindeutigkeit einer schwachen Lösung benötigen wir folgendes Hilfsergebnis.

LEMMA IV.1.3 (Gagliardo-Nirenberg Ungleichung). *Für alle $n \in \{2, 3\}$ und alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ gilt*

$$\|\varphi\|_4 \leq 2^{\frac{n-1}{4}} \|\varphi\|^{\frac{4-n}{4}} |\varphi|_1^{\frac{n}{4}}.$$

BEWEIS. Es genügt, die Abschätzung für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ zu zeigen. Sei zunächst $n = 2$. Dann ist

$$|\varphi(x)|^2 = 2 \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(t, x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t, x_2) dt$$

und daher

$$\frac{1}{2} |\varphi(x)|^2 \leq \varphi_1(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t, x_2)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t, x_2) \right| dt.$$

Ebenso folgt

$$\frac{1}{2} |\varphi(x)|^2 \leq \varphi_2(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x_1, s)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, s) \right| ds.$$

Mit dem Satz von Fubini und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt hieraus

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^4 dx &\leq 4 \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_1(x_2) \varphi_2(x_1) dx \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(x_2) dx_2 \int_{\mathbb{R}} \varphi_2(x_1) dx_1 \\ &\leq 4 \|\varphi\| \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\| \|\varphi\| \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right\| \\ &\leq 2 \|\varphi\|^2 |\varphi|_1^2. \end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung für $n = 2$.

Sei nun $n = 3$. Aus dem Fall $n = 2$ folgt

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)|^4 dx \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2 dx_1 dx_2 \right\} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx_1 dx_2 \right\} dx_3 \\ &\leq 2 \left\{ \sup_{x_3} \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2 dx_1 dx_2 \right\} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Da aber

$$\begin{aligned} |\varphi(x)|^2 &= 2 \int_{-\infty}^{x_3} \varphi(x_1, x_2, r) \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(x_1, x_2, r) dr \\ &\leq 2 \int_{-\infty}^{x_3} |\varphi(x_1, x_2, r)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(x_1, x_2, r) \right| dr \end{aligned}$$

ist, folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \sup_{x_3} \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2 dx_1 dx_2 &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(x) \right| dx \\ &\leq 2 \|\varphi\| \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right\|. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Abschätzung für $\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)|^4 dx$ ein, so erhalten wir wegen $a[b^2 + c^2] \leq [a^2 + b^2 + c^2]^{\frac{3}{2}}$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)|^4 dx &\leq 4 \|\varphi\| \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right\| \left\{ \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|^2 \right\} \\ &\leq 4 \|\varphi\| \left\{ \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|^2 \right\}^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung für den Fall $n = 3$. □

SATZ IV.1.4 (Eindeutigkeit schwacher Lösungen). (1) Sei $n = 2$. Dann besitzen die instationären Navier-Stokes Gleichungen (IV.1.1) genau eine schwache Lösung. Außerdem gilt

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2((0, T), V^*), \quad \mathbf{u} \in C([0, T], H)$$

und $\mathbf{u}(\cdot, t) \rightarrow \mathbf{u}_0$ in H für $t \rightarrow 0$.

(2) Sei $n = 3$. Dann gilt für jede schwache Lösung der instationären Navier-Stokes Gleichungen (IV.1.1)

$$\mathbf{u} \in L^{\frac{8}{3}}((0, T), L^4(\Omega)^3), \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^{\frac{4}{3}}((0, T), V^*).$$

Es gibt höchstens eine schwache Lösung in $L^2((0, T), V) \cap L^\infty((0, T), H) \cap L^8((0, T), L^4(\Omega)^3)$. Eine solche Lösung ist automatisch in $C([0, T], H)$ und erfüllt $\mathbf{u}(\cdot, t) \rightarrow \mathbf{u}_0$ in H für $t \rightarrow 0$.

BEWEIS. Definiere auf $L^2((0, T), V) \cap L^\infty((0, T), H)$ Operatoren A, B durch

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \langle B(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Dann gilt wegen Satz IV.1.2 für jede schwache Lösung \mathbf{u} der instationären Navier-Stokes Gleichungen (IV.1.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nu A\mathbf{u} + B(\mathbf{u}) &= \mathbf{f} \quad \text{f.ü. in } V^* \\ \mathbf{u}(\cdot, t) &\xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \mathbf{u}_0 \quad \text{in } H^*. \end{aligned}$$

ad (1): Aus Lemma IV.1.3 und Satz III.1.1 (S. 109) folgt

$$\begin{aligned} \|B(\mathbf{u})\|_{V^*} &= \sup_{\mathbf{v} \in V; |\mathbf{v}|_1=1} N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sup_{\mathbf{v} \in V; |\mathbf{v}|_1=1} N(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) \leq \|\mathbf{u}\|_4^2 \\ &\leq \sqrt{2} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{u}\|_1. \end{aligned}$$

Also folgt aus $\mathbf{u} \in L^2((0, T), V) \cap L^\infty((0, T), L^2(\Omega)^2)$ auch $A\mathbf{u}, B(\mathbf{u}) \in L^2((0, T), V^*)$ und damit $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2((0, T), V^*)$. Mit Hilfe von Einbettungssätzen folgen hieraus die restlichen Regularitätsaussagen für eine schwache Lösung \mathbf{u} .

Zum Nachweis der Eindeutigkeit betrachten wir zwei schwache Lösungen $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ und setzen $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$. Wegen $\mathbf{w} \in L^2((0, T), V)$, $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \in L^2((0, T), V^*)$ folgt wegen $N(\mathbf{u}_2, \mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 + 2\nu |\mathbf{w}(\cdot, t)|_1^2 \\ &= 2 \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \mathbf{w} \right) + 2\nu a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\ &= 2 \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t}, \mathbf{w} \right) + 2\nu a(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}) - 2 \left(\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t}, \mathbf{w} \right) - 2\nu a(\mathbf{u}_2, \mathbf{w}) \\ &= 2(\mathbf{f}, \mathbf{w}) - 2N(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{w}) - 2(\mathbf{f}, \mathbf{w}) + 2N(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}) \\ &= -2N(\mathbf{w}, \mathbf{u}_1, \mathbf{w}) - 2N(\mathbf{u}_2, \mathbf{w}, \mathbf{w}) \\ &\leq 2|\mathbf{u}_1(\cdot, t)|_1 \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_4^2 \\ &\leq \sqrt{8} |\mathbf{u}_1(\cdot, t)|_1 \|\mathbf{w}(\cdot, t)\| |\mathbf{w}(\cdot, t)|_1 \\ &\leq 2\nu |\mathbf{w}(\cdot, t)|_1^2 + \frac{1}{\nu} |\mathbf{u}_1(\cdot, t)|_1^2 \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{1}{\nu} |\mathbf{u}_1(\cdot, t)|_1^2 \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2.$$

Wegen $\mathbf{u}_1 \in L^2((0, T), V)$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left\{ \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 \exp \left[-\frac{1}{\nu} \int_0^t |\mathbf{u}_1(\cdot, s)|_1^2 ds \right] \right\} \\ &= \left\{ \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 - \frac{1}{\nu} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 |\mathbf{u}_1(\cdot, t)|_1^2 \right\} \\ &\quad \exp \left[-\frac{1}{\nu} \int_0^t |\mathbf{u}_1(\cdot, s)|_1^2 ds \right] \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Da $\mathbf{w}(\cdot, 0) = 0$ ist, beweist dies die behauptete Eindeutigkeit der schwachen Lösung.

ad (2): Aus Lemma IV.1.3 und Satz III.1.1 (S. 109) folgt nun

$$\|B(\mathbf{u})\|_{V^*} = \|\mathbf{u}\|_4^2 \leq 2 \|\mathbf{u}\|_2^{\frac{1}{2}} |\mathbf{u}|_1^{\frac{3}{2}}.$$

Also folgt aus $\mathbf{u} \in L^2((0, T), V) \cap L^\infty((0, T), L^2(\Omega)^3)$ nun $A\mathbf{u} \in L^2((0, T), V^*)$ und $B(\mathbf{u}) \in L^{\frac{4}{3}}((0, T), V^*)$ und somit $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^{\frac{4}{3}}((0, T), V^*)$. Mit dem gleichen Argument folgt $\mathbf{u} \in L^{\frac{4}{3}}((0, T), L^4(\Omega)^3)$. Die zusätzliche Regularität einer schwachen Lösung in $L^2((0, T), V) \cap L^\infty((0, T), H) \cap L^8((0, T), L^4(\Omega)^3)$ folgt aus Einbettungssätzen.

Für den Nachweis der Eindeutigkeit unter den genannten Regularitätsannahmen gehen wir wie in Teil (1) vor und erhalten mit den gleichen Notationen wegen Lemma IV.1.3 und Satz III.1.1 (S. 109) nun die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 + 2\nu |\mathbf{w}(\cdot, t)|_1^2 &= -2N(\mathbf{w}, \mathbf{u}_1, \mathbf{w}) = 2N(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{u}_1) \\ &\leq 2 \|\mathbf{w}\|_4 |\mathbf{w}|_1 \|\mathbf{u}_1\|_4 \\ &\leq 4 \|\mathbf{w}\|^{\frac{1}{4}} |\mathbf{w}|_1^{\frac{7}{4}} \|\mathbf{u}_1\|_4. \end{aligned}$$

Wegen der Ungleichung $ab \leq \frac{7}{8}a^{\frac{8}{7}} + \frac{1}{8}b^8$ für alle $a, b \in \mathbb{R}_+$ (vgl. den Beweis der Hölder Ungleichung [17, Satz IX.6.2]) folgt hieraus mit $a = [\frac{16}{7}\nu]^{\frac{7}{8}} |\mathbf{w}(\cdot, t)|_1^{\frac{7}{4}}$ und $b = 4 [\frac{16}{7}\nu]^{-\frac{7}{8}} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|^{\frac{1}{4}} \|\mathbf{u}_1(\cdot, t)\|_4$

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 + 2\nu |\mathbf{w}(\cdot, t)|_1^2 \leq 2\nu |\mathbf{w}(\cdot, t)|_1^2 + \frac{1}{7} \left[\frac{7}{4\nu} \right]^7 \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 \|\mathbf{u}_1\|_4^8$$

und somit

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{1}{2} \left[\frac{7}{4\nu} \right]^7 \|\mathbf{u}_1\|_4^8 \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2.$$

Wegen $\mathbf{u}_1 \in L^8((0, T), L^4(\Omega)^3)$ folgt hieraus wie in Teil (1) $\mathbf{w} = 0$, d.h. die behauptete Eindeutigkeit. \square

SATZ IV.1.5 (Regularität schwacher Lösungen). (1) Sei $n = 2$ und $\mathbf{f}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \in L^2((0, T), V^*)$, $\mathbf{f}(\cdot, 0) \in H$ und $\mathbf{u}_0 \in H^2(\Omega)^2 \cap V$. Dann gilt für die eindeutige schwache Lösung der instationären Navier-Stokes Gleichungen $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2((0, T), V) \cap L^\infty((0, T), H)$. Ist zusätzlich $\Gamma \in C^2$ und $\mathbf{f} \in L^\infty((0, T), H)$, so ist $\mathbf{u} \in L^\infty((0, T), H^2(\Omega)^2)$.

(2) Sei $n = 3$ und $\mathbf{f} \in L^\infty((0, T), H)$, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \in L^1((0, T), H)$ und $\mathbf{u}_0 \in H^2(\Omega)^3 \cap V$. Definiere

$$d_1 = \|\mathbf{f}(\cdot, 0)\| + \nu \|\mathbf{u}_0\|_2 + \|\mathbf{u}_0\|_2^2, \quad d_2 = \|\mathbf{f}\|_{L^\infty((0, T), V^*)}.$$

Falls

$$\nu^{-2} d_2 + \nu^{-3} (1 + d_1^2) \{ \|\mathbf{u}_0\|^2 + \nu^{-1} T d_2 \} \exp \left\{ \int_0^T \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}(\cdot, s) \right\| ds \right\}$$

hinreichend klein ist, besitzen die instationären Navier-Stokes Gleichungen eine eindeutige schwache Lösung, und es gilt $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2((0, T), V) \cap L^\infty((0, T), H)$. Ist zusätzlich $\Gamma \in C^\infty$, so ist $\mathbf{u} \in L^\infty((0, T), H^2(\Omega)^3)$.

BEWEIS. [15, Theoreme III.3.5 – III.3.8]. \square

BEMERKUNG IV.1.6 (Existenz und Regularität des Druckes). Sei \mathbf{u} eine schwache Lösung der instationären Navier-Stokes Gleichungen. Mit den Notationen des Beweises von Satz IV.1.4 setze

$$\mathbf{U}(t) = \int_0^t \mathbf{u}(\cdot, s) ds, \quad \boldsymbol{\beta}(t) = \int_0^t B(\mathbf{u}(\cdot, s)) ds, \quad \mathbf{F}(t) = \int_0^t \mathbf{f}(\cdot, s) ds.$$

Dann gilt $\mathbf{U}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{F} \in C([0, T], V^*)$. Aus der schwachen Formulierung (IV.1.2) folgt $\nu a(\mathbf{U}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{g}, \mathbf{v} \rangle$ für alle $\mathbf{v} \in V$ mit $\mathbf{g} = \mathbf{F} - \boldsymbol{\beta} - \mathbf{u}(\cdot, t) + \mathbf{u}_0 \in C([0, T], V^*)$. Wegen Satz II.3.3 (S. 45) und Bemerkung II.2.3 gibt es daher ein $q(\cdot, t) \in L^2(\Omega)$ mit

$$(IV.1.4) \quad \nabla q(\cdot, t) = \mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{U}$$

im Distributionssinn. Es folgt $\nabla q \in C([0, T], H^{-1}(\Omega))$ und daher $q \in C([0, T], L^2(\Omega))$. Daher kann man (IV.1.4) im Distributionssinn bzgl. t ableiten und erhält für $p = \frac{\partial q}{\partial t}$ die Identität

$$\nabla p = \mathbf{f} - B(\mathbf{u}) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nu \Delta \mathbf{u}$$

im Distributionssinn. Außerdem folgt $p \in L^2((0, T), L^2(\Omega))$. Daher ist p der gesuchte Druck in (IV.1.1). Unter den Voraussetzungen von Satz IV.1.5 ergibt sich zusätzlich $p \in L^\infty((0, T), H^1(\Omega))$.

BEMERKUNG IV.1.7 (Höhere Regularität). Die Regularitätsaussagen von Satz IV.1.5 für $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ sind zu schwach, um Fehlerabschätzungen der Ordnung 2 oder höher für Zeitdiskretisierungen der instationären Navier-Stokes Gleichungen zu erhalten. J. R. Heywood und R. Rannacher haben gezeigt, dass die hierfür erforderlichen Regularitätseigenschaften nur gelten, wenn die Daten \mathbf{f}, \mathbf{u}_0 nicht lokale Kompatibilitätsbedingungen erfüllen. Bleibt z.B. eine der Größen

$$\left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\cdot, t) \right|_1, \quad \int_t^T \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\cdot, s) \right|_2^2 ds, \quad \int_t^T \left| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\cdot, s) \right|_2^2 ds$$

für $t \rightarrow 0$ beschränkt, so besitzt das überbestimmte Neumann Problem

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \operatorname{div} \{ \mathbf{f}(\cdot, 0) - (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 \} && \text{in } \Omega \\ \nabla \varphi &= \nu \Delta \mathbf{u}_0 + \mathbf{f}(\cdot, 0) - (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung. Wegen des Gaußschen Integralsatzes ist eine notwendige Bedingung hierfür

$$\int_\Omega \operatorname{div} \{ \mathbf{f}(\cdot, 0) - (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 \} = \int_\Gamma \mathbf{n} \cdot \{ \nu \Delta \mathbf{u}_0 + \mathbf{f}(\cdot, 0) - (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 \}.$$

IV.2. Diskretisierung und numerische Lösung

Es gibt verschiedene Vorgehensweisen, die instationären Navier-Stokes Gleichungen in Ort und Zeit zu diskretisieren. Sie unterscheiden sich in ihrer Herleitung und Analyse, führen aber häufig auf die gleichen diskreten Probleme.

Wir betrachten zuerst die *Linien Methode*. Dazu wählen wir eine affin äquivalente, zulässige und reguläre Unterteilung \mathcal{T} von Ω und ein zugehöriges stabiles Paar $(X_{\mathcal{T}}, M_{\mathcal{T}})$ Finite Element Räume zur Approximation von Geschwindigkeit und Druck. Setze wie üblich

$$V_{\mathcal{T}} = \left\{ \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}} : \int_{\Omega} p_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = 0 \forall p_{\mathcal{T}} \in M_{\mathcal{T}} \right\}.$$

Dann lautet mit den gleichen Notationen wie in §IV.1 das diskrete Analogon der schwachen Formulierung (IV.1.2) (S. 144) aus Definition IV.1.1 (S. 144):

$$(IV.2.1) \quad \begin{aligned} & \text{Finde } \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in L^2((0, T), V_{\mathcal{T}}) \text{ mit} \\ & - \int_0^T \left(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \frac{\partial \mathbf{v}_{\mathcal{T}}}{\partial t} \right) + \nu \int_0^T a(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + \int_0^T N(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \\ & = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}(\cdot, 0)) \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in C^1([0, T], V_{\mathcal{T}})$ mit $\mathbf{v}_{\mathcal{T}}(\cdot, T) = 0$.

Setzen wir $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in C^1((0, T), V_{\mathcal{T}}) \cap C([0, T], V_{\mathcal{T}})$ voraus, können wir in (IV.2.1) bzgl. der Zeit partiell integrieren und erhalten das äquivalente Problem:

Finde $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in C^1((0, T), V_{\mathcal{T}}) \cap C([0, T], V_{\mathcal{T}})$ mit

$$\mathbf{u}_{\mathcal{T}}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_{0, \mathcal{T}}$$

und

$$(IV.2.2) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{\partial \mathbf{u}_{\mathcal{T}}}{\partial t}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \right) + \nu \int_0^T a(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + \int_0^T N(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \\ & = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}$ und $t \in (0, T)$.

Dabei ist $\mathbf{u}_{0, \mathcal{T}}$ die L^2 -Projektion von \mathbf{u}_0 auf $V_{\mathcal{T}}$.

Definieren wir die Operatoren $A_{\mathcal{T}}, B_{\mathcal{T}} : V_{\mathcal{T}} \rightarrow V_{\mathcal{T}}$ durch

$$(A_{\mathcal{T}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = a(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}), \quad (B_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}), \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = N(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}),$$

so können wir Problem (IV.2.2) in der vertrauten Form eines gewöhnlichen Anfangswertproblems schreiben:

$$(IV.2.3) \quad \begin{aligned} & \dot{\mathbf{u}}_{\mathcal{T}} = F_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = \mathbf{f} - \nu A_{\mathcal{T}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - B_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) \\ & \mathbf{u}_{\mathcal{T}}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_{0, \mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Hierauf können dann die üblichen Methoden zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen angewandt werden. Dabei ist zu beachten, dass der Operator $A_{\mathcal{T}}$ eine Kondition von $O(h_{\mathcal{T}}^{-2})$ hat und dass daher bei expliziten Zeitschrittverfahren eine CFL-Bedingung der Form $\tau \leq ch_{\mathcal{T}}^2$ für die Zeitschrittweite τ eingehalten werden muss.

Eine besonders häufig verwandte Zeitdiskretisierung ist das θ -Schema [21, Bemerkung I.5.7]. Dies ist die allgemeine Form eines linearen Einschrittverfahrens. Die Parameter $\theta = 0$, $\theta = 1$ und $\theta = \frac{1}{2}$ entsprechen dem expliziten und impliziten Euler Verfahren sowie der Trapezregel. Für Problem (IV.2.3) ergibt sich bei konstanter Zeitschrittweite τ das folgende Schema

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^0 &= \mathbf{u}_{0,\mathcal{T}} \\ \frac{1}{\tau}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n) &= \theta \{ \mathbf{f}^{n+1} - \nu A_{\mathcal{T}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1} - B_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}) \} \\ &\quad + (1 - \theta) \{ \mathbf{f}^n - \nu A_{\mathcal{T}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n - B_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n) \} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^0 &= \mathbf{u}_{0,\mathcal{T}} \\ \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1} + \tau\theta\nu A_{\mathcal{T}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1} \\ + \tau\theta B_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}) &= \mathbf{g}^{n+1} \\ &= \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n + \tau\theta \mathbf{f}^{n+1} \\ &\quad + \tau(1 - \theta) \{ \mathbf{f}^n - \nu A_{\mathcal{T}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n - B_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n) \}. \end{aligned}$$

Die Näherung $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}$ für $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}(\cdot, (n+1)\tau)$ ergibt sich also als Lösung der diskreten stationären Navier-Stokes Gleichung

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + \tau\theta\nu a(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \\ + \tau\theta N(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) &= (\mathbf{g}^{n+1}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Dieses Problem kann mit einem der in §III.4 (S. 130) beschriebenen Verfahren gelöst werden.

Für die Fehleranalyse der Linien Methode kombiniert man die Fehlerabschätzungen des vorigen Kapitels für stationäre Navier-Stokes Gleichungen mit den Techniken zur Fehlerabschätzung bei der Diskretisierung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Der Nachteil dieser Vorgehensweise liegt in den unrealistisch starken Regularitätsvoraussetzungen an die Lösung der instationären Navier-Stokes Gleichungen. Außerdem ist die Linien Methode kaum einer a posteriori Fehleranalyse und automatischen Gitteranpassung zugänglich.

Bei der *Rothe Methode* wird die Reihenfolge der Orts- und Zeitdiskretisierung vertauscht. Dazu werden die instationären Navier-Stokes Gleichungen als ein gewöhnliches Anfangswertproblem in einem unendlich dimensional Hilbert-Raum aufgefasst und mit den üblichen Methoden für gewöhnliche Differentialgleichungen bzgl. der Zeit diskretisiert. Dazu muss in jedem Zeitschritt eine stationäre Navier-Stokes

Gleichung gelöst werden. Dies geschieht mit den Methoden des vorigen Kapitels. Insgesamt erhält man in der Regel die gleichen diskreten Probleme wie bei der Linien Methode. Wie bei der Linien Methode können bei dieser Vorgehensweise alle Verfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen benutzt werden. Die Fehleranalyse kommt nun aber mit schwächeren Regularitätsannahmen aus. Sie ist aber wesentlich aufwändiger, da man in unendlich dimensionalen Räumen arbeiten muss. Außerdem müssen die Fehlerabschätzungen für die Ortsdiskretisierung gleichmäßig bzgl. der Zeitschrittweite sein. Dies ist ein nichttriviales Problem. Wie die Linien Methode ist die Rothe Methode kaum einer a posteriori Fehleranalyse zugänglich.

Bei den *Raum-Zeit Finite Elementen* werden Orts- und Zeitvariable gleichzeitig diskretisiert. Hierzu unterteilen wir das Zeitintervall $[0, T]$ in $N\tau$ nicht überlappende Intervalle $J_j = [t_j, t_{j+1}]$, $1 \leq j \leq N_\tau$, mit $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{N_\tau} < t_{N_\tau+1} = T$ und setzen $\tau_j = t_{j+1} - t_j$ sowie $\mathcal{I} = \{I_j : 1 \leq j \leq N_\tau\}$. Zu jedem Zeitpunkt t_j mit $1 \leq j \leq N_\tau$ wählen wir eine affin äquivalente, zulässige und reguläre Unterteilung \mathcal{T}_j von Ω und ein stabiles Paar (X_j, M_j) zugehöriger Finite Element Räume. V_j sei der entsprechende Raum der diskret divergenzfreien Geschwindigkeitsfelder. Setze für $1 \leq j \leq N_\tau$ und $\theta \in [0, 1]$

$$\lambda_j(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau_{j-1}}(t - t_{j-1}) & \text{für } t_{j-1} \leq t \leq t_j \\ \frac{1}{\tau_j}(t_{j+1} - t) & \text{für } t_j \leq t \leq t_{j+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$b_j(t) = \frac{4}{\tau_j^2}(t - t_j)(t_{j+1} - t)$$

$$\lambda_j^\theta(t) = \lambda_j(t) + \frac{3}{2} \left(\theta - \frac{1}{2} \right) [b_j(t) - b_{j-1}(t)]$$

mit der offensichtlichen Modifikation für $j = 1$ (vgl. Abbildung IV.2.1). Die Funktionen λ_j und b_j sind die stetigen, stückweise linearen, nodalen Basisfunktionen bzw. die quadratischen Elementblasenfunktionen zu der Unterteilung \mathcal{I} von $[0, T]$. Mit Hilfe der Simpson-Regel rechnet man leicht nach, dass für $1 \leq j \leq N_\tau$ gilt

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \lambda_j^\theta(t) dt = (1 - \theta)\tau_{j-1}, \quad \int_{t_j}^{t_{j+1}} \lambda_j^\theta(t) dt = \theta\tau_j$$

mit der offensichtlichen Modifikation für $j = 1$.

Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$S_\tau^{k,-1}(V_{\mathcal{I}}) = \text{span} \{ \chi_{J_j}(t) t^\mu \mathbf{v}_j(x) : 0 \leq \mu \leq k, 1 \leq j \leq N_\tau, \mathbf{v}_j \in V_j \}$$

$$S_\tau^{\theta;1,0}(V_{\mathcal{I}}) = \text{span} \{ \lambda_j^\theta(t) \mathbf{v}_j(x) : 1 \leq j \leq N_\tau, \mathbf{v}_j \in V_j \}$$

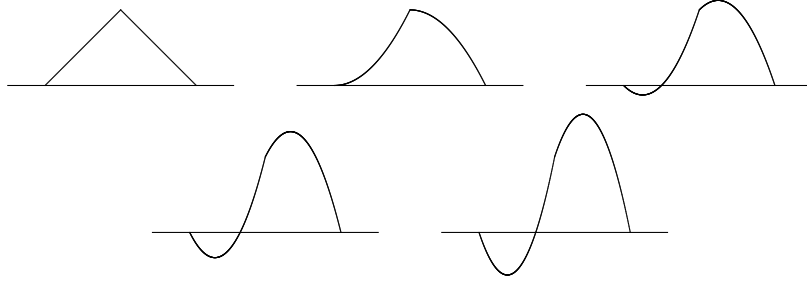


ABBILDUNG IV.2.1. Funktionen $\lambda_j^{\frac{1}{2}}$, $\lambda_j^{\frac{5}{8}}$, $\lambda_j^{\frac{3}{4}}$, $\lambda_j^{\frac{7}{8}}$ und λ_j^1

und für $k \geq 2$

$$\begin{aligned} S_\tau^{\theta;k,0}(V_{\mathcal{I}}) \\ &= S_\tau^{\theta;1,0}(V_{\mathcal{I}}) \oplus \\ &\quad \text{span} \{b_j(t)t^\mu \mathbf{w}_j(x) : 0 \leq \mu \leq k-2, 1 \leq j \leq N_\tau, \mathbf{w}_j \in V_j\}. \end{aligned}$$

$S_\tau^{k,-1}(V_{\mathcal{I}})$ besteht also aus in der Zeit un stetigen Funktionen, die stückweise Polynome vom Grad $\leq k$ mit Koeffizienten in V_j sind. Die Funktionen in $S_\tau^{\theta;k,0}(V_{\mathcal{I}})$ sind global stetig, verschwinden zur Zeit T und sind stückweise Polynome vom Grad $\leq k$ mit Koeffizienten in V_j .

Die Raum-Zeit Finite Element Diskretisierung der instationären Navier-Stokes Gleichungen lautet dann mit $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \text{Finde } \mathbf{u}_{\mathcal{I}} \in S_\tau^{k,-1}(V_{\mathcal{I}}) \text{ mit} \\ \text{(IV.2.4)} \quad - \int_0^T \left(\mathbf{u}_{\mathcal{I}}, \frac{\partial \mathbf{v}_{\mathcal{I}}}{\partial t} \right) + \nu \int_0^T a(\mathbf{u}_{\mathcal{I}}, \mathbf{v}_{\mathcal{I}}) + \int_0^T N(\mathbf{u}_{\mathcal{I}}, \mathbf{u}_{\mathcal{I}}, \mathbf{v}_{\mathcal{I}}) \\ = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}_{\mathcal{I}}) + (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_{\mathcal{I}}(\cdot, 0)) \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{v}_{\mathcal{I}} \in S_\tau^{\theta;k+1,0}(V_{\mathcal{I}})$

Für ein besseres Verständnis dieser Diskretisierung integrieren wir den ersten Summanden auf der linken Seite von (IV.2.4) auf jedem Zeitintervall J_j partiell. Mit der Notation $\mathbf{u}_{\mathcal{I}}(\cdot, t_j \pm 0) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \mathbf{u}_{\mathcal{I}}(\cdot, t_j \pm s)$ und $\mathbf{u}_{\mathcal{I}}(\cdot, 0-0) = \mathbf{u}_0$ erhalten wir dann die äquivalente Beziehung

$$\begin{aligned} \text{(IV.2.5)} \quad & \sum_{j=1}^{N_\tau} \left\{ (\mathbf{u}_{\mathcal{I}}(\cdot, t_j + 0) - \mathbf{u}_{\mathcal{I}}(\cdot, t_j - 0), \mathbf{v}_{\mathcal{I}}(\cdot, t_j)) \right. \\ & + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_{\mathcal{I}}}{\partial t}, \mathbf{v}_{\mathcal{I}} \right) + \nu \int_{t_j}^{t_{j+1}} a(\mathbf{u}_{\mathcal{I}}, \mathbf{v}_{\mathcal{I}}) \\ & \left. + \int_{t_j}^{t_{j+1}} N(\mathbf{u}_{\mathcal{I}}, \mathbf{u}_{\mathcal{I}}, \mathbf{v}_{\mathcal{I}}) \right\} \\ & = \sum_{j=1}^{N_\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\mathbf{f}, \mathbf{v}_{\mathcal{I}}). \end{aligned}$$

Betrachte nun speziell den Fall $k = 0$. Setze $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^j = \mathbf{u}_{\mathcal{I}}|_{J_j}$ für $1 \leq j \leq N_{\tau}$ und wähle in (IV.2.5) $\mathbf{v}_{\mathcal{I}} = \lambda_j^{\theta}(t)\mathbf{v}_j$ mit $\mathbf{v}_j \in V_j$. Dann erhalten wir $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^0 = \mathbf{u}_{\mathcal{T},0}$ und

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^j - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{j-1}, \mathbf{v}_j) + \theta\tau_j\nu a(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^j, \mathbf{v}_j) + \theta\tau_j N(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^j, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^j, \mathbf{v}_j) \\ & + (1 - \theta)\tau_{j-1}\nu a(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{j-1}, \mathbf{v}_j) + (1 - \theta)\tau_{j-1}N(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{j-1}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{j-1}, \mathbf{v}_j) \\ & = \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \lambda_j^{\theta}(t) (\mathbf{f}, \mathbf{v}_j) \\ & \approx \theta\tau_j (\mathbf{f}^j, \mathbf{v}_j) + (1 - \theta)\tau_{j-1} (\mathbf{f}^{j-1}, \mathbf{v}_j). \end{aligned}$$

Dabei ist $\mathbf{u}_{\mathcal{T},0}$ wieder die L^2 -Projektion von \mathbf{u}_0 auf V_0 , und \mathbf{f}^j bezeichnet den Mittelwert von \mathbf{f} auf J_j . In Operator Schreibweise lautet dies

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^0 &= \mathbf{u}_{0,\mathcal{T}} \\ \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^j + \tau_j\theta\nu A_{\mathcal{T}}\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^j \\ & + \tau_j\theta B_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^j) = \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{j-1} + \tau_j\theta\mathbf{f}^j \\ & + \tau_{j-1}(1 - \theta)\{\mathbf{f}^{j-1} - \nu A_{\mathcal{T}}\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{j-1} - B_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{j-1})\}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also wieder das θ -Schema.

Mit einigem technischen Mehraufwand kann man zeigen, dass die Diskretisierung (IV.2.4) einem impliziten $(k + 1)$ -stufigen Runge-Kutta Verfahren für die Zeit-Diskretisierung entspricht und dass man für $\theta = \frac{1}{2}$ die $(k + 1)$ -te diagonale Padé-Approximation erhält. Insbesondere ist die Zeit-Diskretisierung dann A-stabil und hat die Ordnung $2k + 2$.

Wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, ist die Diskretisierung (IV.2.4) einer a posteriori Fehleranalyse besonders gut zugänglich.

Eine andere Variante von Raum-Zeit Finiten Elementen ist die *discontinuous Galerkin method*, kurz $DG(k)$, von C. Johnson et al. Man gewinnt sie, indem man von der Formulierung (IV.2.5) ausgeht und die Lösung $\mathbf{u}_{\mathcal{I}}$ und die Testfunktionen $\mathbf{v}_{\mathcal{I}}$ beide aus dem Raum $S_{\tau}^{k,-1}(V_{\mathcal{I}})$ wählt. Da alle Funktionen nun unstetig in der Zeit sind, ist dies eine nicht konforme Methode. Dies erschwert die Fehleranalyse. Für $k = 0$ erhält man insbesondere das implizite Euler Verfahren. Man kann zeigen, dass man für allgemeines k ein implizites $(k + 1)$ -stufiges Runge-Kutta Verfahren erhält und dass die Stabilitätsfunktion die $(k + 1)$ -te sub-diagonale Padé-Approximation ist. Insbesondere ist das Verfahren L-stabil und hat die Ordnung $2k + 1$.

Bei allen Verfahren, die wir bisher betrachtet haben, müssen wir in jedem Zeitschritt diskrete stationäre Navier-Stokes Gleichungen lösen. Man kann auch die instationären Navier-Stokes Gleichungen zuerst linearisieren und danach die linearen instationären Probleme diskretisieren. Dann muss in jedem Zeitschritt ein diskretes Stokes Problem

gelöst werden. Den Fehler der Linearisierung kann man mit den Methoden von §III.2 (S. 122) kontrollieren. Den Fehler der Diskretisierung bekommt man mit den Methoden von Kapitel II in den Griff.

Zum Abschluss wollen wir noch auf den *Transport-Diffusions Algorithmus* eingehen. Bei ihm werden Linearisierung und Diskretisierung gewissermaßen in einem Schritt durchgeführt. Wir betrachten wieder eine affin äquivalente, zulässige und reguläre Unterteilung \mathcal{T} von Ω und zugehörige Finite Element Räume $X_{\mathcal{T}}, M_{\mathcal{T}}$ für Geschwindigkeit und Druck sowie den Raum $V_{\mathcal{T}}$ der diskret divergenzfreien Geschwindigkeitsfelder. Wir nehmen an, dass $X_{\mathcal{T}}$ ein Lagrangescher Finite Element Raum ist, d.h. dass er eine nodale Basis besitzt. Die entsprechenden Gitterpunkte nennen wir z_i . Aus dem Transport-Theorem I.2.2 (S. 7) wissen wir, dass $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ die totale zeitliche Ableitung entlang der Trajektorien ist und somit den Transport entlang der Charakteristiken beschreibt. Daher berechnet der Transport-Diffusions Algorithmus die Näherung $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{n+1}$ für $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}(\cdot, t_{n+1})$ aus der Näherung $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n$ für $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}(\cdot, t_n)$ in den folgenden zwei Teilschritten:

- (1) (*Transport-Schritt*) Löse für jeden Gitterpunkt z_i das gewöhnliche Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_i(t) &= \mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n(y_i(t)) \quad \text{für } t_n < t < t_{n+1} \\ y_i(t_{n+1}) &= z_i. \end{aligned}$$

- (2) (*Diffusions-Schritt*) Löse das diskrete Analogon des Stokes Problems

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}(y(t_n), t_n)}{t_{n+1} - t_n} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} &= \mathbf{f}(\cdot, t_{n+1}) \quad \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}^{n+1} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Beim Transport-Diffusions Algorithmus wird also der Term

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}(z_i, t_{n+1}) + (\mathbf{u}_{\mathcal{T}}(z_i, t_{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\mathcal{T}}(z_i, t_{n+1})$$

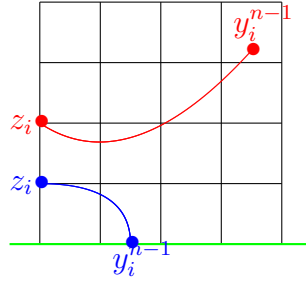
durch den Differenzenquotienten

$$\frac{\mathbf{u}_{\mathcal{T}}(z_i, t_{n+1}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}(y_i(t_n), t_n)}{t_{n+1} - t_n}$$

approximiert.

Die Implementierung dieses Algorithmus ist recht aufwändig, da im Transport Schritt die Charakteristiken durch das Gitter verfolgt werden müssen (vgl. Abbildung IV.2.2). Außerdem treten Schwierigkeiten bei geschlossenen Stromlinien auf.

Zum Abschluss sei generell bemerkt, dass sich die Lösungen der instationären Navier-Stokes Gleichungen für $t \approx 0$ wie \sqrt{t} für das Geschwindigkeitsfeld bzw. wie $\frac{1}{\sqrt{t}}$ für den Druck verhalten. Daher ist es

ABBILDUNG IV.2.2. Charakteristiken y_i^{n-1}

bei jeder Diskretisierung empfehlenswert, in den ersten Zeitschritten eine Zeitdiskretisierung niedriger Ordnung mit gutem Stabilitätsverhalten wie z.B. das implizite Euler Verfahren zu verwenden und erst später auf ein Verfahren höherer Ordnung wie z.B. das Crank-Nicolson Verfahren umzuschalten.

IV.3. A posteriori Fehlerschätzer

Wir benutzen den abstrakten Rahmen von §III.5 (S. 137). Für die instationären Navier-Stokes Gleichungen ist dann mit den üblichen Notationen

$$\begin{aligned} \langle F([\mathbf{u}, p]), [\mathbf{v}, q] \rangle &= -(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}(\cdot, 0)) - \int_0^T \left(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) \\ &\quad + \int_0^T \{ \nu a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \} \\ &\quad + \int_0^T b(\mathbf{u}, q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W = \{ &[\mathbf{v}, q] : \mathbf{v} \in L^2((0, T), H_0^1(\Omega)^n), \\ &\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \in L^2((0, T), H^{-1}(\Omega)^n), \\ &\mathbf{v}(\cdot, T) = 0 \text{ in } H^{-1}(\Omega)^n, \\ &q \in L^2((0, T), L_0^2(\Omega)) \} \end{aligned}$$

$$V = V_1 \times V_2$$

mit

$$\begin{aligned} V_1 &= \begin{cases} L^\infty((0, T), L^2(\Omega)^2) \cap L^2((0, T), H_0^1(\Omega)^2) & \text{falls } n = 2 \\ L^\infty((0, T), L^2(\Omega)^3) \cap L^2((0, T), H_0^1(\Omega)^3) \\ \cap L^8((0, T), L^4(\Omega)^3) & \text{falls } n = 3 \end{cases} \\ V_2 &= L^2((0, T), L_0^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Insbesondere besitzt wegen Satz IV.1.4 (S. 147) das Problem $F([\mathbf{u}, p]) = 0$ für $n = 2$ genau eine Lösung und für $n = 3$ höchstens eine Lösung. Aus den üblichen Energieabschätzungen folgt, dass diese Lösung regulär ist im Sinne von Satz III.5.1 (S. 137). Die Lipschitz-Stetigkeit von $DF([\mathbf{u}, p])$ folgt aus der Trilinearität und Stetigkeit von N .

Für die Diskretisierung betrachten wir Raum-Zeit Finite Elemente, d.h. Problem (IV.2.1) (S. 151). Im vorliegenden abstrakten Rahmen entspricht dies der Wahl

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{T}} &= S_{\tau}^{k,-1}(X_{\mathcal{I}}) \times S_{\tau}^{k,-1}(M_{\mathcal{I}}) \\ W_{\mathcal{T}} &= S_{\tau}^{\theta;k+1,0}(X_{\mathcal{I}}) \times S_{\tau}^{k,-1}(M_{\mathcal{I}}) \\ \langle F_{\mathcal{T}}([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]), [\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}] \rangle &= \langle F([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]), [\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}] \rangle. \end{aligned}$$

Man beachte, dass für den Druck Ansatz- und Testraum übereinstimmen.

Insbesondere gilt also wieder die Galerkin Orthogonalität

$$\langle F([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]), [\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}] \rangle = 0 \quad \forall [\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, q_{\mathcal{T}}] \in W_{\mathcal{T}}$$

für jede Lösung $[\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]$ des diskreten Problems (IV.2.1) $F_{\mathcal{T}}([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]) = 0$. Wegen Satz III.5.1 (S. 137) ist somit der Fehler

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{L^2((0,T), H_0^1(\Omega)^n)} + \|p - p_{\mathcal{T}}\|_{L^2((0,T), L_0^2(\Omega))}$$

äquivalent zu dem Residuum

$$\|F([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}])\|_{W^*} = \sup_{[\mathbf{v}, q] \in W; \|[\mathbf{v}, q]\|_W = 1} \langle F([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]), [\mathbf{v}, q] \rangle.$$

Aus Gleichung (IV.2.2) (S. 151) erhalten wir mittels elementweiser partieller Integration wie in Gleichung (III.5.4) (S. 139) die folgende Darstellung des Residuums

$$\begin{aligned} &\langle F([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]), [\mathbf{v}, q] \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{N_{\tau}} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_j} \left(\int_K (\mathbf{u}_{\mathcal{T}}(x, t_j + 0) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}(x, t_j - 0)) \cdot \mathbf{v}(x, t_j) dx \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_K \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_{\mathcal{T}}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \nabla p_{\mathcal{T}} + (\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \mathbf{f} \right\} \cdot \mathbf{v} dx dt \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_K q \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} dx dt \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_{j,\Omega}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_E \mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - p_{\mathcal{T}} \mathbf{I})) \cdot \mathbf{v} dS dt \right\}. \end{aligned}$$

Dabei benutzen wir die Notationen des vorigen Paragraphen, insbesondere ist $\mathbf{u}_\mathcal{T}(\cdot, 0 - 0) = \mathbf{u}_0$ der bekannte Anfangswert.

Um eine kompaktere Schreibweise zu erhalten, definieren wir $\mathcal{P}_\tau = \{K \times J_j : 1 \leq j \leq N_\tau, K \in \mathcal{T}_j\}$ und definieren für $Q = K \times J_j \in \mathcal{P}_\tau$ die Ränder $\partial Q_B = K \times \{t_j\}$ und $\partial Q_L = (\partial K \cap \Omega) \times J_j$. Mit diesen Notationen geht erhalten wir die folgende Darstellung des Residuum

$$\begin{aligned} & \langle F([\mathbf{u}_\mathcal{T}, p_\mathcal{T}]), [\mathbf{v}, q] \rangle \\ &= \sum_{Q \in \mathcal{P}_\tau} \left\{ \int_{\partial Q_B} (\mathbf{u}_\mathcal{T}(x, t_j + 0) - \mathbf{u}_\mathcal{T}(x, t_j - 0)) \cdot \mathbf{v}(x, t_j) dx \right. \\ & \quad + \int_Q \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_\mathcal{T}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u}_\mathcal{T} + \nabla p_\mathcal{T} + (\mathbf{u}_\mathcal{T} \cdot \nabla) \mathbf{u}_\mathcal{T} - \mathbf{f} \right\} \cdot \mathbf{v} dx dt \\ & \quad + \int_Q q \operatorname{div} \mathbf{u}_\mathcal{T} dx dt \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\partial Q_L} \mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_\mathcal{T} - p_\mathcal{T} \mathbf{I})) \cdot \mathbf{v} dS dt \right\}. \end{aligned}$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ vor dem letzten Summanden berücksichtigt, dass jedes $E \in \mathcal{E}_{j,\Omega}$ doppelt gezählt wird.

Für die Herleitung einer oberen Fehlerschranke benötigen wir wieder einen geeigneten Interpolationsoperator. Dazu nehmen wir an, dass für jedes j der Raum X_j den Raum $S_0^{1,0}(\mathcal{T}_j)^n$ enthält und bezeichnen mit \mathcal{J}_j den Quasi-Interpolationsoperator zu \mathcal{T}_j aus §I.4 (S. 26). Setze

$$\pi_j \mathbf{u} = \frac{1}{\tau_{j-1} + \tau_j} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \mathbf{u}(\cdot, t) dt$$

mit der offensichtlichen Modifikation für $j = 1$. Dann definieren wir den Interpolationsoperator $I_\mathcal{T} : V_1 \rightarrow S_\tau^{\theta;1,0}(S_\tau^{1,0})$ durch

$$I_\mathcal{T} \mathbf{u} = \sum_{j=1}^{N_\tau} \lambda_j^\theta(t) \pi_j(\mathcal{J}_j \mathbf{u}).$$

Man kann zeigen, dass dann für alle $Q = K \times J_j \in \mathcal{P}_\tau$ folgende Interpolationsfehlerabschätzungen gelten

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u} - I_\mathcal{T} \mathbf{u}\|_Q \\ & \leq c \left\{ h_K \|\mathbf{u}\|_{L^2(J_j, H_0^1(\tilde{\omega}_K)^n)} + \tau_j h_K^{-1} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L^2(J_j, H^{-1}(\tilde{\omega}_K)^n)} \right\} \\ & \|\mathbf{u} - I_\mathcal{T} \mathbf{u}\|_{\partial Q_L} \\ & \leq c \left\{ h_K^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}\|_{L^2(J_j, H_0^1(\tilde{\omega}_K)^n)} + \tau_j h_K^{-\frac{3}{2}} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L^2(J_j, H^{-1}(\tilde{\omega}_K)^n)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{u} - I_{\mathcal{T}} \mathbf{u} \|_{\partial Q_B} \\ & \leq c \left\{ \tau_j^{-\frac{1}{2}} h_K \| \mathbf{u} \|_{L^2(J_{j-1} \cup J_j, H_0^1(K)^n)} \right. \\ & \quad \left. + \tau_j^{\frac{1}{2}} h_K^{-1} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L^2(J_{j-1} \cup J_j, H^{-1}(K)^n)} \right\}. \end{aligned}$$

Aus den Interpolationsfehlerabschätzungen und der Darstellung des Residuums folgt für alle $[\mathbf{v}, q] \in W$ mit $\|[\mathbf{v}, q]\|_W = 1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \langle F([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]), [\mathbf{v}, q] \rangle \\ & \leq c \sum_{Q \in \mathcal{P}_{\tau}} \left\{ \left(\tau_j^{-\frac{1}{2}} h_K + \tau_j^{\frac{1}{2}} h_K^{-1} \right)^2 \| \mathbf{u}_{\mathcal{T}}(x, t_j + 0) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}(x, t_j - 0) \|_{\partial Q_B}^2 \right. \\ & \quad + (h_K + \tau_j h_K^{-1})^2 \left\| \frac{\partial \mathbf{u}_{\mathcal{T}}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \nabla p_{\mathcal{T}} + (\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \mathbf{f} \right\|_Q^2 \\ & \quad + \left(h_K^{\frac{1}{2}} + \tau_j h_K^{-\frac{3}{2}} \right)^2 \| \mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - p_{\mathcal{T}} \mathbf{I})) \|_{\partial Q_L}^2 \\ & \quad \left. + \| \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \|_Q^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Setze zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \eta_Q & = \left\{ \left(\tau_j^{-\frac{1}{2}} h_K + \tau_j^{\frac{1}{2}} h_K^{-1} \right)^2 \| \mathbf{u}_{\mathcal{T}}(x, t_j + 0) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}(x, t_j - 0) \|_{\partial Q_B}^2 \right. \\ & \quad + (h_K + \tau_j h_K^{-1})^2 \left\| \frac{\partial \mathbf{u}_{\mathcal{T}}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \nabla p_{\mathcal{T}} + (\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \mathbf{f} \right\|_Q^2 \\ & \quad + \left(h_K^{\frac{1}{2}} + \tau_j h_K^{-\frac{3}{2}} \right)^2 \| \mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - p_{\mathcal{T}} \mathbf{I})) \|_{\partial Q_L}^2 \\ & \quad \left. + \| \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \|_Q^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir wegen Satz III.5.1 (S. 137) die obere Fehlerschranke

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \|_{L^2((0,T), H_0^1(\Omega)^n)} + \| p - p_{\mathcal{T}} \|_{L^2((0,T), L_0^2(\Omega))} \leq c \left\{ \sum_{Q \in \mathcal{P}_{\tau}} \eta_Q^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Wegen Satz III.5.1 (S. 137) liefert $\langle F([\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{T}}]), [\mathbf{v}, q] \rangle$ für jedes Element $[\mathbf{v}, q] \in W$ mit $\|[\mathbf{v}, q]\|_W = 1$ eine untere Schranke für den Fehler.

Indem wir sukzessive die Funktionen

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= 0, & q &= b_j \psi_K \operatorname{div} \mathbf{u}_\mathcal{T}, \\ \mathbf{v} &= b_j \psi_K \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_\mathcal{T}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u}_\mathcal{T} + \nabla p_\mathcal{T} \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{u}_\mathcal{T} \cdot \nabla) \mathbf{u}_\mathcal{T} - \mathbf{f}_\mathcal{T} \right\}, & q &= 0, \\ \mathbf{v} &= b_j \psi_E \mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot (\nabla \mathbf{u}_\mathcal{T} - p_\mathcal{T} \mathbf{I})), & q &= 0, \\ \mathbf{v} &= \lambda_j \psi_K \{ \mathbf{u}_\mathcal{T}(\cdot, t_j + 0) - \mathbf{u}_\mathcal{T}(\cdot, t_j - 0) \}, & q &= 0 \end{aligned}$$

wählen, erhalten wir mit ähnlichen Argumenten wie in §II.10 (S. 102) und §III.5 (S. 137) die untere Fehlerschranke

$$\begin{aligned} \eta_Q \leq c & \left(1 + h_K^2 \tau_j^{-1} + h_K^{-2} \tau_j \right) \left\{ \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}\|_{L^2(J_{j-1} \cup J_j, H_0^1(\omega_K)^n)} \right. \\ & \left. + \|p - p_\mathcal{T}\|_{L^2(J_{j-1} \cup J_j, L^2(\omega_K))} + h_K \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\mathcal{T}\|_{L^2(J_{j-1} \cup J_j, L^2(\omega_K))} \right\}. \end{aligned}$$

Dabei ist wieder $\mathbf{f}_\mathcal{T}$ eine beliebige Finite Element Approximation an \mathbf{f} , z.B. durch stückweise konstante Funktionen.

Der Faktor $1 + h_K^2 \tau_j^{-1} + h_K^{-2} \tau_j$ hat kein Gegenstück bei den stationären Problemen der Paragraphen II.10 (S. 102) und III.5 (S. 137). Er spiegelt wider, dass die instationären Navier-Stokes Gleichungen eine Differentialgleichung zweiter Ordnung bzgl. des Ortes, aber nur erster Ordnung bzgl. der Zeit sind.

Wegen der nicht lokalen Natur des Raumes $H^{-1}(\Omega)$ kann man die lokale untere Fehlerschranke nicht in der gewohnten Art und Weise zu einer globalen unteren Fehlerschranke zusammensetzen. Man verliert in diesem Fall einen Faktor $\left\{ \min_{1 \leq j \leq N_\tau} \min_{K \in \mathcal{T}_j} h_K \right\}^{-1}$. Man kann diesen Nachteil vermeiden, wenn man Fehlerschranken für

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{T}\|_{L^2((0,T), L^2(\Omega)^n)} + \|p - p_\mathcal{T}\|_{L^2((0,T), H^{-1}(\Omega))}$$

betrachtet. Dann gelten obige obere und untere Fehlerschranke und das globale Analogon der unteren Schranke, wenn überall η_Q durch $h_K \eta_Q$ ersetzt wird.

IV.4. Finite Volumen und DG Methoden

Finite Volumen Methoden sind ein anderer beliebter Ansatz zur Lösung zeitabhängiger parabolischer Probleme, insb. solchen mit einer starken Konvektion. Der passende mathematische Rahmen für diese Verfahren sind *Systeme in Divergenzform*. Bei diesen sucht man ein Vektorfeld \mathbf{U} auf einer Teilmenge Ω des \mathbb{R}^n mit Werten im \mathbb{R}^m , das die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \text{(IV.4.1)} \quad & \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{U})}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) = \mathbf{g}(\mathbf{U}, x, t) \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty) \\ & \mathbf{U}(\cdot, 0) = \mathbf{U}_0 \quad \text{in } \Omega \end{aligned}$$

erfüllt. Dabei ist der *Quellterm* \mathbf{g} ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^m \times \Omega \times (0, \infty)$ mit Werten in \mathbb{R}^m , die *Masse* \mathbf{M} ein Vektorfeld auf \mathbb{R}^m mit Werten in \mathbb{R}^m , der *Fluss* $\underline{\mathbf{F}}$ eine matrixwertige Funktion auf \mathbb{R}^m mit Werten in $\mathbb{R}^{m \times n}$ und der *Anfangszustand* \mathbf{U}_0 ein Vektorfeld auf Ω mit Werten in \mathbb{R}^m . Die Differentialgleichung muss natürlich mit passenden Randbedingungen versehen werden. Diese werden wir jedoch im Folgenden der Einfachheit halber ignorieren.

Man beachte, dass die Divergenz zeilenweise genommen wird

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) = \left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{U})_{i,j}}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq m}.$$

Der Fluss $\underline{\mathbf{F}}$ wird in zwei Anteile additiv aufgespalten

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{F}}_{\text{adv}} + \underline{\mathbf{F}}_{\text{visc}}.$$

$\underline{\mathbf{F}}_{\text{adv}}$ heißt *advektiver Fluss* und enthält keine Ableitungen; $\underline{\mathbf{F}}_{\text{visc}}$ heißt *viskoser Fluss* und enthält räumliche Ableitungen. Der advektive Fluss modelliert Transport- oder Konvektionsphänomene, der viskose Fluss diffusive Phänomene.

BEISPIEL IV.4.1 (Burgers Gleichung). Die *Burgers Gleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

ist ein System in Divergenzform mit

$$m = n = 1, \quad \mathbf{U} = u, \quad \mathbf{M}(\mathbf{U}) = u,$$

$$\underline{\mathbf{F}}_{\text{adv}}(u) = \frac{1}{2} u^2, \quad \underline{\mathbf{F}}_{\text{visc}}(\mathbf{U}) = 0, \quad \mathbf{g}(\mathbf{U}) = 0.$$

BEISPIEL IV.4.2 (Euler und kompressible Navier-Stokes Gleichungen). Die Euler Gleichungen (I.2.11) (S. 11) und die kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen in konservativer Form (I.2.10) (S. 11) jeweils mit $\alpha = 0$ sind Systeme in Divergenzform. Bei beiden ist

$$m = n + 2, \quad \mathbf{U} = (\rho, \mathbf{v}, e)^T, \quad M(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ e \end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{F}}_{\text{adv}}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathbf{I} \\ e \mathbf{v} + p \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \mathbf{f} \\ \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

Bei den Euler Gleichungen verschwindet der viskose Fluss, bei den Navier-Stokes Gleichungen ist

$$\underline{\mathbf{F}}_{\text{visc}}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{\mathbf{T}} + p \mathbf{I} \\ (\underline{\mathbf{T}} + p \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} + \sigma \end{pmatrix}.$$

Beide Gleichungen müssen durch konstitutive Gleichungen für p , $\underline{\mathbf{T}}$ und σ wie in §I.2 (S. 6) ergänzt werden.

Zur Beschreibung der Grundidee der Finite Volumen Methode wählen wir eine Zeitschrittweite $\tau > 0$ und eine Unterteilung \mathcal{T} von Ω in beliebige nichtüberlappende Polyeder. Dabei können die einzelnen Elemente eine komplexere Struktur haben als bei Finite Element Unterteilungen (vgl. Abbildungen IV.4.1 (S. 165) und IV.4.2 (S. 165)). Zudem sind hängende Knoten erlaubt.

Als nächstes betrachten wir eine beliebige natürliche Zahl $\ell \geq 1$ und ein beliebiges Element $K \in \mathcal{T}$ und halten beides im Folgenden fest. Zuerst integrieren wir die Differentialgleichung (IV.4.1) über $K \times [(\ell - 1)\tau, \ell\tau]$

$$\begin{aligned} & \int_{(\ell-1)\tau}^{\ell\tau} \int_K \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{U})}{\partial t} dx dt + \int_{(\ell-1)\tau}^{\ell\tau} \int_K \operatorname{div} \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) dx dt \\ &= \int_{(\ell-1)\tau}^{\ell\tau} \int_K \mathbf{g}(\mathbf{U}, x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Danach integrieren wir die Terme auf der linken Seite partiell

$$\begin{aligned} \int_{(\ell-1)\tau}^{\ell\tau} \int_K \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{U})}{\partial t} dx dt &= \int_K \mathbf{M}(\mathbf{U}(x, \ell\tau)) dx \\ &\quad - \int_K \mathbf{M}(\mathbf{U}(x, (\ell - 1)\tau)) dx, \\ \int_{(\ell-1)\tau}^{\ell\tau} \int_K \operatorname{div} \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) dx dt &= \int_{(\ell-1)\tau}^{\ell\tau} \int_{\partial K} \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}_K dS dt. \end{aligned}$$

Für die nun folgenden Schritte nehmen wir an, dass \mathbf{U} bzgl. Ort und Zeit stückweise konstant ist. Bezeichne mit \mathbf{U}_K^ℓ und $\mathbf{U}_K^{\ell-1}$ den Wert von \mathbf{U} auf K zur Zeit $\ell\tau$ bzw. $(\ell - 1)\tau$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_K \mathbf{M}(\mathbf{U}(x, \ell\tau)) dx &\approx |K| \mathbf{M}(\mathbf{U}_K^\ell) \\ \int_K \mathbf{M}(\mathbf{U}(x, (\ell - 1)\tau)) dx &\approx |K| \mathbf{M}(\mathbf{U}_K^{\ell-1}) \\ \int_{(\ell-1)\tau}^{\ell\tau} \int_{\partial K} \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}_K dS dt &\approx \tau \int_{\partial K} \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{U}_K^{\ell-1}) \cdot \mathbf{n}_K dS \\ \int_{(\ell-1)\tau}^{\ell\tau} \int_K \mathbf{g}(\mathbf{U}, x, t) dx dt &\approx \tau |K| \mathbf{g}(\mathbf{U}_K^{\ell-1}, x_K, (\ell - 1)\tau). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $|K|$ wie üblich die Fläche von K , falls $n = 2$ ist, oder das Volumen von K , falls $n = 3$ ist.

Zuletzt approximieren wir die Randintegrale des Flusses durch einen *numerischen Fluss*

$$\tau \int_{\partial K} \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{U}_K^{\ell-1}) \cdot \mathbf{n}_K dS \approx \tau \sum_{K' \in \mathcal{T}; \partial K \cap \partial K' \in \mathcal{E}} |\partial K \cap \partial K'| \mathbf{F}_{\mathcal{T}}(\mathbf{U}_K^{\ell-1}, \mathbf{U}_{K'}^{\ell-1}).$$

Insgesamt erhalten wir so die folgende *Finite Volumen Methode*:

Berechne für jedes $K \in \mathcal{T}$

$$\mathbf{U}_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{U}_0(x).$$

Berechne für $\ell = 1, 2, \dots$ sukzessiv für jedes Element $K \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{U}_K^\ell) &= \mathbf{M}(\mathbf{U}_K^{\ell-1}) \\ &\quad - \tau \sum_{K' \in \mathcal{T}; \partial K \cap \partial K' \in \mathcal{E}} \frac{|\partial K \cap \partial K'|}{|K|} \mathbf{F}_{\mathcal{T}}(\mathbf{U}_K^{\ell-1}, \mathbf{U}_{K'}^{\ell-1}) \\ &\quad + \tau \mathbf{g}(\mathbf{U}_K^{\ell-1}, x_K, (\ell-1)\tau). \end{aligned}$$

Dabei ist $|\partial K \cap \partial K'|$ die Länge bzw. Fläche des gemeinsamen Randes von $K \cap K'$.

Obiges Verfahren kann leicht wie folgt modifiziert werden:

- Die Zeitschrittweite kann variieren.
- Die Unterteilung von Ω kann sich von Zeitschritt zu Zeitschritt ändern.
- Die Approximation \mathbf{U}_K^ℓ muss nicht stückweise konstant sein.

Um ein praktikables Verfahren zu erhalten, müssen wir noch die folgenden Punkte präzisieren:

- Konstruktion von \mathcal{T} ,
- Wahl von $\mathbf{F}_{\mathcal{T}}$.

Zusätzlich müssen wir noch die Randbedingungen berücksichtigen. Diesen Aspekt werden wir aber im Folgenden der Einfachheit halber ignorieren.

Für die Konstruktion der Unterteilung \mathcal{T} gehen wir von einer Finite Element Unterteilung $\tilde{\mathcal{T}}$ aus, die die Bedingungen von §I.4 (S. 26) erfüllt. Danach unterteilen wir jedes Element $\tilde{K} \in \tilde{\mathcal{T}}$ in kleinere Teilelemente, indem wir entweder

- die Mittelsenkrechten der Kanten von \tilde{K} ziehen (vgl. Abbildung IV.4.1) oder
- den Schwerpunkt von \tilde{K} mit den Kantenmittelpunkten verbinden (vgl. Abbildung IV.4.2).

Die Elemente von \mathcal{T} bestehen dann aus den Vereinigungen all der kleinen Teilelemente, die einen Eckpunkt der Unterteilung $\tilde{\mathcal{T}}$ gemeinsam haben.

Bei beiden Konstruktionen können wir jedem Element in \mathcal{T} einen Elementeckpunkt in $\tilde{\mathcal{N}}$ zuordnen. Außerdem können wir jeder Kante oder Seitenfläche in \mathcal{E} zwei Elementeckpunkte in $\tilde{\mathcal{N}}$ so zuordnen, dass die Verbindungslinie dieser Punkte die gegebene Kante oder Seitenfläche schneidet.

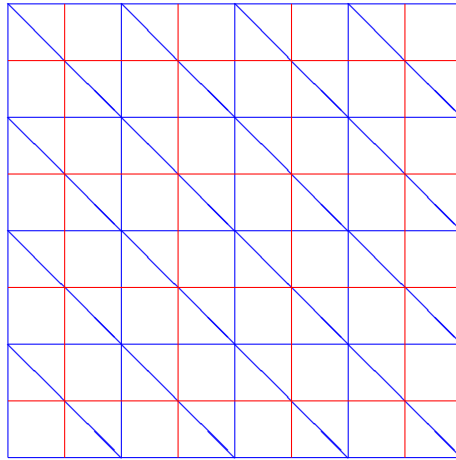


ABBILDUNG IV.4.1. Duales Gitter (rot) mittels Mittelsenkrechten des primalen Gitters (blau)

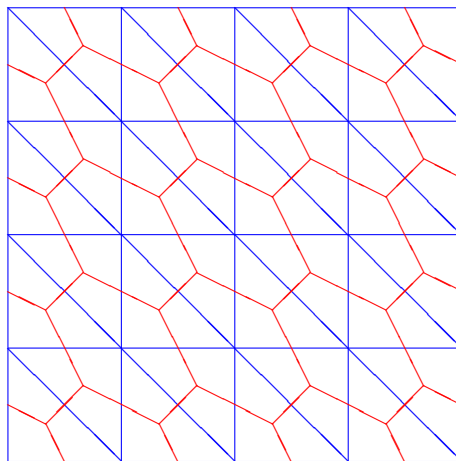


ABBILDUNG IV.4.2. Duales Gitter (rot) mittels der Schwerpunkte des primalen Gitters (blau)

Die erste Konstruktion hat den Vorteil, dass dieser Schnitt senkrecht ist. Allerdings hat diese Konstruktion auch einige Nachteile, die bei der zweiten Konstruktion nicht auftreten:

- Die Mittelsenkrechten eines Dreieckes können sich in einem Punkt außerhalb des Dreieckes schneiden. Ihr Schnittpunkt liegt genau dann innerhalb des Dreieckes, wenn der größte Winkel höchstens ein rechter ist.
- Die Mittelsenkrechten eines Viereckes schneiden sich genau dann, wenn das Viereck ein Rechteck ist.
- Die erste Konstruktion besitzt kein dreidimensionales Analogon.

Für die Konstruktion des numerischen Flusses nehmen wir an, dass \mathcal{T} eine duale Unterteilung zu einer primalen Finite Element Unterteilung $\tilde{\mathcal{T}}$ ist. Für jede Kante oder Seitenfläche E von \mathcal{T} bezeichnen wir mit K_1 und K_2 die angrenzenden Volumina, mit \mathbf{U}_1 und \mathbf{U}_2 die Werte $\mathbf{U}_{K_1}^{\ell-1}$ und $\mathbf{U}_{K_2}^{\ell-1}$ und mit x_1, x_2 Elementeckpunkte von $\tilde{\mathcal{T}}$, so dass die Gerade $\overline{x_1 x_2}$ E schneidet.

Wie im analytischen Fall zerlegen wir den *numerischen Fluss* $\underline{\mathbf{F}}_{\mathcal{T}}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$ additiv in einen *viskosen numerischen Fluss* $\underline{\mathbf{F}}_{\mathcal{T},\text{visc}}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$ und einen *advektiven numerischen Fluss* $\underline{\mathbf{F}}_{\mathcal{T},\text{adv}}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$, die wir getrennt konstruieren.

Für die Konstruktion des viskosen numerischen Flusses führen wir ein lokales Koordinatensystem η_1, \dots, η_d so ein, dass η_1 parallel ist zu $\overline{x_1 x_2}$ und dass die anderen Koordinatenrichtungen parallel sind zu E (vgl. Abbildung IV.4.3). Anschließend drücken wir alle Ableitungen in $\underline{\mathbf{F}}_{\text{visc}}$ in dem neuen Koordinatensystem aus und unterdrücken alle Ableitungen, die nicht zu η_1 gehören. Schließlich approximieren wir die zu η_1 gehörenden Ableitungen durch Differenzenquotienten der Form $\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{|x_1 - x_2|}$.

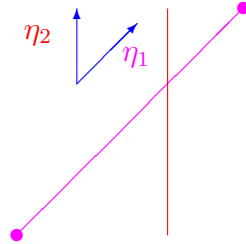


ABBILDUNG IV.4.3. Lokales Koordinatensystem für die Konstruktion des viskosen numerischen Flusses

Für die Konstruktion des advektiven numerischen Flusses bezeichnen wir mit $C(\mathbf{V}) = D(\underline{\mathbf{F}}_{\text{adv}}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_{K_1}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ die Ableitung von $\underline{\mathbf{F}}_{\text{adv}}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_{K_1}$ bezüglich \mathbf{V} und nehmen an, dass diese Matrix diagonalisierbar ist, d.h., es gibt eine invertierbare Matrix $Q(\mathbf{V}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und eine Diagonalmatrix $\Delta(\mathbf{V}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit $Q(\mathbf{V})^{-1}C(\mathbf{V})Q(\mathbf{V}) = \Delta(\mathbf{V})$. Diese Annahme ist für die Euler und kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen erfüllt.

Für jede reelle Zahl z bezeichnen wir mit $z^+ = \max\{z, 0\}$ und $z^- = \min\{z, 0\}$ ihren positiven und negativen Anteil und setzen

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{V})^\pm &= \text{diag}(\Delta(\mathbf{V})_{11}^\pm, \dots, \Delta(\mathbf{V})_{mm}^\pm), \\ C(\mathbf{V})^\pm &= Q(\mathbf{V})\Delta(\mathbf{V})^\pm Q(\mathbf{V})^{-1}. \end{aligned}$$

Mit diesen Notationen lautet das *Steger-Warming Schema* zur Approximation des advektiven Flusses

$$\mathbf{F}_{\mathcal{T},\text{adv}}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = C(\mathbf{U}_1)^+ \mathbf{U}_1 + C(\mathbf{U}_2)^- \mathbf{U}_2.$$

Eine bessere Approximation liefert das *van Leer Schema*

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mathcal{T},\text{adv}}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) &= \left[\frac{1}{2}C(\mathbf{U}_1) + C\left(\frac{1}{2}(\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2)\right)^+ - C\left(\frac{1}{2}(\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2)\right)^- \right] \mathbf{U}_1 \\ &\quad + \left[\frac{1}{2}C(\mathbf{U}_2) - C\left(\frac{1}{2}(\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2)\right)^+ + C\left(\frac{1}{2}(\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2)\right)^- \right] \mathbf{U}_2. \end{aligned}$$

Beide Schemata erfordern die Berechnung von $D\underline{\mathbf{F}}_{\text{adv}}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_{K_1}$ und seiner Eigenwerte und Eigenvektoren für geeignete Werte von \mathbf{V} . Im allgemeinen ist das van Leer Schema aufwändiger als das Steger-Warming Schema, da es drei Auswertungen von $C(\mathbf{V})$ an Stelle von zweien erfordert. Für die Euler und Navier-Stokes Gleichungen kann dieser Extraaufwand allerdings vermieden werden, da der advektive Fluss die spezielle Struktur $\underline{\mathbf{F}}_{\text{adv}}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_{K_1} = C(\mathbf{V})\mathbf{V}$ hat.

BEISPIEL IV.4.3 (Steger-Warming und van Leer Schema für die Burgers Gleichung). Bei Anwendung auf die Burgers Gleichung aus Beispiel IV.4.1 lauten das Steger-Warming Schema

$$\underline{\mathbf{F}}_{\mathcal{T},\text{adv}}(u_1, u_2) = \begin{cases} u_1^2 & \text{if } u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \\ u_1^2 + u_2^2 & \text{if } u_1 \geq 0, u_2 \leq 0 \\ u_2^2 & \text{if } u_1 \leq 0, u_2 \leq 0 \\ 0 & \text{if } u_1 \leq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

und das van Leer Schema

$$\underline{\mathbf{F}}_{\mathcal{T},\text{adv}}(u_1, u_2) = \begin{cases} u_1^2 & \text{if } u_1 \geq -u_2 \\ u_2^2 & \text{if } u_1 \leq -u_2. \end{cases}$$

Die Tatsache, dass die Elemente einer dualen Unterteilung den Elementeckpunkten einer primalen Finite Element Unterteilung zugeordnet werden können, ergibt eine nützliche Beziehung zwischen Finite Volumen und Finite Element Methoden:

Betrachte eine stückweise konstante Funktion φ zu einer dualen Unterteilung \mathcal{T} , d.h. $\varphi \in S^{0,-1}(\mathcal{T})$. Ordne φ die stetige stückweise affine Funktion $\Phi \in S^{1,0}(\tilde{\mathcal{T}})$ zu der primalen Finite Element Unterteilung $\tilde{\mathcal{T}}$ zu, für die $\Phi(x_K) = \varphi_K$ ist für den Elementeckpunkt $x_K \in \tilde{\mathcal{N}}$ zu $K \in \mathcal{T}$.

Diese Beziehung erleichtert die Analyse von Finite Volumen Verfahren und erlaubt einen einfachen und intuitiven Zugang zur a posteriori Fehleranalyse und adaptiven Gitterverfeinerung für Finite Volumen Methoden:

- Gegeben sei die Lösung φ einer Finite Volumen Methode. Berechne die zugehörige Finite Element Funktion Φ .
- Wende einen Standard a posteriori Fehlerschätzer auf Φ an.

- Basierend auf dem Fehlerschätzer wende eine Standard Verfeinerungsstrategie auf die Finite Element Unterteilung $\tilde{\mathcal{T}}$ an und konstruiere so eine neue, lokal verfeinerte Finite Element Unterteilung $\hat{\mathcal{T}}$.
- Konstruiere die duale Unterteilung \mathcal{T}' zu $\hat{\mathcal{T}}$. Dies ist die Verfeinerung von \mathcal{T} .

Die Konvergenzanalyse von Finite Volumen Methoden basiert auf sehr schwachen Kompaktheitsargumenten, insb. dem Konzept der *compensated compactness*. Dieses erfordert die Kontrolle der *totalen Variation* der numerischen Lösung und das Vermeiden unphysikalischer Oszillationen und führt zu sogenannten *total variation diminishing TVD* und *essentially non-oscillating ENO* Schemata.

Diskontinuierliche Galerkin Methoden oder kurz *DG Methoden* sind gewissermaßen eine Mischung aus Finite Element und Finite Volumen Methoden. Die grundlegende Idee kann wie folgt beschrieben werden:

- Approximiere \mathbf{U} durch unstetige Funktionen, die auf kleinen Orts-Zeit-Zylindern der Form $K \times [(n-1)\tau, n\tau]$ mit $K \in \mathcal{T}$ Polynome in Ort und Zeit sind.
- Für jeden derartigen Zylinder multipliziere die Differentialgleichung mit einer polynomialen Testfunktion und integriere das Ergebnis über den Zylinder.
- Integriere die Fluss-Terme partiell.
- Akkumuliere die Beiträge aller Elemente in \mathcal{T} .
- Kompensiere die unzulässige partielle Integration durch passende Sprungterme über die Elementgrenzen.
- Stabilisiere die Diskretisierung analog zu Petrov-Galerkin Verfahren durch zusätzliche Elementresiduen.

In ihrer einfachsten Form führen diese Ideen auf folgendes diskretes Problem:

Berechne die L^2 -Projektion $\mathbf{U}_{\mathcal{T}}^0$ von \mathbf{U}_0 auf $S^{k,-1}(\mathcal{T})$.
Bestimme für $\ell \geq 1$ sukzessive $\mathbf{U}_{\mathcal{T}}^\ell \in S^{k,-1}(\mathcal{T})$ als Lösung von

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}} \frac{1}{\tau} \int_K M(\mathbf{U}_{\mathcal{T}}^\ell) \cdot \mathbf{V}_{\mathcal{T}} - \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{U}_{\mathcal{T}}^\ell) : \nabla \mathbf{V}_{\mathcal{T}} \\ & + \sum_{E \in \mathcal{E}} \delta_E h_E \int_E \mathbb{J}_E(\mathbf{n}_E \cdot \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{U}_{\mathcal{T}}^\ell) \mathbf{V}_{\mathcal{T}}) \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}} \delta_K h_K^2 \int_K \operatorname{div} \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{U}_{\mathcal{T}}^\ell) \cdot \operatorname{div} \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{V}_{\mathcal{T}}) \\ & = \sum_{K \in \mathcal{T}} \frac{1}{\tau} \int_K M(\mathbf{U}_{\mathcal{T}}^{\ell-1}) \cdot \mathbf{V}_{\mathcal{T}} + \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \mathbf{g}(\cdot, \ell_{\mathcal{T}}) \cdot \mathbf{V}_{\mathcal{T}} \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}} \delta_K h_K^2 \int_K \mathbf{g}(\cdot, \ell_{\mathcal{T}}) \cdot \operatorname{div} \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{V}_{\mathcal{T}}) \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{V}_{\mathcal{T}}$.

Dieser Ansatz kann leicht wie folgt verallgemeinert werden:

- Die Sprung- und Stabilisierungsterme können ausgefeilter gewählt werden.
- Die Zeitschrittweite kann variabel sein.
- Das räumliche Gitter kann sich von Zeitschritt zu Zeitschritt ändern.
- Die Funktionen $\mathbf{U}_{\mathcal{T}}$ und $\mathbf{V}_{\mathcal{T}}$ können bezüglich der Zeit Polynome höheren Grades sein. Dann muss der Term

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \int_{(\ell-1)\tau}^{\ell\tau} \int_K \frac{\partial M(\mathbf{U}_{\mathcal{T}})}{\partial t} \cdot \mathbf{V}_{\mathcal{T}}$$

zur linken Seite der Gleichung hinzugefügt werden und die rechte Seite muss durch Terme der Form

$$\frac{\partial M(\mathbf{U}_{\mathcal{T}})}{\partial t} \cdot \mathbf{V}_{\mathcal{T}}$$

ergänzt werden.

Literaturverzeichnis

- [1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.
- [2] D. Boffi, *Stability of higher order triangular Hood-Taylor methods for the stationary Stokes equations*, Math. Models Methods Appl. Sci. **4** (1994), no. 2, 223–235.
- [3] Daniele Boffi, *Three-dimensional finite element methods for the Stokes problem*, SIAM J. Numer. Anal. **34** (1997), no. 2, 664–670.
- [4] F. Brezzi and R. S. Falk, *Stability of a higher order Hood-Taylor element*, SIAM J. Numer. Anal. **28** (1991), 581 – 590.
- [5] F. Brezzi and M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 15, Springer, Berlin, 1991.
- [6] L. Cattabriga, *Su un problema al contorno relativo al sistema di stokes*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **31** (1961), 308 – 340.
- [7] P. G. Ciarlet, *Basic Error Estimates for Elliptic Problems*, Handbook of Numerical Analysis (P. G. Ciarlet and J. L. Lions, eds.), vol. 2, North-Holland, 1991, pp. 17 – 351.
- [8] W. Dörfler, *The conditioning of the stiffness matrix for certain elements approximating the incompressibility condition in fluid dynamics*, Numer. Math. **58** (1990), no. 2, 203–214.
- [9] G. Duvaut and J.-L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976, Translated from the French by C. W. John, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 219.
- [10] I. Ekeland and R. Temam, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod; Gauthier-Villars, Paris-Brussels-Montreal, Que., 1974, Collection Études Mathématiques.
- [11] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.
- [12] V. Girault and P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms*, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 5, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1986.
- [13] R. Glowinski, *Finite Element Methods for Incompressible Viscous Flows*, Handbook of Numerical Analysis (P. G. Ciarlet and J. L. Lions, eds.), vol. 9, Elsevier, 2003, pp. 3 – 1176.
- [14] L. R. Scott and M. Vogelius, *Norm estimates for a maximal right inverse of the divergence operator in spaces of piecewise polynomials*, Math. Modelling Numer. Anal. **9** (1985), 11 – 43.
- [15] R. Temam, *Navier-Stokes Equations*, 3 rd ed., North Holland, Amsterdam, 1984.
- [16] L. Tobiska and R. Verfürth, *Analysis of a streamline diffusion finite element method for the Stokes and Navier-Stokes equations*, SIAM J. Numer. Anal. **33** (1996), no. 1, 107 – 127.
- [17] R. Verfürth, *Analysis I-III*, Skriptum, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, Oktober 2006, 479 Seiten,
www.rub.de/num1/files/lectures/Analysis.pdf.

- [18] ———, *A Posteriori Error Estimation Techniques for Finite Element Methods*, Oxford University Press, Oxford, 2013.
- [19] ———, *Adaptive Finite Element Methods*, Skriptum, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, September 2018, 129 Seiten,
www.rub.de/num1/files/lectures/AdaptiveFEM.pdf.
- [20] ———, *Einführung in die Numerische Mathematik*, Skriptum, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, März 2018, 137 Seiten,
www.rub.de/num1/files/lectures/EinfNumerik.pdf.
- [21] ———, *Numerik I - Gewöhnliche Differentialgleichungen und Differenzenverfahren für partielle Differentialgleichungen*, Skriptum, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, August 2018, 145 Seiten,
www.rub.de/num1/files/lectures/NumDgl1.pdf.
- [22] ———, *Numerik II - Finite Elemente*, Skriptum, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, Januar 2019, 147 Seiten,
www.rub.de/num1/files/lectures/NumDgl2.pdf.
- [23] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1980.

Index

- $D^\alpha \varphi$ schwache Ableitung von φ , 27
 Δ Laplace Operator, 26
 div Divergenz, 26
 ∇ Gradient, 26
 $\|\cdot\|_k$ Sobolev-Norm, 27
 $\|\cdot\|_{k,p}$ Sobolev-Norm, 27
 $\|\cdot\|_{L^p((0,T),X)}$ Norm von $L^p((0,T),X)$, 144
 $\|\cdot\|_{\mathcal{T}}$ gitterabhängige Norm, 66
 $|\cdot|_{\mathcal{T}}$ gitterabhängige Norm, 72
 $\|\cdot\|_{\frac{1}{2};\Gamma}$ Norm von $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, 28
 $\bar{\partial}A$ maßtheoretischer Rand von A , 16
 ∂^*A maßtheoretischer äußerer Rand von A , 16
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ duale Paarung, 28
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ duale Paarung auf X , 37
 \cdot dyadisches Produkt, 26
 \cdot Skalarprodukt, 26
 \otimes Tensorprodukt, 26
 (\cdot, \cdot) L^2 -Skalarprodukt, 143
 $(\cdot, \cdot)_{M_{\mathcal{T}}}$ diskretes Skalarprodukt auf $M_{\mathcal{T}}$, 89
 $(\cdot, \cdot)_{X_{\mathcal{T}}}$ diskretes Skalarprodukt auf $X_{\mathcal{T}}$, 89
 $|\cdot|_k$ Sobolev-Semi-Norm, 27
 $|\cdot|_{k,p}$ Sobolev-Semi-Norm, 27
 $\mathbb{J}_E(\cdot)$ Sprung, 29
 \mathcal{S} Menge der Materialflächen, 17
 \mathcal{T} Unterteilung von Ω , 28
 $\underline{\mathbf{F}}$ Fluss, 162
 $\underline{\mathbf{F}}_{\text{adv}}$ advektiver Fluss, 162
 $\underline{\mathbf{F}}_{\mathcal{T}}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$ numerischer Fluss, 166
 $\underline{\mathbf{F}}_{\mathcal{T},\text{adv}}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$ advektiver numerischer Fluss, 166
 $\underline{\mathbf{F}}_{\mathcal{T},\text{visc}}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$ viskoser numerischer Fluss, 166
 $\underline{\mathbf{F}}_{\text{visc}}$ viskoser Fluss, 162
 Γ Rand von Ω , 26
 H Abschluss von $\{\mathbf{u} \in C_0^\infty(\Omega)^n : \text{div } \mathbf{u} = 0\}$ in der L^2 -Norm, 143
 $H_0^1(\Omega)$ Sobolev-Raum, 27
 $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ Spurraum von $H^1(\Omega)$, 28
 $H^k(\Omega)$ Sobolev-Raum, 27
 H^m m -dimensionale Hausdorffmaß, 16
 $H^{-1}(\Omega)$ Dualraum von $H_0^1(\Omega)$, 28
 $H_0(\text{div})$ Raum der divergenzfreien Vektorfelder mit verschwindender Normalkomponente, 82
 $\mathcal{J}_{\mathcal{T}}$ Quasi-Interpolationsoperator, 31
 $L^p((0,T),X)$ L^p -Funktionen mit Werten im Banach-Raum X , 143
 $L_0^2(\Omega)$ L^2 -Funktionen mit Mittelwert 0, 27
 N Trilinearform der Navier-Stokes Gleichungen, 109
 Ω offene, beschränkte, zusammenhängende Menge in \mathbb{R}^n , 26
 $\Phi(\eta, t)$ Trajektorie durch η zur Zeit t , 6
 T Stokes Operator, 110
 $T_{\mathcal{T}}$ diskreter Stokes Operator, 123
 $\underline{\mathbf{T}}$ Spannungstensor, 9
 V divergenzfreie Vektorfelder in $H_0^1(\Omega)^n$, 143
 V° Polare von V , 37
 V^\perp orthogonales Komplement von V , 37
 $W_0^{1,p}(\Omega)$ Sobolev-Raum, 27
 $W^{k,p}(\Omega)$ Sobolev-Raum, 27
 X^* Dualraum von X , 36
 curl curl-Operator, 81
 curl curl-Operator, 81
 \mathcal{E} Kanten oder Seitenflächen, 29

- \mathcal{E}_Ω innere Kanten oder Seitenflächen, 29
- h_E Länge einer Kante oder Durchmesser einer Seitenfläche, 29
- λ kinematische Viskosität, 11
- μ kinematische Viskosität, 11
- \mathcal{N} Elementeckpunkte, 29
- \mathcal{N}_Ω innere Elementeckpunkte, 29
- ν dynamische Viskosität, 12
- \mathbf{n} äußeres Einheitsnormalenfeld zu Ω , 26
- \mathbf{n}_E Normale zu Kante oder Seitenfläche, 29
- ω_m Volumen der Einheitskugel im \mathbb{R}^m , 16
- a priori Abschätzung für stationäre, inkompressible Navier-Stokes Gleichungen, 111
- a priori Fehlerabschätzung, 124
- abgeschwächte Stabilität, 54
- advektiver Fluss, 162
- advektiver numerischer Fluss, 166
- Äquivalenz von Fehler und Residuum für nichtlineare Probleme, 137
- affine Äquivalenz, 28
- Anfangszustand, 162
- Approximationseigenschaft, 98
- Babuška-Brezzi-Bedingung, 39
- Babuška-Brezzi-Ladyzhenskaya-Bedingung, 39
- Bernardi-Raugel-Element, 56
- biharmonischen Gleichung, 82
- Blasenfunktionen, 31
- Brezzi-Bedingung, 39
- Burgers Gleichung, 162
- Cauchy-Fluss, 17
- Céa-Lemma für Sattelpunktprobleme, 47
- CG-MG Algorithmus, 92
- commuting diagram property, 54
- compensated compactness, 168
- Crouzeix-Raviart Element, 72
- Deformationstensor, 10, 26
- DG Methode, 168
- DG(k), 155
- Dichte, 8
- Diffusions-Schritt, 156
- discontinuous Galerkin method, 155
- Diskontinuierliche Galerkin Methode, 168
- diskreter Stokes Operator, 123
- Divergenz, 26
- divergenzfreie Fortsetzung von Randdaten, 118
- Drehmomenterhaltung, 24
- Dreieckselemente höherer Ordnung mit unstetigen Drücken, 61
- Druck, 11
- duale Paarung, 28, 37
- Dualraum, 28, 36
- dyadisches Produkt, 26
- dynamische Viskosität, 12
- Effizienz, 107
- Eigenschaften der Blasenfunktionen, 31
- Eigenschaften des **curl**-Operators, 82
- Eigenschaften von N , 109
- Einbettungssatz, 27
- eindeutige schwache Lösbarkeit der Stokes Gleichungen, 46
- Eindeutigkeit diskreter Lösungen, 124
- Eindeutigkeit schwacher Lösungen der instationären Navier-Stokes Gleichungen, 147
- Eindeutigkeitssatz für stationäre, inkompressible Navier-Stokes Gleichungen, 113
- Einheitsmatrix, 103
- Einheitstensor, 10, 26
- Energieerhaltung, 10
- equal order interpolation, 64
- Erhaltung der Gesamtenergie, 8
- Erhaltung der Masse, 8
- Erhaltung des Impulses, 8
- erster Schauderscher Fixpunktsatz, 111
- Euler Gleichungen, 11, 162
- Eulersche Koordinate, 6
- Eulersche Polyederformel, 79
- Eulersche Sichtweise, 6
- Existenz diskreter Lösungen, 123
- Existenz und Regularität des Druckes bei instationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen, 150
- Existenzsatz, 144
- Existenzsatz für stationäre, inkompressible Navier-Stokes Gleichungen, 111

- Fehlerabschätzung für die
 - Crouzeix-Raviart Diskretisierung der Stokes Gleichungen, 77
- Fehlerabschätzung für die Petrov-Galerkin Stabilisierung, 70
- Fehlerabschätzung für stabile Finite Element Räume für die Stokes Gleichungen, 51
- Finite Volumen Methode, 163
- Fixpunktiteration, 130
- Fluss, 162
- Fortin-Kriterium, 53
- Friedrichsche Ungleichung, 28
- Funktionaldeterminante, 7
- Funktionalmatrix, 7
- Gagliardo-Nirenberg Ungleichung, 146
- Galerkin Orthogonalität, 72, 139
- Gesamtenergie, 9
- Geschwindigkeit, 6, 14
- Glättungseigenschaft, 97
- Glättungsschritt, 95
- Gleitrandbedingung, 13
- globale obere Fehlerschranke, 105
- Gradient, 26
- Gradientenabschätzung, 43
- Haftrandbedingung, 13
- Hardy Ungleichung, 118
- Hausdorffmaß, 16
- Helmholtz-Zerlegung, 88
- Impulserhaltung, 9
- inf-sup Bedingung, 38
- inf-sup Bedingung für die Stokes Gleichungen, 45
- inf-sup-Stabilität von $B_{\mathcal{T}}$, 67
- inhomogene Stokes Gleichungen, 46
- Instabilität der P1/P0 und Q1/Q0 Elemente, 52
- instationäre inkompressible Navier-Stokes Gleichungen, 12
- interne Energie, 10
- inverse Abschätzung, 30
- kinematische Viskositäten, 11
- Ko-Faktoren, 7
- kompatibel, 17
- Kompatibilitätsbedingung, 46, 117
- kompressible Navier-Stokes Gleichungen, 12
 - kompressible Navier-Stokes Gleichungen in konservativer Form, 162
 - kompressible Navier-Stokes Gleichungen in konvexer Form, 11
 - Konsistenzfehler, 75
 - konstitutive Gleichungen, 10
 - Kontinuitätsmethode, 131
 - Konvergenz der diskreten Lösungen, 49
 - Konvergenz des CG-MG Algorithmus, 92
 - Konvergenz diskreter Lösungen, 123
 - Konvergenzrate des Mehrgitteralgorithmus, 99
 - Konvergenzrate des Zweigitteralgorithmus, 99
- Lagrange-Funktional, 41
- Lagrangesche Koordinate, 6
- Lagrangesche Sichtweise, 6
- Laplace Operator, 26
- least squares Methode, 131
- Lebesgue-Punkt, 23
- Linien Methode, 151
- L^2 -Darstellung des Residuums, 104
- Masse, 162
- Massendichte, 14
- Massenerhaltung, 8
- maßtheoretische äußere Normale, 16
- maßtheoretischer Rand, 16
- Materialfläche, 17
- Menge endlichen Perimeters, 17
- MG-Verfahren, 95
- Mini-Element, 58, 64
- modifiziertes Taylor-Hood-Element, 60
- Münchhausenargument, 113
- Navier, Pierre Louis Marie Henri, 13
- Newton-Verfahren, 130
- nichtlineares CG-Verfahren, 131
- nichtlineares CG-Verfahren nach Polak-Ribière, 132
- nichtlineares CG-Verfahren nach Polak-Ribière für die least squares Formulierung der Navier-Stokes Gleichungen, 134
- nodale Basisfunktion, 30
- numerischer Fluss, 163, 166
- Oberflächenmaß, 15

- Operator Splitting Methode, 136
- orthogonales Komplement, 37
- PCG-Verfahren, 132
- Poincarésche Ungleichung, 28
- Poincaré-Ungleichung in $H^{-1}(\Omega)$, 45
- Polare, 37
- Q1/Q0 Element, 53
- Quellterm, 162
- Raum-Zeit Finite Elemente, 153
- Referenz-Simplex, 28
- Referenz-Würfel, 28
- reguläre Lösung, 114
- reguläre Lösungen der stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen, 114
- regulärer Lösungsast, 114
- Regularität, 28
- Regularität schwacher Lösungen der instationären Navier-Stokes Gleichungen, 149
- Regularitätssatz für die Stokes Gleichungen, 46
- Regularitätssatz für stationäre, inkompressible Navier-Stokes Gleichungen, 113
- residueller a posteriori Fehlerschätzer, 105
- Residuum, 103
- Rothe Methode, 152
- Sattelpunktsproblem, 41
- Satz von Aubin-Nitsche für Sattelpunktsprobleme, 50
- Satz von Cauchy, 9, 23
- Satz von der Impulserhaltung, 14
- Schachbrett-Instabilität des Q1/Q0 Elementes, 53
- schwach stetig, 144
- schwache Ableitung, 27
- schwache Erhaltungsgleichung, 17
- schwache Lösungen der instationären Navier-Stokes Gleichungen, 144
- Scott-Vogelius-Elemente, 63
- SDFEM, 129
- σ -Algebra, 15
- Skalar, 26
- Skalarprodukt, 26
- Sobolev-Raum, 27
- Spannungstensor, 9
- Spurabbildung, 28
- stabiles Paar von Finite Element Räumen, 51
- Stabilität der P_n/P_0 - und Q_n/Q_0 -Elemente, 57
- Stabilität des Variationsproblems, 103
- stationäre inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen, 12
- Steger-Warming Schema, 166
- Stokes, George Gabriel, 13
- Stokes Gleichungen, 13
- Stokes Operator, 110
- Stromfunktion, 82
- Stromlinien-Diffusions Diskretisierung, 129
- Struktur des diskreten Problems, 49
- Systeme in Divergenzform, 161
- Taylor-Hood-Element, 58
- Taylor-Hood-Elemente höherer Ordnung, 60
- Temperatur, 10
- Tensor, 9, 26
- Tensorprodukt, 26
- θ -Schema, 152
- totale Variation, 168
- Trajektorie, 6
- Transport Theorem, 7
- Transport-Diffusions Algorithmus, 156
- Transport-Schritt, 156
- Trilinearform, 109
- uniforme Unterteilung, 88, 94
- untere Fehlerschranke, 107
- van Leer Schema, 167
- Vektorfeld, 26
- viskoser Fluss, 162
- viskoser numerischer Fluss, 166
- Wirbelstärke, 84
- Zeitableitung der Funktionaldeterminante, 7
- Zulässigkeit, 28
- Zustandsgleichung, 11
- Zuverlässigkeit, 105
- zweiter Schauderscher Fixpunktsatz, 111